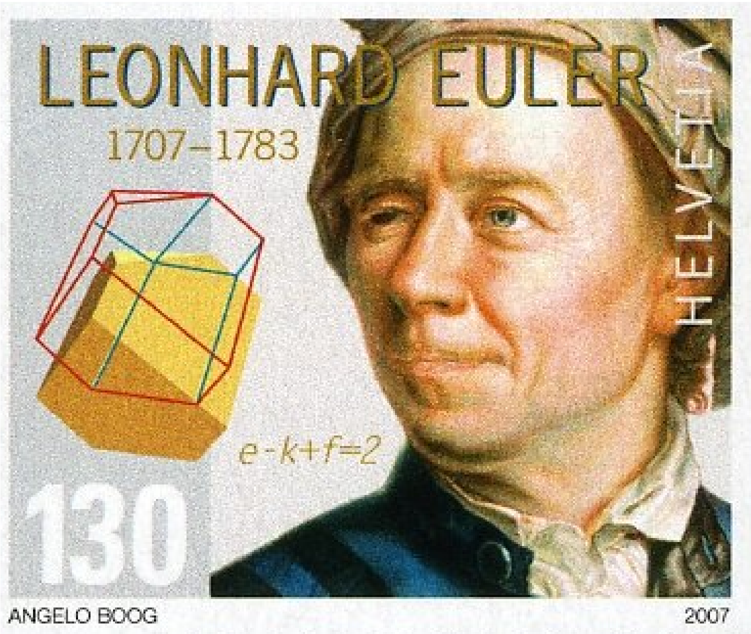
Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Teil V
Analysis 2



5. Juni 2022

Die Furcht vor der Mathematik steht der Angst erheblich näher als der Ehrfurcht.

Felix Auerbach, 1856-1933

Er ist ein Mathematiker und also hartnäckig.

Johann Wolfgang von Goethe, 1749 - 1832

So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.

Ernst Mach, 1838-1916

Ceci n'est pas une pipe.

René Magritte

Vorwort

Das vorliegende Werk ist das erste, das innerhalb dieses Projektes fertiggestellt wurde. Es handelt sich um einen Zufall, denn ich habe alle rund 30 Kapitel simultan bearbeitet.
Analysis 2 stellt das Ende des Studiengangs dar, es folgt noch Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dieses Thema kann man auch vorziehen, was im Unterricht auch häufig gemacht wird.
Den Stoff von niederer und höherer Mathematik für die Matura muss man sich zirkulär aneignen, denn ein strikt linearer Aufbau ist nicht möglich. Nur schon der Satz von Pythagoras der Elementargeometrie setzt voraus, dass man das Quadrieren versteht. Deshalb muss man damit rechnen, den Stoff zweimal zu durchlaufen, um alles verstehen zu können. Natürlich hat der Autor darauf geachtet, so wenige wie möglich vorauszusetzen.
Auch hier können wir nur feststellen, dass es keinen einfachen Weg zur Mathematik gibt entgegen möglicher anders lautender Werbung. Mathematik ist Arbeit für alle. Die Hartnäckigen sind die möglichen Champions. Es ist nur ganz wenigen gegönnt, Mathematik im Flug zu erlernen. Dies sollte eher motivieren als abschrecken. Arbeit bringt Früchte.
Viel Erfolg.

Feldmeilen und St.Moritz, 5. Juni 2022 *Claudio Franzetti*

Organisationshilfe

* (oder blauer Text) bedeutet Stoff für das “erweitertes Niveau” gemäss Reglement

** Zusatzstoff für besonders Interessierte

Inhaltsverzeichnis

Teil V

Analysis 2

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

das Prinzip der vollständigen Induktion erkläre und zum Beweis von Sätzen anwenden
eine Folge durch ihren allgemeinen Term oder durch vollständige Induktion, insbesondere eine arithmetische oder geometrische Folge, definieren
die Begriffe der konvergenten Folgen und der Grenzwerte definieren und illustrieren
die Formel für die Summe der n ersten Terme einer arithmetischen und geometrischen Folge darstellen und beweisen
die Konvergenz einer geometrischen Folge und der zugehörigen Reihe diskutieren

Kapitel 23

Folgen und Reihen*

23.1 Folgen

Dieses Kapitel beschäftigt sich im Wesentlichen mit Funktionen, deren Definitionsbereich die Natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ sind. Im einfachsten Fall besteht die Funktion aus einer Liste von Zahlen, die nummeriert sind. Als Beispiel

i	1	2	3	4	5	...
a_i	2	6	24	120	720	...

Die Auslassungspunkte "..." bedeuten, dass die Folge sich ins Unendliche fortsetzt. Es gibt

- endliche und
- unendliche Folgen.

Definition 1. Eine endliche Folge ist eine Abbildung einer endlichen Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ in $\mathbb{R}$:

$$(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

a_i ist das i-te *Glied* der Folge. i wird als Index oder Nummer von a_i bezeichnet.

Anmerkung 23.1. Eine Folge kann auf zwei Arten gegeben werden:

- eine Vorschrift aus n dann a_n zu berechnen, oder
- eine Vorschrift a_n aus seinem Vorgänger a_{n-1} (oder mehreren) zu berechnen. Dies ist dann eine *Rekursionsformel*.

23.2 Übung Wir bestimmen die ersten 6 Glieder der Folge $a_n = 3n + 2$. Für $n = 1$ folgt $a_1 = 3 + 2 = 5$, für $a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$, $a_3 = 11$, $a_4 = 14$, $a_5 = 17$ und $a_6 = 20$. $\triangleleft$

23.3 Übung Gesucht sind die ersten 6 Glieder von $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. Für $n = 1$ folgt $(1+1)^2 = 4$, dann $(3/2)^2 = 9/4$, denn $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$), $(4/3)^2 = 16/9$, $(5/4)^2 = 25/16$ und $(6/5)^2 = 36/25$ sowie $(7/6)^2 = 49/36$. $\triangleleft$

23.4 Übung Die Folge ist rekursive gegeben als $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 2a_n + 1$ für $n \geqslant 1$. Die ersten 6 Glieder sind: $\{1, 3, 7, 15, 31, 63\}$. $\triangleleft$

23.5 Übung Gegeben die Rekursion $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Somit $a_3 = 1$, $a_4 = 0$, $a_5 = -1$ und $a_6 = -1$, $a_7 = 0$, $a_8 = 1$ usw. also $\{0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, \ldots\}$. Die Zahlen wiederholen sich mit der Periode 6. Somit könnte man a_{87} berechnen als $a_{87} = a3 = 1$, denn 3 ist der Rest von $87/6$. $\triangleleft$

23.6 Übung Wir wollen die Direktformel $a_n = 3n + 2$ in ihre rekursive Form bringen. Wir versuchen einen additiven Ansatz, d.h. $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) + 2 - 3n - 2 = 3$. Damit $a_{n+1} = a_n + 3$. ◁

Wichtig 1. Die Umformung von rekursiver zu direkter Formel und umgekehrt ist nicht immer leicht, z.T. fast unmöglich. ⊣

Definition 2. Gilt $a_{n+1} > a_n$ für jedes n, so heisst die Zahlenfolge *wachsend*, gilt $a_{n+1} < a_n$ für jedes n, so heisst sie *fallend*. Solche Folgen nennt man *monoton*.

23.7 Übung Wir nehmen die schon betrachtet Folge $a_n = 3n + 2$ und vergleichen $a_{n+1} = 3n + 3 + 2 > a_n = 3n + 2$ oder $3n + 5 > 3n + 2$ und äquivalent $5 > 2$. Das stimmt immer, somit ist die Folge monoton wachsend. Für die rekursiv gegebene Folge vermuten wir, dass sie monoton fallend ist, also

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)^2 > n(n+2)$$

Daraus folgt $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$, weil $1 > 0$ ist. Die Vermutung ist richtig. ◁

23.1.1 Arithmetische Folge

Wir kennen das arithmetische Mittel. Bei der arithemtischen Folge ist der Wert von a_n das arithmetische Mittel von Vorgänger und vom Nachfolger, also $a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1})$. Gleichwertig gilt die Setzung

Definition 3. Eine *arithmetische Folge* ist eine Zahlenfolge, deren Glieder der Rekursionsformel

$$a_{n+1} = a_n + d$$

genügen.

Anmerkung 23.8. Die direkte Berechnung erfolgt mit der Formel

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

23.9 Übung Wir führen die Summenformel s_n ein. Sie addiert die ersten n Glieder auf. Also

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Nun sei die Folge gegeben als die ersten natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Diese bilden eine arithmetische Folge, denn $a_{n+1} = a_n + 1$. Somit ergibt sich die Summe der ersten 100 Zahlen als $s_{100} = \frac{1+100}{2} 100 = 5050$. ◁

23.10 Übung Wie viele Glieder der arithmetischen Folge $7, 12, \ldots$ muss man addieren, damit die Summe grösser als 900 ist? Die Ungleichung lautet mit der Summenformel $7 + (n-1)5 > 900$. Daraus folgt mit Aequivalenzumformungen $n - 1 > (900 - 7)/5$ oder $n > 180.6 + 1$ und somit $n > 181$. Daraus folgt, $n = 182$. ◁

23.1.2 Geometrische Folgen

Definition 4. Eine geometrische Folge ist eine Zahlenfolge, deren Glieder der Rekursionsformel

$$a_{n+1} = a_n q$$

genügen.

Anmerkung 23.11. Die entsprechende Direktformel lautet:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

23.12 Übung Die Summe s_n der ersten n Glieder ist wie folgt und $q \cdot s_n$

$$\begin{array}{rcccccccccccc} s_n & = & a & + & aq & + & aq^2 & + & \dots & + & aq^{n-2} & + & aq^{n-1} & & \\ qs_n & = & & & aq & + & aq^2 & + & \dots & + & aq^{n-2} & + & aq^{n-1} & + & aq^n \end{array}$$

Wie man sieht folgt

$$s_n - qs_n = a - aq^n \qquad \Leftrightarrow \qquad s_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{für} \quad q \neq 1.$$

Für $q = 1$ ist $s_n = n \cdot a$. ◁

Formel 23.13. Summen von arithmetischer und geometrischer Folge

- arithmetisch $s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n = \dfrac{1}{2}(2a_1 + (n-1)d)$
- geometrisch $s_n = a_1 + a_1 q + \dots a_1 q^{n-1} = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ für $q \neq 1$.

Anmerkung 23.14. Für $q = 1$ ist die Summe $s_n = n \cdot a_1$.

23.15 Übung Es gibt unzählige Varianten der sogenannten *Reiskornlegende*, wonach der Erfinder des Schachspiels von seinem begeisterten König dafür einen Wunsch offen hatte. Er forderte vom König die Reismenge, die sich ergibt, wenn man auf dem ersten Feld 1, auf dem zweiten 2, auf dem dritten 4, und dann 8 usw. bis zum 64. Feld addiert. Der König und sein Vezir waren begeistert von diesem geringen Wunsch, bis sie rechneten. Es handelt sich offensichtlich um eine geometrische Folge mit $q = 2$. Mit der Summe nach Formel 23.13 ergibt sich $s_{64} = \frac{2^{64}-1}{1} \approx 2^{64}$. Wie gross ist aber diese Zahl? Wir machen einen Basiswechsel mit $2^{64} = 10^x$, daraus $64 \ln(2) = x \ln(10)$ und $x = 64\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = 19.266$. Daraus $s_{64} = 10^{19.266} = 10^{0.266} \cdot 10^{19} = 1.84 \cdot 10^{19}$. Soviel Reis gibt es gar nicht! ◁

23.1.3 Höhere arithmetische Folgen**

Wir betrachten eine Folge mit den Zahlen

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	1	2	15	52	125	246	...

Das ist keine arithmetische Folge, denn die Differenzen sind nicht konstant. Ebenso ist es keine geometrische, denn die Verhältnisse sind nicht konstant. Was nun? Das probate Mittel sind die Differenzreihen, also

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	1	2	15	52	125	246	...
Δ_1	–	1	13	37	73	121	...
Δ_2	–	–	12	24	36	48	...
Δ_3	–	–	–	12	12	12	...

Die Grundannahme ist ein Polynom vom Grad n, das die Folge beschreibt. Ein solches Polynom hat genau n Differenzreihen. Deshalb kann man davon ausgehen, dass hier eine Polynom vom Grad 3 die Zahlen generiert, also

$$a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Damit ist die erste Differenzreihe

$$\begin{aligned}\Delta_1 a_n &= A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + \cancel{D} - An^3 - Bn^2 - Cn - \cancel{D} \\ &= 3An^2 + 2B'n + C\end{aligned}$$

(wir kümmern uns nicht um die Details von B', denn der Term wird ohnehin verschwinden.) Die zweite Differenz wird

$$\begin{aligned}\Delta_2 a_n &= 3A(n+1)^2 + B'(n+1) + \cancel{C} - 3An^2 - B'n - \cancel{C} \\ &= 6An + B'\end{aligned}$$

und die dritte Differenz

$$\begin{aligned}\Delta_3 a_n &= 6A(n+1) + \cancel{B'} - 6An - \cancel{B'} \\ &= 6A = 3!A = 12\end{aligned}$$

Damit ist $A = 2$ bekannt. Wenn man $n = 0$ einsetzt, so ist auch $D = 1$ bekannt. Es fehlen also B und C. Für $n = 1$ folgt $2 = 2 + B + C + 1$ oder $B + C = -1$ und für $n = 2$ dann $15 = 2 \cdot 8 + 4B + 2C + 1$ oder $4B + 2C = -2$ und $2B + C = -1$. Wir setzen $B = -1 - C$ ein: $-2 - 2C + C = -1$ oder $C = -1$. Damit folgt $B = 0$. Also

$$a_n = 2n^3 - n + 1$$

23.16 Übung Wir betrachten die Zahlen $s_n = 1 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$. Damit ergibt sich die folgenden Tabelle

n	0	1	2	3	4	5	...
s_n	1	5	14	30	55	91	...
Δ_1	–	4	9	16	25	36	...
Δ_2	–	–	5	7	11	13	...
Δ_3	–	–	–	2	2	2	...

Wie oben haben wir 3 Differenzreihen, also ein Polynom 3. Grade wie

$$s_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Sofort wissen wir, dass $D = 1$ und von oben $A = 2/3! = 1/3$. Für $n = 1$ folgt $5 = 1/3+B+C+1$ und für $n = 2$ $14 = 1/3 \cdot 8 + 4B + 2C + 1$. Aus der ersten Gleichung lösen wir nach B auf:

$B = (4-1/3) - C = 11/3 - C$ uns setzen ein für $n = 2$: $14 = 1/3 \cdot 8 + 4[11/3 - C] + 2C + 1$, womit folgt $14 = 8/3 + 44/3 - 2C + 1$ oder $42 = 8 + 44 - 6C + 3$ und $6C = 13$ und $C = 13/6$. Daraus $B = 11/3 - 13/6 = (22-13)/6 = 9/6 = 3/2$. Also

$$s_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)$$

Wir fragen uns, ob man diese Formel schöner darstellen kann. Wir erraten, dass $n = -1$ eine Nullstelle des Polynoms ist. Mit der Division finden wir:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\big) : \big(n+1\big) = 2n^2 + 7n + 6 \\
\underline{-2n^3 - 2n^2} \\
\qquad\quad 7n^2 + 13n \\
\qquad\ \underline{-7n^2 \ \ -7n} \\
\qquad\qquad\quad 6n + 6 \\
\qquad\qquad\ \underline{-6n - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Den Ausdruck $(2n^2 + 7n + 6)$ kann man als $(2n + p)(n + q)$ versuchen, und findet die Gleichungen $pq = 6$ und $2q + p = 7$. Die 6 kann man als $3 \cdot 2$ oder $6 \cdot 1$ schreiben. Mit 3 und 2 finden wir $q = 2$ und $p = 3$. Alles zusammen ergibt

23.17 Formel.

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

◁

23.2 Summen und Reihen

Definition 5. Die n-te *Partialsumme* ist die Summe der ersten n Glieder von $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, das heisst

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der n-ten Partialsummen heisst *Reihe*.

Anmerkung 23.1. Die Partialsummen s_n bilden auch eine Folge.

Anstatt Terme aneinander zu reihen kann man ein neues Zeichen, ein grosses griechische Sigma einführen.

Definition 6. **Summennotation** Mit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ einer Folge schreibt man für die Summe:

$$\sum_{k=m}^{p} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_p$$

Die Hilfsvariable k ist der Laufindex mit Startwert m und Endwert p.

Anmerkung 23.2. Das griechische Symbol Σ beginnt mit “S” wie Summe. Das ist so beabsichtigt.

Anmerkung 23.3. Der Laufindex ist ein Hilfsvariable, die beliebig sein kann. Deshalb sind folgenden Ausdrücke gleich:

$$\sum_{n=3}^{6}(2n-1)=\sum_{k=3}^{6}(2k-1)=\sum_{j=3}^{6}(2j-1)$$

23.4 Übung Wir wollen die Summe $0.9+0.09+0.009+\ldots+0.000009=0.999999$ mit der Summennotation schreiben. Die Glieder der Folge sind $a_i=9/10^i$. Der obere Wert des Index ist 6, denn $0.000009=9/10^6$. Also ist die Summe darstellbar als

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{9}{10^i}=\sum_{i=1}^{6}9\cdot 10^{-i}$$

$\triangleleft$

23.5 Übung Wir bestimmen $\sum_{n=3}^{6}(2n-1)$. Es sind 4 Terme zu berechnen und zu summieren.

$$\sum_{n=3}^{6}(2n-1)=5+7+9+11=32$$

$\triangleleft$

23.6 Übung Bestimmen wir $\sum_{n=1}^{5}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$. Es sind 6 Glieder zu summieren.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n &= \frac{(-1)^{1+1}}{1}(x-1)^1+\frac{(-1)^{2+1}}{2}(x-1)^2+\frac{(-1)^{3+1}}{3}(x-1)^3\\ &+\frac{(-1)^{1+4}}{4}(x-1)^4+\frac{(-1)^{1+5}}{5}(x-1)^5\\ &=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}\end{aligned}$$

$\triangleleft$

23.7 Übung Als Summe geschrieben. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+-\ldots+\dfrac{1}{117}$. Die Glieder sind betragsmässig $|a_i|=1/i$. Nun kommt noch das Vorzeichen dazu, das man mit Potenzen von (-1) schreibt. Gerade Exponenten führen zu Plus, negative zu Minus. Also $a_i=\frac{1}{i}(-1)^{i+1}$. Damit folgt

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots+\frac{1}{117}=\sum_{i=1}^{117}\frac{1}{i}(-1)^{i+1}$$

$\triangleleft$

Mit der Summennotation kann man stark vereinfachen und Übersicht gewinnen. Beispielsweise lassen sich Polynome oder algebraische Gleichungen übersichtlich schreiben:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k=0$$

für reelle Zahlen a_k, $k=0,1,\ldots n$.

Eigenschaften 23.8. Summennotation Angenommen (a_n) and (b_n) sind Folgen. Dann gilt

- $\sum_{k=m}^{p}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=m}^{p} b_k$
- $\sum_{k=m}^{p} c\, a_k = c \sum_{k=m}^{p} a_k$, für $c \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{k=m}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{p} a_k$, für natürliche Zahlen $m \leqslant j < j+1 \leqslant p$.
- $\sum_{k=m}^{p} 1 = p - m$

Anmerkung 23.9. Es kann sich ergeben, dass der Startwert des Laufindizes grösser ist als der Endwert. Dann wird der Summand als Null angenommen, also

$$\sum_{k=5}^{4} a_k = 0.$$

23.2.1 Konvergenz und Grenzwert

Wir haben bis hierhin nur endliche Folgen betrachtet. Um unendliche Folgen und Reihen einzubauen, müssen wir den Begriff Grenzwert einführen.

Definition 7. Die Zahl $s \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert der Folge (s_n), falls für jedes $\varepsilon > 0$ alle Glieder mit hinreichend grossem Index n „um s herum" in dem offenen Intervall $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ liegen. Man sagt

$$s_n \to s \quad \text{wenn} \quad n \to \infty$$

Anmerkung 23.10. Nur für wenige Folgen und Reihen existiert ein Grenzwert.

Definition 8. Konvergiert die Folge (s_n) der Partialsummen von (a_n), $s_n \to s$, dann sagt man, dass die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, und schreibt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Definition 9. Eine *Nullfolge* ist eine Zahlenfolge, die gegen 0 konvergiert, d.h. $a_k \to 0$ wenn $n \to \infty$.

Satz 23.11. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dann ist (a_k) eine Nullfolge.

Anders formuliert: Hat die Partialsumme einen Grenzwert, dann bilden die Summanden eine Nullfolge, aber nicht umgekehrt.

23.12 Übung Konvergiert die Reihe $s_n = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4} + \frac{3\cdot 4}{5\cdot 6} + \frac{5\cdot 6}{7\cdot 8} + \ldots$? Die Glieder müssten eine Nullfolge bilden, d.h. die Summanden mit $n \to \infty$ gegen Null gehen. Der Grenzwert von $\frac{n\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot(n+3)}$ ist aber $\frac{n\cdot n}{n\cdot n} = 1$. Deshalb konvertiert die Reihe nicht. $\lhd$

Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert nach $\frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. Denn $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$ geht über in $s = \frac{1}{1-q}$ für $n \to \infty$, d.h. q^n geht nach Null für $n \to \infty$.

Formel 23.13. Geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad |x| < 1.$$

23.14 Übung Wir betrachten die Reihe $100 + 99 + 99 \cdot 0.99 + 99 \cdot 0.99^2 + \ldots$. Konvergiert diese Reihe und wenn ja, was ist der Grenzwert? Wir schreiben $s_n = 100 + 99(1 + 0.99 + 0.99^2 + 0.99^3 + \ldots + 0.99^n)$. In der Klammer haben wir eine geometrische Reihe mit $x = 0.99 < 1$, d.h sie konvergiert. Also ist der Grenzwert mit der Formel 23.13 $s = 100 + 99\frac{1}{1-0.99} = 100 + \frac{99}{0.01} = 100 + 9900 = 10000$. ◁

23.15 Übung Wir betrachten nochmals die geometrische Reihe aber als Division. Es gelten die Divisionen, beginnend mit $1 \div (1-x) = 1 + x/(1-x)$ etc.:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + \frac{x}{1-x} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{1-x} \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}
\end{aligned}$$

Man könnte sich hier die Frage stellen, wie denn eine Division $(2 + 5x) \div (1 + 2x - 3x^2)$ als Reihe aussieht? Dazu in Abschnitt 23.2.2 mehr. ◁

Teleskopreihe**

Zur weiteren Illustration nehmen wir die sogenannte Teleskopreihe, die gegeben ist als $a_k = \frac{1}{(k-1)k}$ mit den Partialsummen $s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$. Weil sich so $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ umschreiben lässt, folgt

$$s_n = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

mit dem offensichtlichen Grenzwert 1. Alle Zwischenterme heben sich weg und es bleiben der erste und der letzte.

Euler'sche Zahl**

Es ist die Folge $(a_k) = \frac{1}{k!}$ zu untersuchen. Dabei bedeutet das Ausrufzeichen die Fakultät, die als $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ definiert ist. Zudem gilt $0! = 1$. Die Partialsummen sind somit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

Die Folge (s_n) ist monoton wachsend, denn $s_n < s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1}$ oder $0 < \frac{1}{n+1}$. Aus der Summenformel und deren drei erste Glieder sieht man ganz einfach, dass $s_n > 2.5$ sein muss.

Nun schätzen wir den Grenzwert ab, indem wir die geometrische Reihe zu Hilfe nehmen. Zuerst aber stellen wir fest, dass gilt, weil z.B. $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{g!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{g} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{g-1}}$$

Somit gilt auch die folgende Ungleichung für s_n

$$s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Dies ist nun eine geometrische Reihe, wobei noch eine 1 am Anfang steht. Für diese kennen wir die Summe als $\frac{1-q^n}{1-q}$. Hier ist $q = 1/2$. Somit gilt für die Ungleichung

$$s_n < 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 1 + 2\big(1 - (\frac{1}{2})^n\big) < 3$$

Die gesuchte Zahl liegt also zwischen 2.5 und 3. Dieser Grenzwert ist als *Euler'sche Zahl* bekannt.

Formel 23.16.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Wir berechnen die ersten Glieder der Reihe s_n und erhalten

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
2	2.5	2.666667	2.708333	2.716667	2.718056	2.718254	2.718279

Der Wert aus dem Rechner ist 2.718282. Man sieht, dass die Reihe sehr schnell konvergiert.

23.2.2 Potenzreihe**

23.17 Übung Wir fahren mit der Division $(2+5x) \div (1+2x-3x^2)$ fort. Das erste Glied ist 2 etc.

$$(2+5x) \div (1+2x-3x^2) = 2 + x + 4x^2 - 5x^3 + \ldots$$

Wir nehmen aufgrund der geometrischen Reihe an, die Reihe lasse sich als $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n + \ldots$ darstellen. Also folgt

$$(2+5x) \div (1+2x-3x^2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

oder

$$\begin{aligned}(2+5x) &= (1+2x-3x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots) \\ &= a_0 \\ &+ (2a_0 + a_1)x \\ &+ (a_2 + 2a_1 - 3a_0)x^3 \\ &+ (a_4 + 2a_3 - 3a_2)x^4 + \ldots \\ &= 2 + 5x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots\end{aligned}$$

Nun gilt aus dem Vergleich der Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\\
a_1 &= 5 - 2a_0 = 5 - 4 = 1\\
a_2 &= -2a_1 + 3a_0 = -2 + 6 = 4\\
a_3 &= -2a_2 + 3a_1 = -8 + 3 = -5\\
a_4 &= -2a_3 + 3a_2 = 10 + 12 = 22
\end{aligned}$$

oder allgemeine $a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}$. Wir haben also die Folge mit $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ und $a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}$. ◁

Definition 10. Unter einer *Potenzreihe* $P(x)$ versteht man eine unendliche Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit einer beliebigen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen.

23.18 Übung Die grundlegende Idee ist, jede Funktion als (unendliche) Reihe darzustellen. Wir nehmen z.B. die Exponentialfunktion mit positiver Basis a und schreiben

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \tag{23.1}$$

Der erste Term ist 1, weil $a^0 = 1$ gilt. Nun setzen wir $x + u$ anstatt x, d.h.

$$\begin{aligned}
a^{x+u} &= 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots\\
&= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots + u(A + 2B + 3C + \ldots) + Mu^2 + \ldots\\
&= a^x + u(A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots) + Mu^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Nun ist aber auch

$$\begin{aligned}
a^{x+u} &= a^x a^u = a^x(1 + Au + Bu^2 + Cu^3 + \ldots)\\
&= a^x + a^x Au + a^x Bu^2 + a^x Cu^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichung

$$Aa^x = A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots$$

oder mit a^x aus Gl. 23.1:

$$A(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots) = A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \ldots = A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned}
A &= A\\
2B &= A^2 &\Leftrightarrow\quad B &= A^2/2\\
3C &= AB &\Leftrightarrow\quad C &= A^3/(2\cdot 3)\\
4D &= AC &\Leftrightarrow\quad D &= A^4/(2\cdot 3\cdot 4)\\
5E &= AD &\Leftrightarrow\quad E &= A^5/(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)
\end{aligned}$$

Nun haben wir also bestimmt
$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ax)^n}{n!}$$
Wir haben eine eindeutige Beziehung zwischen a und A, können aber A nicht ohne weiteres aus a bestimmen. Das a, das zu $A = 1$ gehört nennen wir mal e. Wir setzen also $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Dies ist die Euler'sche Zahl. Nun machen wir den Basiswechsel, indem wir fordern $a^x = e^u$ und daraus $u \ln(e) = x \ln(a)$ und mit $\ln(e) = 1$ folgt $u = x \ln(a)$. Somit können wir setzen
$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(a)x)^n}{n!}$$
◁

23.19 Übung Weil es doch so schön war noch den Sinus als Potenzfunktion. Wir machen den bekannten Ansatz:
$$\begin{aligned}\sin(x) &= A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots\\ \cos(x) &= 1 + ax + bx^2 + cx^3 \dots\end{aligned}$$
Wir bemerken, dass für $x \to 0$ der Quotient $\sin(x)/x$ sich verhält wie die Ableitungen $\cos(x)/1$ an der Stelle $x = 0$, also muss $A_1 = 1$ gelten. Wir schreiben neu und setzen auch $-x$ ein, denn $-\sin(x) = \sin(-x)$. Daraus folgt mit der Subtraktion
$$\begin{aligned}\sin(x) &= x + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 \dots\\ -\sin(x) &= -x + Ax^2 - Bx^3 + Cx^4 \dots\\ \hline 2\sin(x) &= 2x + 2Bx^3 + 2Dx^5 \dots\\ \sin(x) &= x + Bx^3 + Dx^5 \dots\end{aligned}$$
und ebenso können wir die Hälfte der Terme wegschaffen mit $\cos(x) = \cos(-x)$ und Addition
$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 + ax + bx^2 + cx^3 \dots\\ \cos(x) &= 1 - ax + bx^2 - cx^3 \dots\\ \hline 2\cos(x) &= 2 + 2bx^2 + 2dx^4 \dots\\ \cos(x) &= 1 + bx^2 + dx^4 \dots\end{aligned}$$
Wir bilden die Ausdrücke $\sin(x) + \cos(x)$ und $\cos(x) - \sin(x)$ zu
$$\begin{aligned}\sin(x) + \cos(x) &= 1 + x + bx^2 + Bx^3 + cx^4 + Cx^5 + \dots\\ \cos(x) - \sin(x) &= 1 - x + bx^2 - Bx^3 + cx^4 - Cx^5 + \dots\end{aligned}$$
denn wir wollen x durch $x + u$ ersetzen und erhalten wegen der Additionstheoreme $\sin(x + u) + \cos(x + u) = (\sin(x) + \cos(x))\cos(u) + (\cos(x) - \sin(x))\sin(u)$ einerseits
$$\begin{aligned}L =&[1 + x + bx^2 + Bx^3 + cx^4 + Cx^5 + \dots](1 + bu^2 + du^4 \dots)\\ &+[1 - x + bx^2 - Bx^3 + cx^4 - Cx^5 + \dots](u + Bu^3 + Du^5 \dots)\end{aligned}$$
anderseits gilt
$$R = 1 + (x + u) + b(x + u)^2 + B(x + u)^3 + c(x + u)^4 + C(x + u)^5 + \dots$$

Jetzt stellen wir um und betrachten nur Terme in u ohne höhere Potenzen, also

$$R = 1 + x + bx^2 + Bx^3 + cx^4 + \ldots + u(1 + 2bx + 3Bx^2 + 4cx^3 + \ldots) + Mu^2 \ldots$$

Nun können wir in R und L zwei identische Terme subtrahieren und zwar die unscheinbare 1 in der zweiten Klmmer von L gegen die erste Summe von R. Damit wird die linke Seite

$$\begin{aligned} L =& [1 + x + bx^2 + Bx^3 + cx^4 + Cx^5 + \ldots](\cancel{1+}bu^2 + du^4 \ldots) \\ &+ [1 - x + bx^2 - Bx^3 + cx^4 - Cx^5 + \ldots](u + Bu^3 + Du^5 \ldots) \end{aligned}$$

und

$$R = u(1 + 2bx + 3Bx^2 + 4cx^3 + \ldots) + Mu^2 \ldots$$

Wir dividieren beide Seiten durch u und erhalten

$$\begin{aligned} L =& [1 + x + bx^2 + Bx^3 + cx^4 + Cx^5 + \ldots](bu + du^3 \ldots) \\ &+ [1 - x + bx^2 - Bx^3 + cx^4 - Cx^5 + \ldots](1 + Bu^2 + Du^4 \ldots) \end{aligned}$$

und

$$R = (1 + 2bx + 3Bx^2 + 4cx^3 + \ldots) + \ldots$$

Diese Gleichung gilt allgemein, also auch für $u = 0$. Nun zeigt sich bei $L = R$:

$$1 - x + bx^2 - Bx^3 + cx^4 - Cx^5 + \ldots = 1 + 2bx + 3Bx^2 + 4cx^3 + 5Cx^4 \ldots$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 2b = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad b = -1/2 \\ 3B = b \quad &\Leftrightarrow \quad B = -1/(2 \cdot 3) \\ 4c = -B \quad &\Leftrightarrow \quad c = 1/(2 \cdot 3 \cdot 4) \\ 5C = c \quad &\Leftrightarrow \quad C = 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \end{aligned}$$

Die Rekursionsformel ist klar. Damit schreiben wir für Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{aligned}$$

Damit sind wir am Ende einer langen Reise. Nach Umformungen Koeffizienten vergleichen. $\triangleleft$

Ohne weitere Angaben erwähnen wir die Reihendarstellungen als Potenzreihen:

- Exponentialfunktion:

  $$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Sinus:

  $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

- Kosinus:
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$$
für $-\infty < x < \infty$ sowohl für den Sinus als auch für den Kosinus.

- Logarithmusfunktion:
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
für $-1 < x \leqslant 1$.

- Wurzelfunktion:
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 \mp \cdots$$
für $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Mit diesen Formeln hat man theoretisch eine Möglichkeit, die schwierigen Funktionen mit einfachen Mitteln zu berechnen. Seit der Einführung der Taschenrechner in den 1970er Jahren ist dies nicht mehr wichtig.
Zum Schluss noch eine Benennung

Definition 11. Funktionen, die sich als unendliche Reihen darstellen, nennt man *transzendent*.

23.3 Vollständige Induktion

Mit der Einführung von unendlichen Folgen stellt sich die schwierige Frage, wie man eine Aussage oder Behauptung beweisen kann, wenn doch unendlich viele Terme vorhanden sind. Also eine Aussage "für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt" ist problematisch. Eine Lösung ist die Rekursion, der Rückgriff auf den Vorgänger. Wir erinnern die Definition der natürlichen Zahlen:

(1) 0 ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.

(3) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(4) Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.

(5) Jede Eigenschaft der Null, die auch der Nachfolger jeder natürlichen Zahl besitzt, kommt allen natürlichen Zahlen zu.

Wir erkennen das Muster von Anfang, die 0, und Vererbung von Eigenschaften.

Satz 23.1. Prinzip der vollständigen Induktion Es sei $P(n)$ eine Behauptung über natürliche Zahlen n.

Falls

(1) $P(1)$ wahr ist und

(2) falls mit $P(k)$ als wahr stets folgt, dass auch $P(k+1)$ wahr ist,

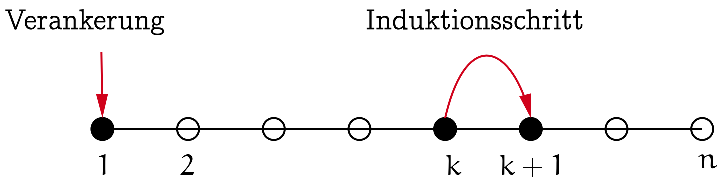
dann ist die Aussage $P(n)$ wahr für alle n.

Anmerkung 23.2. Das Prinzip besteht aus zweit Teilen, nämlich

(1) der *Verankerung* oder Induktionsanfang der unendlichen Folge, und der

(2) *Vererbung* (des Wahrheitswertes) von Glied zu Glied .

Man zeigt also, dass es ein Glied gibt, das wahr ist (Verankerung) und dass der Nachfolger den Wahrheitswert des Vorgänger übernimmt (Induktionsschritt).



Anmerkung 23.3. Die Verankerung ist am besten beim ersten zulässigen Glied der Folge, das nicht notwendigerweise 1 sein muss. Es gibt Behauptungen für $n > 1$ zu den Folgen, oder eine Rekursionsformel braucht mehrere Vorgänger, z.B. $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$.

23.3.1 Geschlossener Ausdruck

23.4 Übung Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geqslant 1$ gilt: $6^n - 1$ ist durch 5 teilbar. Das ist die Behauptung. Eine Zahle x ist durch c teilbar, wenn man sie als $x = c \cdot g$ darstellen kann.

I. Verankerung: für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn $6 - 1 = 5$ ist durch 5 teilbar.

II. Voraussetzung: $6^n - 1 = 5 \cdot g$ ist als durch 5 teilbar angenommen

III. Induktionsschritt: zeige, dass $6^{n+1} - 1$ durch 5 teilbar.

Dazu müssen wir den Ausdruck umschreiben, so dass die Voraussetzung darin vorkommt. Z.B.

$$6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 6^n - 1 = (5+1)6^n - 1 = \underbrace{6^n - 1}_{\text{Voraussetzung}} + 5 \cdot 6^n$$

Da bei einer Summe beide Summanden teilbar sein müssen, bleibt nur zu beweisen, dass der zweite Term $5 \cdot 6^n$ durch 5 teilbar ist. Da 5 ein Faktor des Terms ist, ist der Term durch 5 teilbar. Damit ist die Induktion richtig.
Wir hätten auch argumentieren können, dass die Differenz von $a_{n+1} - a_n$ durch 6 teilbar sein soll, also $6^{n+1} - 6^n = 6^n(6-1) = 6^n \cdot 5$. $\triangleleft$

23.5 Übung Beweisen wir die Summenformel für arithmetische Reihen, d.h. für $P(k)$: $\sum_{j=1}^{n}(a + (j-1)d) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$.

I. Verankerung: mit $n = 1$ folgt $(a + 0 \cdot d) = \frac{1}{2}(2a + (1-1)d) = 2a/2 = a$, stimmt.

II. Voraussetzung: die Behauptung $P(k)$

III. Induktionsschritt: $P(k+1)$

Wir schreiben nun $P(k+1)$ hin und versuchen, $P(k)$ herauszulösen

$$\sum_{j=1}^{k+1}(a+(j-1)d) \stackrel{?}{=} \frac{k+1}{2}(2a+(k+1-1)d)$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k}(a+(j-1)d)}_{\text{Summe bis Endwert } k} + \underbrace{(a+(k+1-1)d)}_{(k+1)\text{-er Summand}} \stackrel{?}{=} \frac{k+1}{2}(2a+kd)$$

$$\underbrace{\frac{k}{2}(2a+(k-1)d)}_{\text{mit } P(k)} + (a+kd) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(2a+kd)}{2}$$

$$\frac{k(2a+(k-1)d)+2(a+kd)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2ka+k^2d+2a+kd}{2}$$

$$\frac{2ka+2a+k^2d+kd}{2} = \frac{2ka+2a+k^2d+kd}{2} \checkmark$$

Die Umformungen führt zu einem richtigen Resultat. Damit ist der Beweis erbracht. ◁

23.6 Übung Man zeige induktiv, dass $3^n > 100n$ für $n > 5$. Jetzt ist die Verankerung beim kleinsten zugelassenen Wert, nämlich $n = 6$.

I. Verankerung: $3^6 > 600$ stimmt, weil $3^6 = 729$.

II. Voraussetzung: $3^n > 100n$

III. Induktionsschritt: $3^{n+1} \stackrel{?}{>} 100(n+1)$.

$$3^{n+1} > 100(n+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 \cdot 3^n > 100n + 100$$

Die wahre Voraussetzung können wir umschreiben als

$$3 \cdot 3^n > 3 \cdot 100n$$

Die Induktion ist richtig, wenn $3 \cdot 100n > 100n + 100$ für $n \geqslant 6$. Es gilt

$$3 \cdot 100n > 100n + 100 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3n > n+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2n > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad n > 1/2.$$

Da ja $n > 5$ sein muss, stimmt die Behauptung. ◁

23.7 Übung Wir wollen die sogenannte Bernoulli-Ungleichung mit vollständiger Induktion beweisen. Sie lautet für $h > -1$ ohne null und für $n > 1$: $(1+h)^n > 1 + nh$.

I. Verankerung: $(1+h)^2 > 1 + 2h$ ist erfüllt, weil $(1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$ oder $h^2 > 0$.

II. Voraussetzung: Behauptung

III. Induktionsschritt: $(1+h)^{n+1} \stackrel{?}{>} 1 + (n+1)h$.

Wir nehmen die Behauptung und multiplizieren sie mit $(1+h)$. Die Ordnungsrelation bleibt erhalten, weil $(1+h) > 0$ aus der Voraussetzung. Damit folgt

$$(1+h)(1+h)^n > (1+nh)(1+h) = 1 + h + nh + nh^2 = 1 + (n+1)h + nh^2$$

oder

$$(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h+nh^2 > 1+(n+1)h$$

und somit

$$(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h$$

Damit ist der Beweis erbracht. ◁

Formel 23.8. Bernoulli-Ungleichung Für $h > -1$ ohne Null und $n > 1$ gilt:

$$(1+h)^n > 1+nh$$

23.3.2 Rekursive Folge

23.9 Übung Man finde einen geschlossenen Ausdruck für die durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 2a_n+1$ rekursiv definierte Folge.
Wir berechnen die ersten Glieder und finden $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$ und $a_5 = 31$. Da in der Rekursion der Faktor 2 bei $2a_n$ vorkommt, ist anzunehmen, dass die Direktformel die Form $2^x + y$ aufweist. Man kann sehen, dass $a_n = 2^n - 1$ gelten muss, denn alle Glieder sind um 1 verringerte 2-er Potenzen. Nun nimmt die Untersuchung ihren Lauf:

I. Verankerung: $a_1 = 1 = 2 - 1$,

II. Voraussetzung: $a_n = 2^n - 1$

III. Induktionsschritt: $a_{n+1} \stackrel{?}{=} 2n + 1 - 1$.

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1\checkmark$$

Wir haben in die Rekursionsformel für $n+1$ einfach die Voraussetzung eingesetzt. ◁

23.10 Übung Gegeben ist die Folge $a_n = \sqrt{a_n + 6}$. Man zeige durch vollständige Induktion, dass die Folge a_n streng monoton steigend ist, d.h. $a_{n+1} > a_n$. Es ist $a_0 = 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

I. Verankerung: $a_1 = \sqrt{a_0 + 6} = \sqrt{7} > a_0 = 1$ gilt,

II. Voraussetzung: $a_n > a_{n-1}$

III. Induktionsschritt: $a_{n+1} \stackrel{?}{>} a_n$.

$$a_n > a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad a_n + 6 > a_{n-1} + 6 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a_n + 6} > \sqrt{a_{n-1} + 6}$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n$$

Damit sind wir fertig. ◁

23.4 Finanzanwendungen**

23.4.1 Zins und Zinseszins

Der *Zins* ist der Preis für die Überlassung von Kapital. Der Preis wird meist in Prozent (von Hundert) und pro Jahr angegeben und nennt sich *Zinssatz*. Die Hingabe von Kapital mit späterer Rückzahlung nennt sich *Darlehen*.

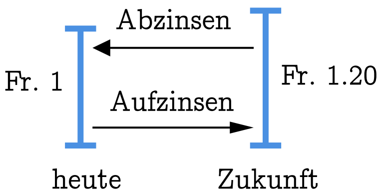
23.1 Übung Jemand überlässt der Bank 100,000.00 CHF zu einem Jahreszins von 2%, so erwartet diese Person eine Rückzahlung von 100,000.00 plus Zins von $0.02 \times 100,000.00 = 2'000.00$ in einem Jahr. Wird in einem Jahr das Darlehen um ein Jahr zu denselben Bedingungen verlängert, dann erwartet man $100,000.00 \times (1+0.02)^2 = 104,040.00$. ◁

Formel 23.2. Das Kapital nach t Jahren ist K_t:

$$K_t = K_0(1+z)^t$$

mit Jahres-Zinssatz z und Anfangskapital K_0.

Zeittransformation



Die Verzinsung stellt eine Zeittransformation dar, indem der heutige Werte in die Zukunft gerechnet werden kann und umgekehrt künftige Zahlungen auf heutige Werte umgerechnet werden können. Ein heutiger Franken oder Euro ist vielleicht 1.2 Franken oder Euro in der Zukunft. Anderseits ist ein künftiger Franken nur 1/1.2 oder 0.83 heutige Franken wert.

Definition 12. Der Term $(1+z)^t$ nennt sich *Aufzinsfaktor* v^t, sein Reziprokes v^{-t} ist der *Abzins*- oder *Diskontfaktor*.

Je nach Gepflogenheit und Markt kann es sein, dass der Zins nicht jährlich sondern mehrmals während des Jahres bezahlt wird. Wenn z der Jahreszins sein soll, und h Mal pro Jahr bezahlt wird, dann rechnet man wie folgt:

Formel 23.3.

$$K_t = K_0\left(1+\frac{z}{h}\right)^{th}$$

h nennt man Frequenz.

23.4 Übung Wir rechnen nochmals das Endkapital wie oben, diesmal aber mit $h = 2$ und $h = 4$. Somit

$$K_t = 100,000.00 \cdot 1.02^2 = 104,040.00$$
$$K_t = 100,000.00 \cdot 1.01^4 = 104,060.40$$
$$K_t = 100,000.00 \cdot 1.005^8 = 104,070.70$$

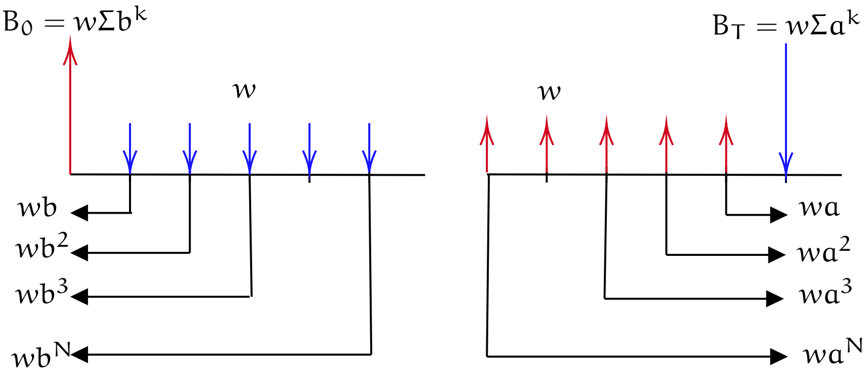
Die wirkliche Verzinsung hängt also von Zinssatz und Häufigkeit ab. Mit der bekannten Forme von Euler, d.h. $\lim_{h\to\infty}(1+z/h)^h = e^z$ folgt der kontinuierliche Zinssatz zu

$$K_t = K_0 \cdot e^{zt}$$

Dies ist die Lieblingsdarstellung der Finanzmathematiker. ◁

23.4.2 Annuität

Die Annuität ist ein Strom regelmässiger, konstanter Zahlungen bis zum Laufzeitende, durch die ein Darlehen getilgt, d.h. zurückbezahlt, wird. Die Annuität ist für Personen geeignet, die Kapital in regelmässige Zahlungen verwandeln und dabei auf dem austehenden Darlehen Zinsen verdienen wollen.



Eine gleichmässige, periodische Zahlung bezeichnen wir mit W für total n Perioden zu einem Jahreszinssatz von r p.a. Die Zahlung sei halbjährlich, also $h = 2$. Wir berechen den Wert der Zahlungen, indem wir diese auf heute abzinsen. Der Abzinsfaktor ist $b = 1/(1 + r/h) = 1/(1 + r/2)$. Am Anfang t_0 ist das Kapital B. Es entspricht den abgezinsten Rückzahlungen wb^k. Als Summe und der Formel für die geometrische Reihe folgt

$$B_0 = W\sum_{j=1}^{N} b^j = Wb\sum_{j=0}^{N-1} b^j = Wb\frac{b^N - 1}{b - 1}$$

Das ist eine geometrische Reihe, denn es gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} b^j = \frac{b^k - 1}{b - 1}.$$

Wir setzen anstatt b dafür $1/q$ und später $q = 1 + R$ ein und formen um. Wir erhalten

$$B_0 = W\frac{(1 - \frac{1}{q})^N}{q(1 - \frac{1}{q})} = W\frac{1 - (q)^{-N}}{q - 1} = W\frac{1 - (1 + R)^{-N}}{R}$$

Wir interessieren uns für die Zahlunge W im Verhältnis zu B_0, also W/B_0:

$$\frac{W}{B_0} = \frac{R}{1 - (1 + R)^{-N}} = \frac{R(1 + R)^N}{(1 + R)^N - 1}$$

Formel 23.5. Annuität

$$w = \frac{W}{B} = \frac{R \cdot (1 + R)^N}{(1 + R)^N - 1}.$$

23.6 Übung Herr Bessel ist 65 Jahre alt und möchte für die nächsten 20 Jahre regelmässige Quartalszahlungen von Fr. 15,000.00 (also rund 5,000 pro Monat). Wieviel Kapital muss er zur Verfügung haben, wenn der Jahreszinssatz 3% ist? Wir kennen also $W = 15,000$, den Periodenzinssatz $R = 0.03/4 = 0.0075$ und die Anzahl Perioden $N = 20 \cdot 4 = 80$. Somit

$$B = W \cdot \frac{(1 + R)^N - 1}{R \cdot (1 + R)^N} = 15000\frac{(1.0075)^{80} - 1}{0.0075 \cdot (1.0075)^{80}} = 899916.60 \approx 900,000$$

Das ist ein Haufen Geld und nach 20 Jahren ist man blank. ◁

23.7 Übung Angenommen Frau Nöther ist 25 Jahr jung und möchte jeden Monat Fr. 50 zu 2% anlegen bis sie 65 ist. Wieviel wird das Endkapital sein? Der Aufzinsfaktor nennen wir $a = 1 + R/h$.
In t_0 ist $B(t_0) = 50$, in t_1 dann $a50 + 50$ in $t_2 = a(50 + a50) + 50$ und allgemein in t_k: $50a(1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1})$. Wieder sehen wir die geometrische Reihe, die N Perioden umfasst. Es ist $\sum_{k=0}^{N-1} a^k = (1 - a^N)/(1 - a)$. Somit folgt mit $R = 0.02/12 \approx 0.00667$ und $N = 40 \cdot 12 = 480$

$$B(t_N) = Wa\frac{a^N - 1}{a - 1} = 50 \cdot 1.00667\frac{1.00667^{480} - 1}{0.00667} = 175,918$$

Wieviel müsste sie sparen, wenn sie dereinst 900,000 gespart haben möchte? Die Rechnung ist proportional, d.h. $W = 50 \cdot 900/176 = 256$. Damit könnte man sich die Rente vom vorhergehenden Beispiel finanzieren. ◁

Formel 23.8. Endwert

$$B(t_N) = Wa\frac{a^N - 1}{a - 1} = W(1 + R)\frac{(1 + R)^N - 1}{R}$$

Pensionskassen in der Schweiz zahlen den Rentnern nach Renteneintrittssalter und dem angesparten Alterguthaben A, monatlich einen Zwölftel des mit dem Umwandlungssatz u multiplizierten Altersguthaben. Dazu bekommt der Rentner noch die gesetzliche Rente von maximal Fr 2,390 Franken im Monat für Einzelpersonen (und 3,585 für Ehepaare). Renten unterliegen der Einkommenssteuer.
Der Umwandlungssatz betrage $u = 5.35\%$. Damit ergibt sich eine monatliche Rente von $W = u \cdot A/12$. Der Zinssatz wird zu $r = 0.02 = 2\%$ angenommen. Die Restlebenserwartung für Männer im Alter von 65 Jahren beträgt laut Sterbetafel 20.0 Jahre, für Frauen 22.7.

23.9 Übung Wir vergleichen w aus der Annuität mit einem Altersguthaben von 100000, also $w_p = 100000 \cdot u/12$ aus der Pensionskassenregelung, zuerst für Männer mit $N = 20 \cdot 12 = 240$:

$$w = \frac{R(1 + R)^N}{(1 + R)^N - 1} = \cdot\frac{\frac{2}{12}(1 + \frac{2}{12})^{240}}{(1 + \frac{2}{12})^{240}) - 1} = 0.001667\frac{1.45}{0.45} = 505.9/100000$$

Die Pensionskasse hingegen zahlt $w_p = 0.0535 \cdot 100000/12 = 445.6$. Somit ist ein recht tiefer Zinssatz hinterlegt oder eine Langlebigkeitsreserve enthalten oder hohe Vewaltungsgebühren erlaubt. Für Frauen müsste man $N = 259$ in Ansatz bringen, woraus dann eine monatliche Zahlung von 458.6 resultiert. ◁

Weiter unten stellen wir eine genauere Berechnung als Leibrente an.

23.10 Übung Ein Sparplan sieht die monatliche Einlage von EUR 100 vor. Was ist der Endwert in 25 Jahren bei einem Zinssatz von 4%? Wie lange dauert es, bis man 25,000.00 EUR zusammen hat?
Der Endwert ist gemäss Formel 23.8 folgender:

$$B(t_N) = 100(1.003333)\frac{(1.003333)^{25\cdot 12} - 1}{0.003333} = 51581$$

Für die zweite Fragestellung müssen wir nach N auflösen:

$$\log\left[\frac{B_T \cdot R}{W(1 + R)} + 1\right] = N\log(1 + R)$$

und

$$N = \log\left[\frac{B_T \cdot R}{W(1+R)} + 1\right] / \log(1+R)$$

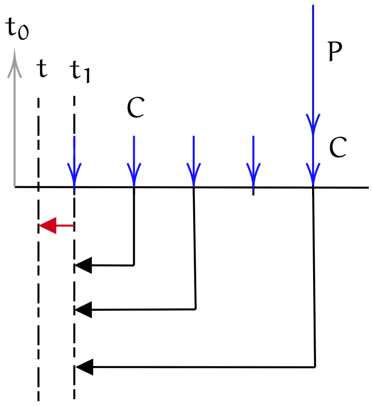
Wir setzten ein

$$N = \log\left[\frac{25000 \cdot 0.003333}{100.3333} + 1\right] / \log(1.003333) = \ln(1.830)/0.00333 = 181.7 \approx 15a.$$

Man erkennt den Zinseszinseffekt daran, dass man 15 Jahre für die erste Hälfte (ca. 25,000) braucht und nur noch 10 für die zweite Hälfte. ◁

23.4.3 Schuldverschreibung

Eine *Schuldverschreibung*, *Anleihe* oder *Obligation* ist ein Wertpapier, das dem Anleger regelmässige Zinszahlungen und bei Endfälligkeit das Kapital zurückzahlt.



Wir betrachten die bei uns üblichen jährlichen Zahlungen. Der Ausgabewert ist meist um 100 herum. Das Papier verspricht an den n Zinstagen eine Zahlung von C und zur Endfälligkeit dann $P + C$. Wir interessieren uns für den Barwert im Zeitpunkt t, der zwischen Ausgabe und einer Zinszahlung liegen kann.
Den Wert bestimmt man, indem man auf den nächsten Zinstag, hier t_1 abzinst und dann diesen Wert wiederum auf t abzinst. Formelmässig:

$$B(t_1) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{C}{(1+r)^j} + \frac{P}{(1+r)^{N-1}}$$

und dann

$$B(t) = B(t_1) \cdot (1+r)^{-(t_1-t)}$$

Formel 23.11. Wert Obligation

$$B(t) = \frac{1}{(1+r)^{(t_1-t)}} \cdot \left[\sum_{j=0}^{N-1} \frac{C}{(1+r)^j} + \frac{P}{(1+r)^{N-1}}\right]$$

23.12 Übung Die Obligation zahle einen sogenannten Coupon $C = 3.25$ auf ein Kapital von $P = 100$. Es sind noch $n = 15$ Zahlungen ausstehend, wobei die nächste in 91 Tagen erfolgt. Der allgemeine Zinssatz ist 4.5%. Den ersten Term schreiben wir als geometrische Reihe

$$X_1 = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{C}{(1+r)^j} = C \sum_{j=0}^{N-1} a^j = C\frac{1-a^N}{1-a} = C \cdot \frac{1+r}{r}(1-(1+r)^{-N})$$

Mit Zahlen

$$X_1 = 3.25 \cdot 23.22 \cdot (1 - 1.045^{-15}) = 3.25 \cdot 23.22 \cdot 0.483 = 36.45$$

Der zweite Term $X_2 = 100 \cdot (1.045)^{-14} = 100 \cdot 0.54 = 54$. Somit ist der Barwert zu t_1 gleich $54 + 36.45 = 90.45$. Diesen Wert müssen wir noch abzinsen mit

$$(1+r)^{-\frac{91}{365}} = 1.045^{-0.25} = 0.9891$$

Somit ist der Wert der Anleihe $0.9891 \cdot 90.45 = 89.46$. Der Wert bei der Ausgabe ist meist bei 100. Das bedeutet, dass der Coupon C nahe beim Marktzinssatz r ist. Wenn plötzlich Inflation einsetzt, steigt der Marktzinssatz. Das führt zu einem Sinken des Anleihewertes. Nehmen wir an, $C = 4.5$. Dann ist $X_1 = 4.5 \cdot 23.22 \cdot 0.483 = 50.47$ und mit X_2 zusammen 104.47 und mit 0.9891 mal genommen 103.33. Bei der Preisangabe ("clean price") wir auch der schon aufgelaufene Zins wieder abgezogen, d.h. $3/4 \cdot 4.5 = 3.38$, und damit 99.95. Es sind 3/4, weil die nächste Zinszahlung in einem Vierteljahr (91 Tage) stattfindet. $\triangleleft$

23.4.4 Lebensversicherung

Die Todesfallversicherung ist die einfachste Lebensversicherung. Stirbt der Versicherungsnehmer in einem vorbestimmen Zeitraum, so wird den Hinterbliebenen eine feste Summe ausbezahlt. Stirb er oder sie nicht, so wird nichts bezahlt. Die Prämie für eine solche Versicherung wird zu Beginn in einer Summe oder periodisch bezahlt. Die Sterbewahrscheinlichkeit wird aus den sogenannten Sterbetafeln ermittelt. Die Prämie orientiert sich an der zu erwartenden Auszahlung.

Sterbetafel

Sterbetafeln gibt es für Frauen und Männer, für das aktuelle Jahr und für Staaten oder Bundesländer. Der Aufbau ist ziemlich standardisiert. Als Beispiel nehmen wir die Sterbetafel der Männer für das Jahr 2019 (siehe Tab. 23.2 auf Seite 23-26). Es bedeutet:

- x: Alter der Person (des Mannes, y Alter der Frau),
- l_x: Anzahl Personen, die das Alter x erreichen.

Zudem wird mit ω das höchste Alter der Tafel benannt, hier $\omega = 99$. Mit diesen Angaben kann man verschiedene Kennzahlen berechnen, etwa:

(1) $d_x = l_{x+1} - l_x$ Anzahl Personen, die im x-ten Lebensjahr sterben,

(2) $p_x = \dfrac{l_{x+1}}{l_x}$ Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, das nächste Jahr zu erleben.

(3) $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, im Alter x zu sterben.

(4) $e_x = \dfrac{1}{l_x} \displaystyle\sum_{k=x}^{\omega} l_k - 0.5$ Durchschnittliche Lebenserwartung im Alter x

23.13 Übung Wir gross ist die Wahrscheinlichkeit eines 45- und eines 65-Jährigen, älter als 95 zu werden? Die Überlebenden sind l_{96}, also 6779. Die 45-Jährigen sind 98043 und die 65-Jährigen 90813. Somit sind die Wahrscheinlichkeiten $P_{45} = 6779/98043 = 6.91\%$ und $P_{65} = 6779/90813 = 7.46\%$. Die Wahrscheinlichkeit ist für die älteren höher, weil keine von ihnen schon früher gestorben sind. $\triangleleft$

Todesfallversicherung

Mit der Sterbertafel lassen sich jetzt (vereinfacht) die Todesfallversicherung berechnen.

23.14 Übung Angenommen ein 45-Jähriger Familienvater möchte seine 3 Kinder und die Ehefrau zusätzlich zur obligatorischen Versicherung abdecken und zwar für den Fall, vorzeitig zu sterben. Sein jüngstes Kind ist 15 und der Vater denkt, dass in 10 Jahren alle für sich selber sorgen können. Also schliesst er eine Todesfallversicherung für 10 Jahre ab. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zwischen 55 und 45 zu sterben? Es sind durchschnittlich 98043 45-Jährige am leben, davon überleben 95826 das 55.-Altersjahr (l_{56}). Die Sterbewahrscheinlichkeit ist also $P = \frac{98043-95826}{98043} = 2.26\%$. Die Prämie π wird als $P \cdot \lambda$ bestimmt, wobei hier $\lambda = 1.4$ angenommen wird, also $\pi = 3.17\%$. Wieviel soll er versichern? Es werden häufig 3 bis 5 Bruttojahresgehälter angesetzt, beispielsweise $\text{Fr}.400,000.00$. Seine Prämie ist also Fr. 12,663. Das ist nicht so viel wie es erscheinen mag. ◁

Leibrente

Wir haben in Übung 23.9 auf Seite 23-18 die Rente mit der mittleren Restlebenserwartung angenommen.

Nun können wir aus der Sterbetafel auch die sogenannten "diskontierte Zahl der Lebenden" D_x bestimmen mit $b = (1+r)^{-1}$ als Abzinsfaktor, nämlich $D_x = l_x b^x$. Summiert bis zum Tafelende ω: $\sum_{k=x}^{\omega} l_x b^x$ und bezogen auf die in x Lebenden D_x folgt

$$n_x = \sum_{k=x}^{\omega} \frac{l_k}{l_x} b^{-(k-x)}$$

Das ist der Wert einer regelmässigen jährlichen Zahlung von einer Geldeinheit zum Alter x. Damit ist $1/n_x$ eine Art Umwandlungssatz. Wir berechnen aus der Tabelle mit einem kleinen Programm oder einem Spreadsheet $n_x = 16.72259$ und $1/n_x = 5.98\%$. Verglichen mit dem Beispiel oben, d.h. dem Umwandlungssatz 5.35% hat der Anbieter doch eine rechte Reserve.

Aufgaben

4.15 Bestimme

(a) $\sum_{j=0}^{5} 2^j$ **(b)** $\sum_{k=0}^{2} (3k-5)x^k$ **(c)** $\sum_{n=1}^{100} (-1)^n$ **(d)** $\sum_{n=1}^{5} \frac{(n+1)!}{n!}$

15 **(a)** Ist $1+2+4+8+16+32=63$, oder geometrische Reihe, $s_n=(2^{5+1}-1)(2-1)=64-1=63$.

(b) Ausgeschriebene 3 Terme $[(-5)1]+[(3-5)x]+[(6-5)x^2]=-5-2x+x^2$.

(c) Die Glieder sind $-1+1+-1+\ldots+1$, also zusammen resultiert $s=0$.

(d) Anstatt $\frac{(n+1)!}{n!}$ kann man auch schreiben $\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{(n+1)(n)!}{n!}=n+1$. D.h. $\sum_{n=1}^{5}(n+1)=\sum_{n=1}^{5} n+\sum_{n=1}^{5} 1=\frac{5\cdot 6}{2}+5=20$.

4.16 Schreibe in Summennotation und berechne

(a) $1+4+7+\ldots+295$ **(b)** $1+2+4+\cdots+2^{29}$ **(c)** $-\ln(3)+\ln(4)-\ln(5)+\cdots+\ln(20)$

(d) $\sum_{n=1}^{10} -2n+\left(\frac{5}{3}\right)^n$ **(e)** $4+2+0-2-\ldots-146$ **(f)** $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+-\cdots+\frac{3}{256}$

16 **(a)** Arithmetische Reihe mit $d=3$ und $294/3=98$ Differenzen und 99 Gliedern. Summe $s_n=\frac{(a_n+a_1)n}{2}=\frac{296\cdot 99}{2}=14652$. Als Summe $\sum$

(b) Geometrische Reihe mit $q=2$ und 30 Gliedern (Index $\{0,1,\ldots,29\}$). Summe $s=\frac{2^{30}-1}{2-1}=$ kann man schreiben als $\sum_{k=1}^{30} 2^{k-1}$

(c) $\sum_{k=3}^{20} (-1)^k \ln(k)$

(d) $\sum_{n=1}^{10} -2n+\left(\frac{5}{3}\right)^n$ umschreiben als $-2\sum_{n=1}^{10} n+$. Erster Term arithmetische Reihe: $-2\cdot 11\cdot 10/2=-110$. Zweiter Term geometrisch $s=5/3\frac{(5/3)^10-1}{5/3-1}=(5/2)((5/3)^10-1)=410.95$, zusammen $410.95-110=310.95$. (Die Formel für die geometrische Reihe beginn mit $1+q+\ldots q^{n-1}$. Im Beispiel beginnt die Folge mit q. Deshalb haben wir zuerst q ausgeklammert und dann die Standardformel angewendet.)

(e) Die ersten zwei Terme ergeben 6. Dann bleibt die Reihe $-(0+2+4+\ldots 146)$. Das sind 74 Summanden, denn $74=146/2+1$. Die arithmetische Reihe hat den Wert $(146+0)\cdot 74/2=5402$. Zusammen $6-5402=5396$.

(f) Die Folge $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+-\cdots+\frac{3}{256}$ schreiben wir um, indem wir nach Vorzeichen zusammenfassen: $3(1+1/4+1/16+1/64+1/256)-3/2(1+1/4+1/16+1/64)$ und weiter $3/2(1+1/4+1/16+1/64)+3/256=6(64+16+4+1)/256+3/256=(384+96+24+6+3)/256=513/256$.

4.17 Schreibe die Summen als Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{10} 5n+3$ **(b)** $\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ **(c)** $1+3+9+\ldots+2187$

17 **(a)** $\sum_{n=1}^{10} 5n+3$ kann umschreiben als $5\sum_{n=1}^{10} n+3\sum_{n=1}^{10} 1$. Der zweite Term ist einfach $3\cdot 10=30$, der erste $5\cdot\frac{(n+1)n}{2}=5\cdot\frac{110}{2}=5\cdot 55=275$, zusammen $275+30=305$.

(b) Das ist eine geometrische Reihe mit $s_n=\frac{(\frac{3}{2})^5-1}{\frac{3}{2}-1}=2((\frac{3}{2})^5-1)=2[\frac{243}{32}-1]=2[\frac{211}{32}]=\frac{422}{32}=\frac{211}{16}$

(c) $1+3+9+\ldots+2187$ ist eine geometrische Reihe mit $q=3$. (Aus $3^n=2187$ folgt $n=\ln(2187)/\ln(3)=7$). Damit $s_n=1\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{3\cdot 2187-1}{2}=3280$. Achtung: Die hergeleitete Formel ging von den Indizes $\{1,2\ldots n\}$ aus. Hier haben wir $n+1$ Glieder.

4.18 Ein Pilger wandert zum 800km entfernten Wallfahrtsort. Am ersten Tag legt er 60km zurück, am nächsten nur noch 56km. Seine Etappen bilden eine geometrische Folge, da seine Kräfte von Tag zu Tag schwinden. Wann kommt er an und wann ist er wieder zurück?

18 Die Funktion hat folgendes Aussehen: $a_n = a_{n-1} \cdot q$ oder $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ mit $a_1 = 60$. Für q gilt $56/60 = 14/15$ Die Summe ist $s_n = a_1 \frac{1-(14/15)^n}{1-(14/15)}$ und die Anzahl Tage folgen aus $s_n \geqslant 800$. Also $60\frac{1-(14/15)^n}{1-(14/15)}$ oder $15 \cdot 60(1-(14/15)^n) \geqslant 800$ oder $900(1-(14/15)^n \geqslant 800$, weiter $1-(14/15)^n \geqslant 8/9$ und $-(14/15)^n \geqslant 8/9 - 1$. Mit (-1) multiplizieren und die Relation umdrehen $(14/15)^n \leqslant 1 - 8/9$. Daraus folgt $n \leqslant \ln(1/9)/\ln(14/15) = -2.20/-0.07 = 31.85$. Er braucht 31 Tage.
Für die Zurückkunft muss man anstatt 800 nun 1600 setzen (oder die 8 mit einer 16 vertauschen). Also $(14/15)^n \leqslant 1 - 16/9$. Nun haben wir ein Problem, denn Logarithmen von negativen Zahlen existieren nicht, hier $\ln(-7/9)$. Denn der Grenzwert der Reihe ist $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-14/15} = 15$. Mit a_1 multipliziert gibt 900km, weiter kommt er nicht.

4.19 * Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für jede natürliche Zahl n ist $4n^3 - n$ durch drei teilbar [5/75].

19 Wir gehen schematisch vor, es liegt eine Direktformel vor.

- Verankerung: $n = 1$: $4 - 1 = 3$ ist durch 3 teilbar.
- Voraussetzung a_n ist durch 3 teilbar.
- Induktionsschritt: $a_{n+1} = a_n + \Delta$ mit $\Delta = 4(n+1)^3 - (n+1) - 4n^3 + n = 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) - 4n^3 + n$

und

$\Delta = 4(n^3+3n^2+3n+1)-(n+1)-4n^3-n = 4\check{n}^3+12n^2+12n+4)\check{n}-1-4\check{n}^3+\check{n} = 12n^2+12n+3$

Alle Koeffizienten von Δ, 12, 12, 3, und Terme sind Vielfache von 3. Somit ist die Differenz wie a_n durch 3 teilbar, und somit auch die Summe.

4.20 * Finden Sie eine Formel für die folgende Summe und beweisen Sie diese mit Vollständiger Induktion [5/70]: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

20 Es handelt sich um eine geometrische Reihe, denn eine Glied ist immer der Wert des Vorgängers mal 2. Dafür kennen wir die Summenformel. Aber Achtung: hier läuft der Index von 0 bis n, es sind also $n + 1$ Glieder. Damit ist die Summenformel $s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Der Wert q ist 2.

I. Verankerung: $s_0 = \frac{2-1}{2-1} = 1$

II. Voraussetzung $s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

III. Induktionsschritt: $s_{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

$$\begin{aligned} s_{n+1} = s_n + q^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+(q-1)q^{n+1}}{q-1} \\ &= \frac{q^{\check{n}+1}-1+q^{\check{n}+1}-q^{n+1}}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \checkmark \end{aligned}$$

4.21 * Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Finden Sie die explizite Definition dieser Folge und beweisen Sie diese mit Hilfe der Methode der Vollständigen Induktion.

21 Als erstes schreiben wir ein paar erste Glieder aus: $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, $a_4 = 17$ und $a_5 = 33$. Die Differenzen sind $2, 4, 8, 16$ also Potenzen von 2. Schon die Rekursionsformel mit dem Term $2a_n$ legt eine 2-Potenz nahe. Wir versuchen $a_n = 2^x + y$ und testen $x = n$ und $y = 1$, also $a_1 = 211 = 3$ stimmt, $a_2 = 2^2 + 1 = 5$ stimmt, $a_3 = 2^3 + 1 = 9$ stimmt auch. Nun induktiv

I. Verankerung: $a_1 = 2^1 + 1 = 3$ stimmt.

II. Voraussetzung: $a_n = 2^n + 1$

III. Induktionsschritt: $a_{n+1} \stackrel{?}{=} 2^{n+1} + 1$

Wir setzen in die Rekursionsformel die Voraussetzung ein:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - 1 = 2 \cdot (2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 2 - 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \checkmark \end{aligned}$$

4.22 Man beweise mit vollständiger Induktion, dass die folgende Behauptung gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

22 I. Verankerung:

$$\sum_{j=1}^{1} j^2 = \frac{(1)(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1^2 = 1 \checkmark$$

II. Voraussetzung: die obige Behauptung

III. Induktiosschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} j^2 &\stackrel{?}{=} \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \\ \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \underbrace{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}_{\text{aus Voraussetzung}} + (k+1)^2 &\stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} &\stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} &\stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} &\stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} &\stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \checkmark \end{aligned}$$

Aus der Induktion folgt, dass $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ wahr ist für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$.

Tabelle 23.1: Sterbetafel Männer 2019 Schweiz (Quelle: BfS)

x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	100000	25	99196	50	97327	75	78012
1	99660	26	99154	51	97136	76	76075
2	99644	27	99112	52	96926	77	73970
3	99632	28	99071	53	96692	78	71683
4	99620	29	99030	54	96434	79	69199
5	99607	30	98988	55	96146	80	66504
6	99597	31	98947	56	95826	81	63586
7	99588	32	98905	57	95470	82	60435
8	99581	33	98862	58	95074	83	57044
9	99575	34	98817	59	94633	84	53414
10	99570	35	98770	60	94144	85	49550
11	99565	36	98721	61	93601	86	45472
12	99561	37	98669	62	93000	87	41211
13	99556	38	98613	63	92338	88	36818
14	99549	39	98552	64	91610	89	32358
15	99538	40	98485	65	90813	90	27914
16	99524	41	98413	66	89944	91	23578
17	99503	42	98333	67	88999	92	19453
18	99477	43	98245	68	87974	93	15637
19	99445	44	98149	69	86864	94	12215
20	99407	45	98043	70	85663	95	9251
21	99367	46	97926	71	84364	96	6779
22	99324	47	97797	72	82961	97	4797
23	99281	48	97656	73	81442	98	3273
24	99238	49	97499	74	79797	99	2153

Tabelle 23.2: Sterbetafel Frauen 2020 Schweiz (Quelle: BfS)

y	l_y	y	l_y	y	l_y	y	l_y
0	100 000	25	99 399	50	98 260	75	85 983
1	99 666	26	99 384	51	98 138	76	84 583
2	99 649	27	99 369	52	98 005	77	83 029
3	99 637	28	99 353	53	97 859	78	81 303
4	99 627	29	99 336	54	97 699	79	79 383
5	99 617	30	99 319	55	97 524	80	77 245
6	99 610	31	99 300	56	97 331	81	74 863
7	99 603	32	99 280	57	97 119	82	72 209
8	99 598	33	99 258	58	96 884	83	69 251
9	99 594	34	99 234	59	96 626	84	65 959
10	99 590	35	99 208	60	96 340	85	62 301
11	99 586	36	99 179	61	96 023	86	58 259
12	99 582	37	99 148	62	95 674	87	53 831
13	99 578	38	99 112	63	95 287	88	49 040
14	99 571	39	99 073	64	94 860	89	43 945
15	99 562	40	99 030	65	94 388	90	38 637
16	99 549	41	98 982	66	93 869	91	33 247
17	99 533	42	98 929	67	93 295	92	27 934
18	99 515	43	98 870	68	92 664	93	22 874
19	99 497	44	98 805	69	91 968	94	18 234
20	99 479	45	98 733	70	91 200	95	14 146
21	99 462	46	98 654	71	90 354	96	10 682
22	99 445	47	98 568	72	89 420	97	7 850
23	99 430	48	98 474	73	88 388	98	5 612
24	99 414	49	98 372	74	87 247	99	3 898

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

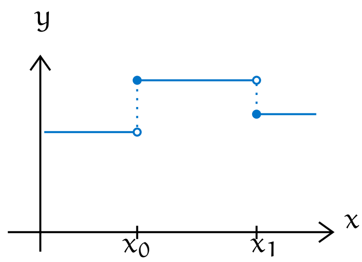
- den Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff für Funktionen intuitiv darstellen
- Grenzwerte von Funktionen bestimmen
- die Asymptoten einer Funktion definieren und bestimmen
- den Grenzwertbegriff einer Funktion in einem Punkt und im Unendlichen definieren und erklären
- die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt und in einem Intervall definieren und erklären

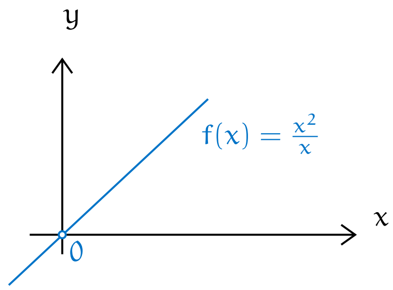
Kapitel 24

Stetigkeit und Grenzwerte

24.1 Stetigkeit

Das deutsche Wort “stetig” bedeutet kontinuierlich, zusammenhängend, ohne Unterbrechung. Umgekehrt bedeutet also unstetig, dass ein Ding Risse, Spalten, Trennungen aufweist.
Wenn wir an Funktionen denken, so drängen sich zwei Situationen auf: Erstens gibt es eine Lücke im Definitionsbereich, also bei der unabhängigen Variablen x. Zweitens gibt es einen Sprung im Wertebereich, also in y. In der folgenden Abbildung sieht man die typischen Fälle. Links die Sprüngen und rechts die Definitionslücke in $x = 0$. Der Definitionsbereich der Funktion $\frac{x^2}{x}$ ist also $D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$.





Eine etwas vage Definition von Stetigkeit als Kontraposition zu Unstetigkeit könnte lauten:

Definition 13. Eine Funktion, beziehungsweise deren Graph, ist stetig, wenn verschwindend kleine Änderungen des Argumentes x nur zu verschwindend kleinen Änderungen des Funktionswertes $f(x)$ führen (keine “Sprünge” im Graphen) oder keine Definitionslücken bestehen.

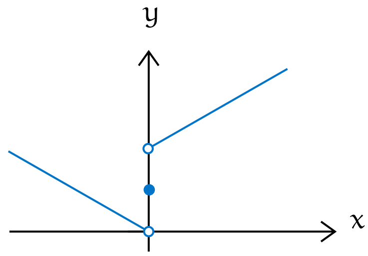
Anmerkung 24.1. Eine *Definitionslücke* ist ein Wert von x für den kein Wert $f(x)$ definiert ist. In diesem Sinne sind alle Nullstellen des Nenners einer rationalen Funktion Lücken, denn die Division durch Null ist nicht definiert.

24.1.1 Beispiele

Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion $f(x)$ nach folgender Vorschrift:

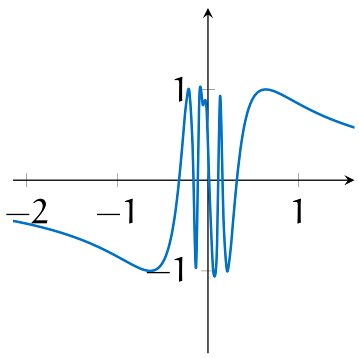
$$f(x) = \begin{cases} -x & \textit{falls} \quad x < 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad x = 0 \\ x + 2 & \textit{falls} \quad x > 0 \end{cases}$$

Die so definierte Funktion $f(x)$ hat keine Definitionslücke. Um die Stelle $x = 0$ gibt es zwei Sprünge mit endlicher Höhe. Hier spricht man von beidseitiger, also linksseitiger und rechtsseitiger Sprungstelle. (Man kann sich vorstellen, dass der Sprung vom leeren Kreis zum vollen stattfindet.)



Wir betrachten die Funktion

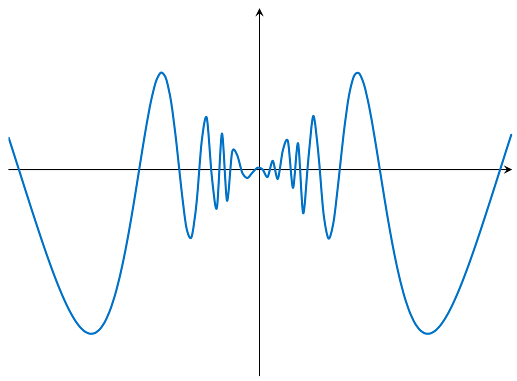
$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \textit{falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{falls} \quad x = 0 \end{cases}$$



Wenn man diese Funktion in ein Graphik-Programm eingibt, so erhält man die Kurve links. In der Umgebung von $x = 0$, das ohnehin ausgenommen werden muss wegen der undefinierten Division durch 0, nimmt die Funktion alle Werte des Intervalls $[-1, 1]$ unendlich oft an. Das Argument φ von $\sin(\varphi)$ wir beliebig gross, und und ist deshalb ein beliebiger Teiler von 2π. Das "Problem" ist also mit der Vorschrift $f(x = 0) = 0$ nicht aufgehoben.

Nun betrachten wir die folgenden Funktion, welche die obige mal x ist.

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \textit{falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{falls} \quad x = 0 \end{cases}$$



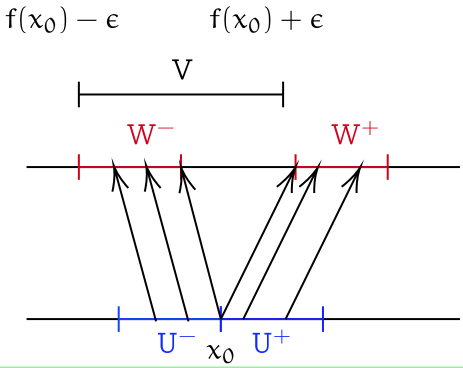
Nun verkleinert sich das Intervall der y-Werte, weil die Multiplikation mit einem immer kleineren Wert x stattfindet, je näher diese dem Nullpunkt kommt. Mit der Setzung $f(x = 0) = 0$ machen wir die Funktion stetig, auch wenn in der Umgebung des Nullpunkts beliebig viele Schwingungen auftreten.

Wir haben also neben den Sprüngen und den Lücken noch ein weiteres Problem erkannt, nämlich beliebig viele Werte in der Umgebung eines Punktes. Dies tritt, wie in unseren zwei Beispielen, bei zyklischen Funktionen wie den trigonometrischen auf, die beliebig viele Werte annehmen können, also Vielfache der Form $\varphi + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$.

24.1.2 Stetigkeit in einem Punkt**

Eine etwas strengere Definition der Stetigkeit in einem Punkt x_0 einer Funktion $f(x)$ lässt sich aus den Umgebungen um x_0 und $f(x_0)$ darstellen. Mit Umgebung sind Zahlenmengen oder Intervalle gemeint.

Wie in der Abbildung dargestellt, befindet sich in x_0 eine Unstetigkeit der Funktion $f(x_0)$. Die Umgebung von x_0 ist U, das Intervall $x_0 \pm \delta$. Das Intervall V ist um den Wert $f(x_0)$ herum gebildet, also $f(x_0) \pm \epsilon$. Anderseits spalten sich die Funktionswerte in die Wertebereiche W^+ und W^- auf. Diese sind als $W = W^+ \cup W^-$ vereint vorstellbar. Damit definiert man Stetigkeit in einem Punkt.
Diese lautet



Definition 14. Eine Funktion $f(x)$ ist stetig in x_0, dann und nur dann, wenn für alle Umgebungen V von $f(x_0)$ die Umgebung U von x_0 existiert, so dass $W \subset V$.

Anmerkung 24.2. Mit dieser Definition sind sowohl Sprünge als auch Lücken erfasst. Ist eine Funktion in einem abgeschlossenen Intervall definiert, so sind an den Rändern einseitige Umgebungen zu betrachten.

Man kann folgende Sätze, hier zusammengefasst beweisen, die lauten:

Satz 24.3. Es gilt:

- Eine Summe in x_0 stetiger Funktionen ist in x_0 stetig,
- ein Produkt in x_0 stetiger Funktionen ist in x_0 stetig und
- sind $f(x_0)$ und $g(x_0)$ in x_0 stetig und ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ stetig.

Daraus folgt die Erkenntnis, dass Polynomfunktionen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

stetig sind, und auch gebrochen rationale Funktionen, ausser an den Nullstellen der Nennerfunktion, wo die Funktion nicht definiert ist.

24.1.3 Stetigkeit in einem Intervall

Definition 15. Eine Funktion ist auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ *stetig*, wenn die Funktion in jedem Wert aus dem Innern des Intervalls stetig und in den beiden Randwerten einseitig stetig ist.

Es gelten folgende Eigenschaften

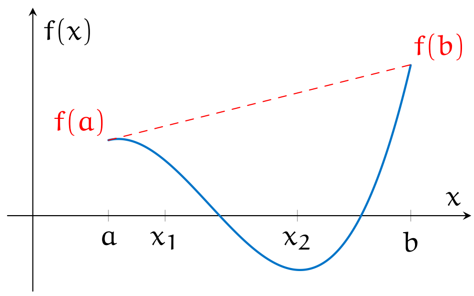
Satz 24.4. Satz vom Minimum und Maximum Eine auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion besitzt dort sowohl eine Maximum als auch ein Minimum.

Satz 24.5. Zwischenwertsatz Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, für die $f(a) = A$ und $f(b) = B$ ist, nimmt in diesem Intervall jeden zwischen A und B gelegenen Wert mindestens einmal an.

Daraus folgt

Satz 24.6. Nullstellensatz Nimmt eine auf einem Intervall stetige Funktion für zwei Argumente x_1 und x_2 dieses Intervalls Werte mit verschiedenem Vorzeichen an, so nimmt die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens einmal den Wert Null an.

Die vorangehenden Sätze kann man sich wie eine Wanderung vorstellen vom Punkt A nach B. Dabei erreicht man jede Höhe zwischen den Punkten mindestens einmal, weil der Weg stetig ist. Dass zwischen einem Punkt mit negativem Funktionswert und einem mit positivem eine Nullstelle sein muss, leuchtet ein. Später werden wir noch sehen, dass die Steigung $(f(b) - f(a))/(b - a)$ ebenfalls einmal an der Kurve anzutreffen ist.



24.2 Grenzwerte

Definition 16. Der *Limes* oder *Grenzwert* einer Funktion $f(x)$ an einer bestimmten Stelle x_0 bezeichnet denjenigen Wert $f(x_0)$, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert.

Anmerkung 24.1. Ein solcher Grenzwert existiert jedoch nicht in allen Fällen. Falls er existiert, dann sagt man, die Funktion *konvergiere*, andernfalls*divergiert* sie.

24.2.1 Limes zu einem Punkt

Es ist g der Grenzwert von $f()$ für $x \to x_0$, wenn die Funktion $\bar{f}(x) = f(x)$ für alle $x \neq x_0$ und $\bar{f}(x_0) = g$.

Definition 17. Man schreibt

$$g = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

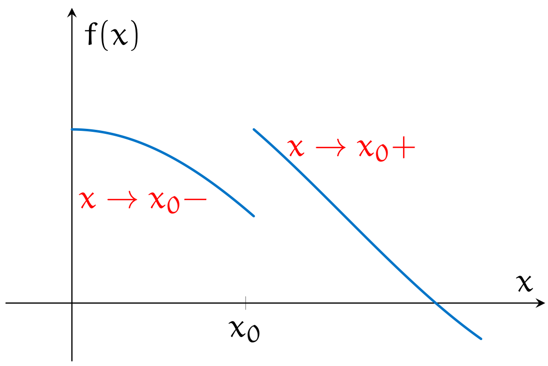
Ist $f(x)$ nur halbseitig stetig, so spricht man von einem linksseitigen oder rechtsseitigen Grenzwert und schreibt:

$$g = \lim_{x \to x_0-} f(x) \qquad \text{respektive} \qquad g = \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

oder (man beachte die Indexpfeile)

$$g = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \qquad \text{respektive} \qquad g = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

Beim linksseitigen Grenzwert befindet sich der Wert in einer Halbumgebung links von x_0, beim rechtsseitigen in einer Halbumgebung rechts. (Die Nomenklatur schwankt, es gibt etwa 5 Bezeichnungen.) Es gibt eine von der Stetigkeit unabhängige Definition des Grenzwerts unter Hinzunahme der Umgebung, wie wir sie schon besprochen haben. Damit lautet der Grenzwert:



Definition 18. Eine Zahl g ist Grenzwert einer Funktion f für $x \to x_0$, wenn zu jeder positiven Zahl ϵ eine positive Zahl η existiert, so dass die Implikation gilt:

$$\Big(0 < |x - x_0| < \eta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x) - g| < \epsilon\Big).$$

Anmerkung 24.2. In dieser Definition kommt der Term $f(x_0)$ nicht vor. Der Grenzwert hängt von der Umgebung um x_0 ab. Der Wert $f(x_0)$ muss nicht existieren, um den Grenzwert zu bestimmen.

Es gibt auch sogenannt *uneigentliche Grenzwerte*, das sind Grenzwerte im Unendlichen. Um auch diese Fälle zu definieren bestimmen wir noch zusätzlich:

Definition 19. Existiert zu jeder Zahl S eine positive Zahl η, so dass

$$\Big(0 < |x - x_0| < \eta\Big) \Rightarrow \Big(f(x) > S\Big)$$

gilt, dann sagt man, $f(x)$ strebe nach ∞ und schreibt $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Analog für

$$\Big(0 < |x - x_0| < \eta\Big) \Rightarrow \Big(f(x) < S\Big)$$

folgt $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

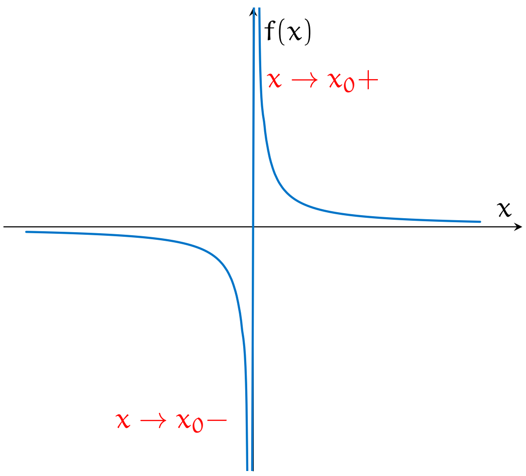


Abbildung 24.1

24.3 Übung Wir betrachten die Funktion $f(x) = 1/x$, wie links abgebildet. Sofort wird ersichtlich, dass in einer Halbumgebung rechts von $x = 0$ und links davon zwei ganz unterschiedliche (uneigentliche) Grenzwerte bestehen.
Der Limes $\lim_{x \to x_0 -} \frac{1}{x}$ ist $-\infty$, wogegen aber $\lim_{x \to x_0 +} \frac{1}{x}$ im Gegensatz dazu ∞ ist. $\triangleleft$

24.4 Übung Es wird gefragt nach einer Funktion $\frac{x^4+6x-1}{x^2-9}$. Für welche Werte x gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)?$$

Es sollte uns sofort die Nullstelle des Nenners ins Auge springen. Bei den Stelle $x = \pm 3$ ist $f(x)$ nicht definiert. Die Grenzwerte sind aber, wenn auch nur uneigentlich, gegeben. $\triangleleft$

Um den Grenzwert einer komplizierten Funktion zu finden, kann es vorteilhaft sein anstatt $x \to x_0$ für $f(x)$ zu suchen, den Limes von $f(x_0 + h)$ mit $h \to 0$ zu bestimmen. Also

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(x_0 + h)$$

24.5 Übung Wir bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

und setzen deshalb

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 1 + h - 2}{1 + h - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} h + 3 = 3$$

Dieses Resultat hätte man anders nicht erwartet. Die ausgeführte Division führt auf die Faktorisierung $(x-1)(x+2)$ für den Zähler, also wird der Bruch zu $x + 2$. An der Stelle $x = 1$ wird dann $x + 2 = 1 + 2 = 3$. $\triangleleft$

24.2.2 Limes ins Unendliche

Wir haben die Grenzwerte für $x \to x_0$ untersucht. Von grossem Interesse sind aber die Grenzwerte, bei denen $x \to \infty$. Wie die Abbildung 24.1 zeigt, werden die Werte für grosse x und $-x$ immer kleiner und nähern sich Null an. Für Funktionen mit unbeschränktem Definitionsbereich gibt es drei Fälle:

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = g$,
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Die Definitionen, zugegebenermassen nicht ganz intuitiv, vermitteln, dass sich mit Näherung an die Konvergenzstelle das Intervall der Funktionswerte ausnahmslos immer kleiner wird.

Definition 20. Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$, wenn zu jeder beliebig klein gewählten positiven Zahl ϵ eine Zahl X so bestimmen lässt, dass für alle $x > X$ der Wert $f(x)$ um weniger als ϵ von der Zahl g abweicht. Formell

$$\Big(x > X\Big) \Rightarrow \Big(|f(x) - g| < \epsilon\Big).$$

Definition 21. Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, wenn sich zu jeder beliebig grossen Zahl S eine Zahl X so bestimmen lässt, dass für alle $x > X$ gilt:

$$f(x) > S.$$

Zudem; Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, wenn $\lim\limits_{x \to \infty} \big(-f(x)\big) = \infty$.

24.2.3 Grenzwerte rationaler Funktionen

Satz 24.6. Für rationale Funktionen $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ vom Grad $n \geqslant 1$ und $a_0 \neq 0$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = \lim_{x \to \infty} a_0x^n$$

Der Term mit dem höchsten Exponenten bestimmt den Limes. Wenn x immer grösser wird, dann hinken die Terme mit niedrigerem Exponenten immer stärker hinterher bis zur Bedeutungslosigkeit.

Satz 24.7. Für gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

vom Grad $n \geqslant 1$ und $m \geqslant 1$ und $a_0 \cdot b_0 \neq 0$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Formel 24.8. Gebrochene rationale Funktionen Es gibt also vier Fälle:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad n > m \quad \text{und} \quad a_0 b_0 > 0 \\ -\infty & \text{für} \quad n > m \quad \text{und} \quad a_0 b_0 < 0 \\ a_0/b_0 & \text{für} \quad n = m \quad \text{und} \quad a_0 b_0 \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad n < m \quad \text{und} \quad a_0 b_0 \neq 0 \end{cases}$$

24.9 Übung Gesucht ist der Limes $x \to \infty$ von

$$\frac{5x^3 - x^2 + 1}{8x^3 + 5}.$$

Wir müssen nur die Terme mit den höchsten Exponenten berücksichtigen, also $\frac{5x^3}{8x^3}$. Der gesuchte Wert ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3}{8x^3} = \frac{5}{8}$$

◁

24.2.4 Rechnen mit Grenzwerten

Mit dem Limes-Operator kann man verschiedene Rechnungen ausführen. Wir fassen zusammen.

Eigenschaften 24.10. Limes

- $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

24.11 Übung Wir betrachten die Funktion $e^x(1 - \ln(x))$. Der Grenzwert des Produktes ist das Produkt der Grenzwerte, also

$$\lim_{x\to\infty} e^x(1 - \ln(x)) = \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty} (1 - \ln(x)) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

◁

Formel 24.12. Bestimmte Ausdrücke

$$\begin{array}{llll} a \cdot \infty = \infty, & \infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, & \infty + \infty = \infty, & a + \infty = \infty \\ a/\infty = 0, & a/0 = \infty, & 0/\infty = 0, & \infty/0 = \infty \\ \infty^\infty = \infty, & a > 0: \quad a^\infty = \infty, & 0 < a < 1: \quad a^\infty = 0, & 0^\infty = 0 \\ a > 0: \quad \infty^a = \infty, & a < 0: \quad \infty^a = 0, & \log(0) = -\infty & \end{array}$$

Regel von de L'Hôpital

Dies ist ein *Vorgriff* auf die Ableitung. Der Abschnitt wird erst im zweiten Durchlauf ganz verständlich.

Es kann sein, dass der Grenzwert vordergründig eine sogenannte *unbestimmten Ausdruck* annimmt, wie etwa $\frac{0}{0}$. Dann kan man folgende Regel, falls die Voraussetzungen gegeben sind, anwenden.

Satz 24.13. Falls f und g zwei Funktionen sind, die im Intervall $[a, b[$ definiert und ableitbar sind, und für die gilt $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anmerkung 24.14. Die Regel kann auch mehrfach Anwendung finden, wenn die Ableitungen auch den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annehmen.

24.15 Übung Wir betrachten den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. Schnell erkennen wird, dass der uneigentliche Fall von $\frac{0}{0}$ vorliegt. Der Zähler abgeleitet nach x ergibt e^x, der Nenner 1. Somit gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

$\triangleleft$

Für den unbestimmten Grenzwert $\frac{\infty}{\infty}$ gilt das folgende.

Satz 24.16. Es sind die Funktionen f unf g differenzierbar im Intervall $]a, b[$ und $g(x) \neq 0$. Falls $\lim\limits_{x\to a} f = \lim\limits_{x\to a} g = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'}{g'} = \ell$, dann $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f}{g} = \ell$.

Anmerkung 24.17. Die Bedingungen sind nur hinreichend aber nicht notwendig. Das heisst es gibt Fälle, welche diese Regel nicht erreicht.

24.18 Übung Wir suchen den Grenzwert von

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

Mit dem Satz von De l'Hospital und mit den Ableitungen folgt:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$$

$\triangleleft$

24.19 Übung Hier ein Beispiel, wo wir einen Nicht-Quotienten in einen solchen umformen und dann den Satz anwenden. Wir betrachten $\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 - x}$ und erweitern mit dem Doppelbruch $\frac{1/x}{1/x}$, ersetzen dann $1/x = h$ und $x \to \infty$ mit $h \to 0$. Alles zusammen:

$$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - 1/x}}{1/x} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \sqrt{1-h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-h}}}{1} = \frac{1}{2}$$

$\triangleleft$

24.3 Asymptoten

Wir haben *Grenzwerte* betrachtet. Nun kann man zu einem Graphen aber auch *Grenzkurven* und Grenzgeraden finden.

Definition 22. Eine *Asymptote* ist eine Kurve (häufig Gerade oder auch Punkt), der sich der Graph einer Funktion immer weiter annähert.

24.3.1 Grenzgerade

In vielen Büchern wird die Grenzgerade mit der Asymptote gleichgesetzt, also andere Kurven oder Punkte nicht betrachtet. Geraden sind Funktionen der Normalform $f(x) = ax + b$. Dazu kommen noch die y-Werte im Intervall $(-\infty, \infty)$, die geometrisch eine vertikale Gerade bilden, aber kein Funktion im herkömmlichen Verständnis sind.
Wir betrachten einmal die gebrochen rationale Funktionen, also Funktionen mit Polynomen im Nenner und Zähler. Mit den Formeln 24.8 kennen wir schon das Fernverhalten für $x \to \pm\infty$.

Horizontale Asymptote

Eine horizontale Asymptote ist eine Gerade, die parallel zur x-Achse ist. Für gebrochen rationale Funktionen

$$\frac{a_0 x^n + \ldots}{b_0 x^m + \ldots}$$

sind dies für $n = m$ und a_0 und b_0 ungleich Null a_0/b_0 und für $m > n$ dann 0.

24.1 Übung Wir skizzieren die Funktionen $f_1(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ und $f_2(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ als Beispiele. ◁

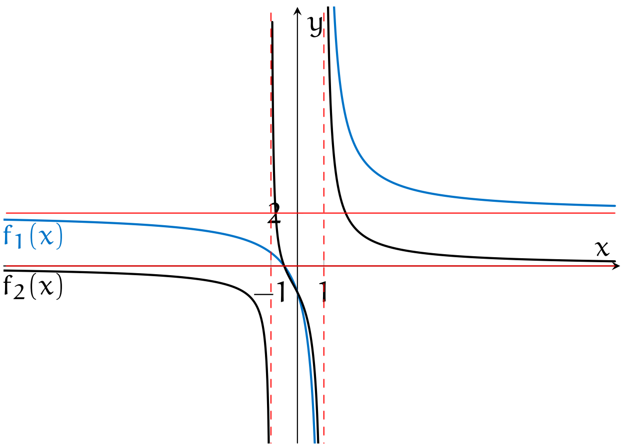
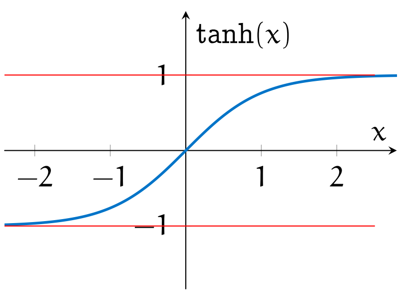


Abbildung 24.2

Nach unserer Formel muss $f_1(x)$ mit $x \to \infty$ gegen 2 gehen. Die Grenzgerade ist also die Gerade $y_{a_1} = 2$. Für $f_2(x)$ ist der Grenzwert bei 0 und damit $y_{a_2} = 0$. Die beiden Funktionen haben sogenannte Pole an den Stellen $x = \{-1, 1\}$.

Es gibt nicht nur bei gebrochen rationalen Funktionen horizontale Asymptoten. Die hyperbolische Funktion $\tanh(x)$ besitzt z.B. die Grenzkurven $y_a = \pm 1$, wie Figura zeigt. Für horizontale Asymptoten untersucht man die gegebene Funktion $f(x)$ bezüglich der Grenzwerte

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$



24.2 Übung Man bestimme die Asymptoten von $f(x) = x\exp(x) = xe^x$. Mit dem Grenzwert $\lim_{x\to-\infty} x\exp(x)$ finden wir den Typ $\infty \cdot 0 = 0$. Damit gibt es eine horizontale Asymptote $y_a = 0$. Anderseits führt $\lim_{x\to\infty} x\exp(x)$ zu $\infty \cdot \infty = \infty$. Das ist keine Asymptote. ◁

24.3 Übung Wir suchen die Asymptoten von $f(x) = x\exp(1-2x)$. Umgeschrieben erhält man

$$\lim_{x\to-\infty} e \cdot x \cdot e^{-2x} = e \cdot (-\infty) \cdot \infty = \infty$$

und

$$\lim_{x\to\infty} e \cdot x \cdot e^{-2x} = e \cdot (\infty) \cdot 0 = 0.$$

Es gibt nur eine Asymptote, nämlich $y_a = 0$. ◁

Senkrechte Asymptote, Polgerade

Definition 23. Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen, heissen *Pole* oder *Unendlichkeitsstellen* der Funktion.

Pole entstehen überall dort, wo ein Nenner einer Bruchfunktion Null wird. Eine gebrochen rationale Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a_0 x^n}{x^3(x-1)(x-2)^2}$$

oder ähnlich, wird an den Stellen $x = \{1, 2, 0\}$ eine Polstelle aufweisen. Wir haben dies schon in Abb. 24.2 dargestellt.

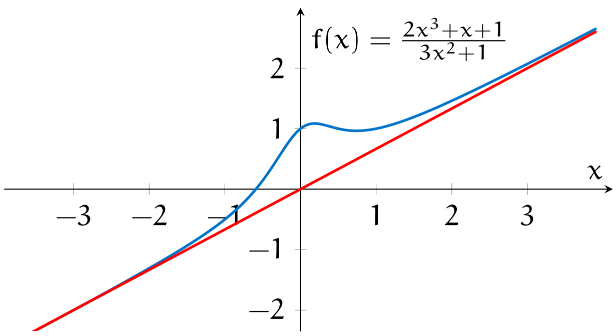
24.4 Übung Wir betrachten den Bruch $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Nun wissen wir, dass der Kosinus an den Stellen $x = \pi/2 + k \cdot \pi$ jeweils Null wird. Damit hat die Funktion an diesen Stellen Pole. Man nennt die Funktion $f(x)$ den Tangens $\tan(x)$. Der Kotangens $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ hingegen weist an den Stellen $x = k \cdot \pi$ Polgeraden auf. ◁

Schiefe Asymptote

Bei den gebrochen rationalen Funktionen ergibt sich eine schiefe Asymptote, wenn der Grad des Zählerpolynoms um 1 grösser ist als der Grad des Nennerpolynoms, also

$$f(x) = \frac{a_0 x^{m+1} + \dots}{b_0 x^m + \dots}$$

Eine schiefe Asymptote existiert, wenn der Grenzwert Null wird:



$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Abbildung 24.3

Daraus folgt, dass für a gilt:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

und dann

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$$

24.5 Übung Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 + x + 1}{3x^2 + 1}.$$

Zählergrad ist 3, Nennergrad ist 2. Also sollte eine schiefe Asymptote folgen. Für a, die Steigung der Geraden

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{3x^3 + x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = 2/3$$

Dann für b berechnen wir

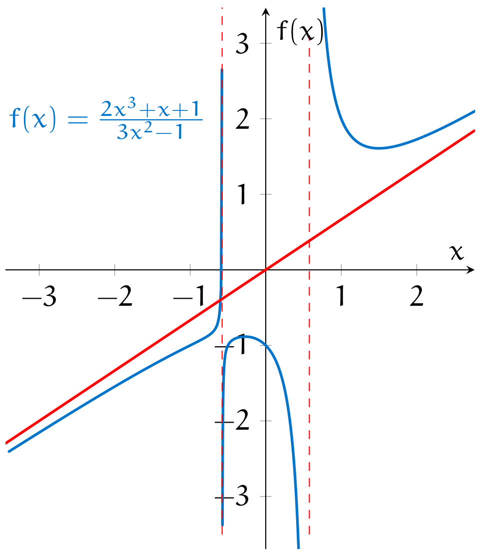
$$f(x) - ax = \frac{2x^3 + x + 1}{3x^3 + x} - \frac{2}{3}x = \frac{2x^3 + x + 1 - 2x^3 - \frac{2}{3}x^2}{3x^3 + x} = \frac{x + 1 - \frac{2}{3}x^2}{3x^3 + x}$$

Damit

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x + 1 - \frac{2}{3}x^2}{3x^3 + x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-\frac{2}{3}x^2}{3x^3}\right) = 0$$

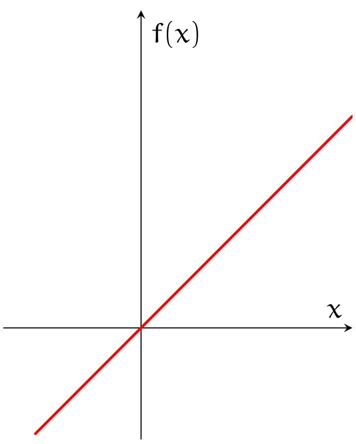
Das ist $y_a = 2/3x$, genau wie Abb. 24.3 zeigt. Man beachte, dass der Nenner keine reellen Nullstellen hat und deshalb keine Pole erscheinen. $\lhd$

Wir ändern die Funktion ganz leicht, indem wir den Nenner von $3x^2 + 1$ zu $3x^2 - 1$ transformieren. Das Resultat ist, siehe Abbildung: 1) die schiefe Asymptote bleibt, denn die Nullstellen verändern das Fernverhalten nicht, und 2) neu kommen nun zwei senkrechte Asymptoten dazu, jeweils an den Nullstellen $x = \pm\sqrt{1/3}$. Im weiteren beachte man, dass bei gerader Vielfachheit der Nullstelle die Kurvenstücke beidseits der Polgeraden auf derselben Seite liegen, wogegen bei ungerader ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Im Beispiel sind die Vielfachheiten jeweils 1, also ungerade, und damit wechselt das Vorzeichen.



Es gibt nicht nur schiefe Asymptoten für gebrochen rationale Funktionen. Wir betrachten die Kurve mit folgender Parameterdarstellung

$$x(t) = t + \cos(at)/t$$
$$y(t) = t + \sin(at)/t$$



Wir betrachten die Grenzen für ausgezeichnete Werte von t, d.h. $\pm\infty$ oder 0 oder ein spezielles t_0, das sich aufgrund der Form der Funktion anbietet. Konvergiert der Limes der einen Koordinate gegen einen reellen Wert und der andere gegen $\pm\infty$, dann liegt eine Asymptote vor. Konvergieren beide gegen $\pm\infty$, dann handelt es sich um eine schiefe Asymptote. Die Grenzwerte für $t \to \infty$ sind beide ∞. Denn $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} t$ und anlaog für $y(t)$. Ihr Verhältnis ist vom Typ $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Somit ist die Aymptote die Gerade $y = x$, wie die Abbildung bestätigt.

24.6 Rezept Grenzgeraden der gebrochen rationalen Funktionen

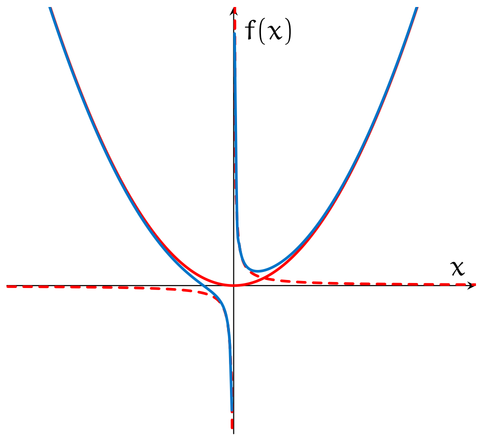
(1) Analysiere den Zählergrad n und den Nennergrad m

- Falls $n = m$, dann $y_a = a_0/b_0$ (mit $a_0 \cdot b_0 \neq 0$),
- falls $n < m$, dann $y_a = 0$,
- falls $n = m + 1$, dann schiefe Grenzgerade $y_a = ax + b$,
- falls $n > m + 1$ keine Grenzgerade

(2) Bestimme reelle Nullstellen des Nennerpolynoms: dort senkrechte Grenzgerade

24.3.2 Grenzkurven**

Wir betrachten wieder die gebrochen rationalen Funktionen. Die schiefe Asymptote ist eine Gerade, die sich aus dem um Eins höheren Zählergrad des Polynoms ergibt. Wenn nun dieser um 2 höher ist, so könnte ein Grenzparabel folgen. Ist sie um 3 höher, so würde man ein Polynomfunktion dritten Grades als Grenzkurve vermuten.



Wir gehen der Vermutung nach, indem wir die Funktion $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$ betrachten. Man könnte auch $x^2 + 1/x$ schreiben, eine Zusammensetzung von Parabel und Hyperbel. Bei $x = 0$ gibt es eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel.

Was beobachten wir? Tatsächlich erscheint die Parabel x^2 im ersten und zweiten Quadranten. Und zusätzlich erkennnt man die Hyperbeln, die sich bei $x = 0$ an die Kurve schmiegen.

Nun ist dies leicht einsehbar. In der Umgebung von $x \approx 0$ ist der zweite Term $1/x$ dominant, der erste x^2 verschwindent. Deshalb ist die Funktion dort hyperbolisch. Für $x \to \infty$ ist es umgekehrt, der Term $1/x$ verliert an Bedeutung, da sein Grenzwert 0 ist, die Parabel prägt das Erscheinungsbild.

24.3.3 Grenzpunkte**

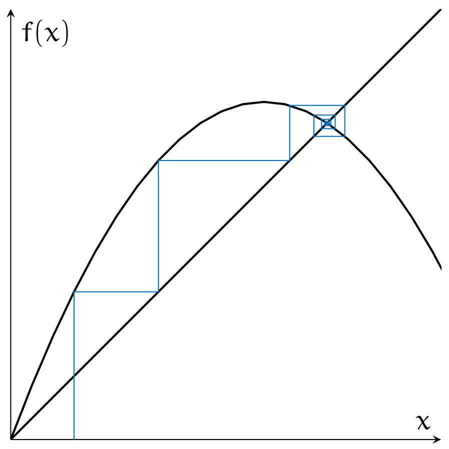
In den folgenden Abbildungen sehen wir links eine sogenannte Iterationsfunktion, die sich dem Schnittpunkt einer Parabel mit einer Geraden schrittweise nähert. Die zweite Kurve ist eine sogenannte logarithmische Spirale, die sich in Polarkoordinaten einfach als

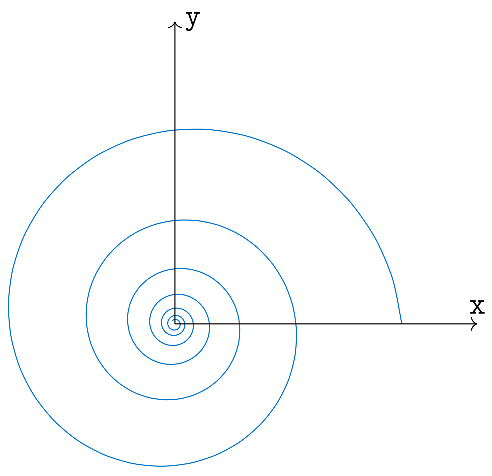
$$r(\varphi) = a \cdot \exp(k\varphi)$$

darstellt. Der Grenzpunkt ergibt sich aus dem Grenzwert

$$\lim_{\varphi \to -\infty} r(\varphi) = 0.$$

Der Punkt $(0, 0)$ ist der Grenzpunkt.





Mit diesen Bildern schliessen wir dieses Kapitel und wenden uns Neuem zu. In den Prüfungsaufgaben zur Analysis, der Kurvendiskussion, wird meist nach den Asymptoten gefragt.

Aufgaben

3.7 Man zeige mit links- und rechtsseitigem Grenzwert, dass die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 + 4$ stetig ist.

7 Eine Funktion ist stetig, wenn der linkseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich sind. Dazu setzen wir anstatt x einmal $x+h$ und $x-h$, also $\lim_{h\to 0}[(x+h)^3+(x+h)^2+4] \stackrel{?}{=} \lim_{h\to 0}[(x-h)^3+(x-h)^2+4]$. Vereinfacht $\cancel{x^3} + 3x^2h + \cancel{3xh^2} + h^3 + \cancel{x^2} + 2hx + \cancel{h^2} = \cancel{x^3} - 3x^2h + \cancel{3xh^2} - h^3 + \cancel{x^2} - 2hx + \cancel{h^2}$ oder $3x^2h + h^3 + 2hx = -3x^2h - h^3 - 2hx$. Mit $h \to 0$ folgt sowohl $(3x^2h + h^3 + 2hx) \to 0$ als auch $(-3x^2h - h^3 - 2hx) \to 0$. Somit ist $f(x)$ stetig.

3.8 Gegeben sind folgende Funktionen. Man bestimme die Werte x_0, für die nicht $\lim_{x\to x_0} f(x) = fx_0)$ gilt.

(a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$ **(b)** $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{5x + 3}$

8 **(a)** Die Funktion ist auf dem ganzen reellen Zahlenstrahl definiert. Deshalb gilt die Aussage überall.
(b) Die Funktion ist bei $5x + 3$, einer Nullstelle bei $x = -3/5$ nicht definiert, die Grenzwerte von oben und unten aber schon.

3.9 Bestimme die Grenzwerte für

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 7}{4x^2 - 3x + 9}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{3x + 4}{5x + 1}}$

9 **(a)** Wir setzen einfach ein, denn es gibt keine unerlaubten Werte und erhalten $\frac{3-5+7}{4-3+9} = 5/10 = 0.5$
(b) Wir setzen ein: $\sqrt{\frac{4}{1}} = 2$.

3.10 Bestimme die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \dfrac{2}{x - 1}$ **(b)** $\lim\limits_{x\uparrow 2} \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^2 - 1}{x^2}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + 2x)^2 - 1}{x}$

3.11 Bestimme die Grenzwerte, indem du anstatt $\lim_{x\to a} f(x)$ alternativ $\lim_{h\to 0} f(a + h)$ verwendest

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$

11 **(a)** Wir ersetzten x durch $(-1 + h)$ und erhalten $\frac{(-1+h)^2+3(-1+h)+2}{-1+h+1} = \frac{1-2h+h^2-3+3h+2}{h} = \frac{h^2-h}{h} = h - 1$. Somit suchen wir $\lim_{h\to 0} h - 1 = -1$.
(b) $x^5 - 1x - 1$ wird zu $\frac{(1+h)^5-1}{1+h-1}$ oder anders $\frac{1^5+5h+\ldots h^5-1}{h} = \frac{5h+\ldots h^5}{h} = 5 + \ldots$. Somit ist $\lim_{h\to 0} 5 = 5$.
(c) Wir setzen $x = a + h$ und bekommen

$$\frac{(a + h)^n - a^n}{a + h - a} = \frac{(a + h)^n - a^n}{h} = \frac{a^n + n \cdot a^{n-1}h + \ldots - a^n}{h} = \frac{n \cdot a^{n-1}h + \ldots}{h} = n \cdot a^{n-1} + \ldots$$

Die $\ldots$ sind alles Terme mit h^k mit $k > 1$, die im Grenzübergang 0 werden. Deshabl ist der Limeswert $n \cdot a^{n-1}$. Das ist auch das allgemeins Resultat der vorgehende Aufgaben mit $n = 5$ und $a = 1$.

3.12 Bestimme die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-6}{2x-2}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-5x^3+3x^2}{(1-2x-3x^2)^3}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{16-\dfrac{7x-9}{1+x}}$
(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-x)^4-x^4}{(x-3)^4-x^4}$

12 **(a)** Für $x\to\infty$ sind nur die Terme mit den höchsten Potenzen zu betrachten. Somit $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-6}{2x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{2x} = 5/2$.

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$.

(c) Von $\frac{x^6-5x^3+3x^2}{(1-2x-3x^2)^3}$ brauchen wir nur die Terme mit den höchsten Exponenten von x, d.h. im Zähler x^6 und im Nenner $(-3x^2)^3 = -27x^6$. Daraus folgt der Quotient $1/(-27) = -1/27$ als Grenzwert.

(d) Wir betrachten die Terme in x und formen um: $\lim_{x\to\infty}\sqrt{16-\frac{7x-9}{1+x}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{16-\frac{7x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{16-7} = \sqrt{9} = 3$.

(e) Im Quotienten $\dfrac{(2-x)^4-x^4}{(x-3)^4-x^4}$ fallen die Terme in x^4 weg. Deshalb muss man die Terme in x^3 betrachten, also $\dfrac{(-2x^3-1}{-3x^4-1}$ und $\dfrac{-2x^3}{-3x^4} = \dfrac{2}{3}$. Das ist der Limeswert.

3.13 Es gilt $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = 3$ und $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = 5$. Man bestimme den Grenzwert für $f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $f_2(x)-f_1(x)$ wenn $x\to x_0$.

13 Die Limesoperation ist mit den Grundoparationen vertauschbar. Deshalb gilt: $(f_1(x)+f_2(x))\to 8$ für $x\to x_0$, ebenso $(f_1(x)\cdot f_2(x))\to 15$ und $(f_2(x)-f_1(x))\to 2$.

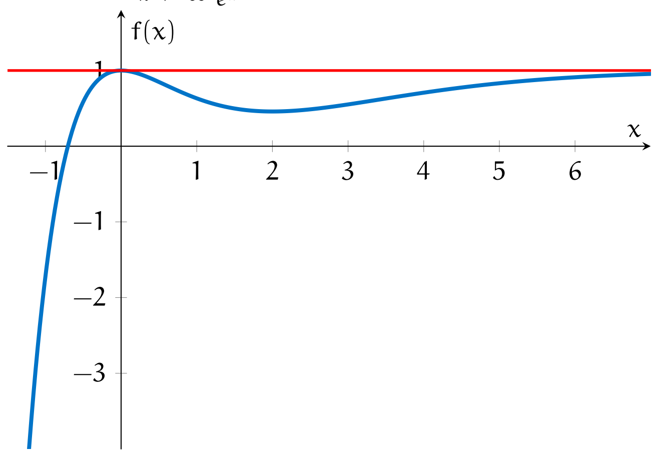
3.14 Bestimme die Asymptoten von

(a) $f(x) = xe^x$ **(b)** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ **(c)** $1-x^2e^{-x}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{20x}{x^2+5}$
(e) $x^2-4y^2+8y=0$

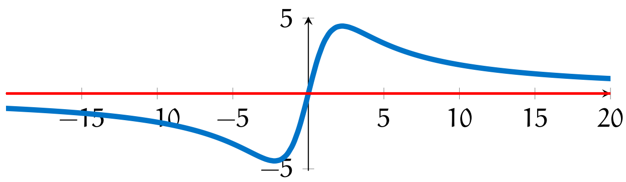
14 **(a)** Für $x\to\infty$ ist $\lim_{x\to\infty} xe^x$ vom Typ $\infty\cdot\infty = \infty$ und für $x\to-\infty$ vom Typ $-\infty\cdot 0 = 0$. Somit ist eine Asymptote $y_0 = 0$.

(b) Es gibt Polstellen bei $x^2-1=0$, d.h. bei $x=\pm 1$. Beide vertikalen Asymptoten sind $+\infty$, denn der Nenner ist positiv. Sodann ist für $x\to\pm\infty$ die Asymptote 0.

(c) Es gibt keine vertikale Asymptote. Für $x\to\infty$ ist der Grenzwert vom Typ $1-\infty/0$, also $-\infty$ und somit keine Asymptote, und für $x\to-\infty$ dann $1-\infty/\infty$. Hier müssen wir klären, ob der Zähler oder der Nenner schneller ∞ wird. Wir suche also $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}$. Einmal abgeleitet ergibt $\frac{2x}{e^x}$n nochmals $\frac{2}{e^x}$ und somit $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$. Zusammen also $1-0=1$.



(d) Polstellen oder vertikale Asymptoten: Nullstellen $x^2+5=0$ und daraus $x^2=-5$ und deshalb keine reellen Nullstellen. Für $x\to\infty$ folgt $y_a = 0$



(e) Aus $x^2 - 4y^2 + 8y = 0$ folgt $x^2 = 4(y^2 + 8y) = 4(y+4)^2 - 16$ und $(y+4)^2 = \frac{1}{4}(x^2+16)$ oder $y = -4 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(x^2+16)}$. Für wachsende x wird der fixe Term 16 vernachlässigbar, damit $y \approx -4 \pm \frac{x}{2}$

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

– Den Vektorbegriff, die Vektoraddition und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar mit den zugehörigen Eigenschaften, sowie die Begriffe der Linearkombination von Vektoren und der kollinearen und komplanaren Vektoren darstellen, definieren und anwenden.
– Vektorielle Basen der Ebene und des Raumes und der zugehörigen Koordinatensysteme in Beziehung setzen, insbesondere orthonormierte Basen und Koordinatensysteme
Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke, des Schwerpunktes eines Dreieckes und die Norm eines Vektors bestimmen.
–Das Skalarprodukt (algebraische und trigonometrische Darstellung) definieren und seine Eigenschaften anwenden den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen die Fläche einer einfachen Figur berechnen.
–das Vektorprodukt und das Spatprodukt definieren, ihre geometrischen Eigenschaften angeben und diese Begriffe anwenden
– Die Parametergleichungen und die Normalenform einer Geraden erstellen und damit den Richtungsvektor, den Normalenvektor und die Steigung herleiten.
– Die gegenseitige Lage zweier Geraden diskutieren und ihren eventuell existierenden Schnittpunkt berechnen.
– Den Zwischenwinkel zweier Geraden berechnen, den Abstand eines Punktes von einer Geraden, die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden bestimmen.
–Die kartesische Kreisgleichung und die Gleichungen ihrer Tangenten erstellen gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Kreisen bestimmen.
– Die Parametergleichungen der Gerade und der Ebene erstellen Punkte, Geraden und Ebenen graphisch darstellen bei Rechnungen und Zeichnungen gegenseitige Lage bestimmen
–die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel (Brennpunkte, Leitgeraden, Exzentrizität, Asymptoten) definieren und ihre Eigenschaften darstellen, daraus die Mittelpunktsgleichungen herleiten
– Parametergleichungen der Ellipse anwenden Tangentengleichung in einem Punkt eines Kegelschnitts bestimmen
–die Eigenschaften von Kegelschnitten für die Bestimmung von geometrischen Örtern anwenden
–Parametergleichungen und kartesische Gleichung (Normalform) der Ebene erstellen und daraus Richtungsvektoren und Normalenvektor ermitteln
–den Abstand zweier Punkte, den Abstand Punkt-Gerade, den Abstand Punkt-Ebene sowie den Abstand windschiefer Geraden berechnen
–den Winkel zwischen zwei Geraden, zwischen einer Geraden und einer Ebene, zwischen zwei Ebenen bestimmen
–gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen Volumen und Oberflächen einfacher Körper berechnen

Kapitel 25

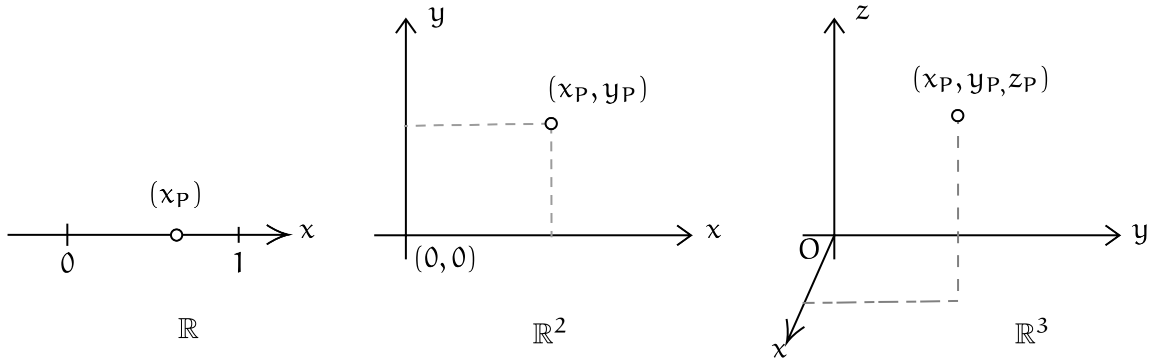
Vektoranalysis

25.1 Vektoren

Mitte des 19. Jahrhunderts wurden Vektoren oder "Fahrstrahle" für Verfahren eingeführt, um mit Punkten, Geraden und Ebenen selbst zu rechnen. Die Erfindung der Vektoren vereinfacht sehr viele mathematischen Probleme und vermag bekanntes ganz neu und anders darzustellen. Das Wort "Vektor" stammt aus dem Latein und bedeute Träger, Fahrender, Reisender. Ein Reisender fährt von Punkt A nach Punkt B.
Die einen nennen dieses Gebiet der Mathematik Vektorgeometrie, andere Vektoranalysis. Dies ist nur eine Frage der Betrachtung und der Motivation.

25.1.1 Punkte im Raum

Zuerst müssen wir ein Verständnis für den Raum erlangen. In der euklidischen Geometrie am Anfang dieses Werks haben wir den Raum mit Zirkel und Lineal konstruiert. Hier gehen wir analytischer vor.
Wir definieren den eindimensionale Raum als die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und denken uns den Zahlenstrahl, der von der Null aus sich in entgegengesetzte Richtungen ins Unendliche erstreckt. Mit einem Punkt mit Abstand 1 vom Nullpunkt haben wir einen Massstab festgelegt. Wir kennen also Richtung und Abstand von null. Eine Zahl $+0.71$ kann man als Punkt finden, indem man die Distanz 0.71 in positiver Richtung zurücklegt. Die zwei Aspekte Richtung und Betrag sind fundamental für das weitere.



Wir definieren für den euklidischen Raum den Vektor.

Definition 24. Ein *Vektor* im Raum $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist eine gerichtete Strecke, die durch Betrag (Länge) und Richtung festgelegt ist.

Wie im eindimensionalen Fall verbinde eine gerichtet Strecke zwei Punkte, den Anfangspunkt und den Aufpunkt. Im Normalfall liegt der Anfang beim Nullpunkt, oder Origo für Ursprung, und das Ende irgendwo im Raum.

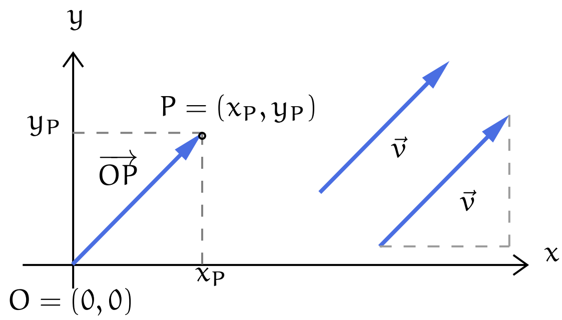
Definition 25. Der Vektor, der im Ursprung O anfängt und in P endet, heisst Ortsvektor. Man schreibt

$$\overrightarrow{OP}$$

Nicht alle Vektoren beginnen im Ursprung.

Satz 25.1. Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie gleiche Richtung und gleiche Länge besitzen.

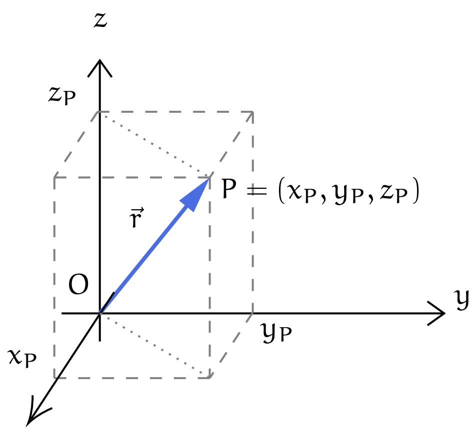
Dass die Vektoren, die gleich sind, nicht den gleichen Anfangspunkt zu haben brauchen, kommt aus der Definition. Man kann sich vorstellen, dass zwei gleiche Vektoren die gleiche Translation, also Verschiebung bedeuten.



In der Abbildung sieht man verschiedene Vektoren, die alle gleich sind. Es gilt

$$\overrightarrow{OP} = \vec{v}.$$

Definition 26. Ein Vektor, der nicht im Ursprung beginnt, nennt man freien Vektor oder Repräsentant.



Einen Ortsvektor stellen wir durch die Koordinaten des Aufpunkts P dar, und zwar entweder als (x_P, y_P, z_P) oder in geklammerter Staffel:

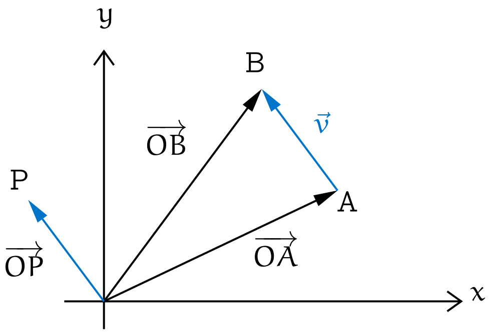
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}.$$

Definition 27. Die Koordinaten (x_P, y_P, z_P) des Aufpunkts P des Ortsvektors heissen Komponenten des Vektors.

Da der freie Vektor $\vec{v}$ gleich $\overrightarrow{OP}$ ist, haben sie die gleichen Komponenten. D.h. für den freien Vektor und den Ortsvektor sind die Differenzen der Koordinaten von Endpunkt B und Anfangspunkt A gleich. Der Anfangspunkt der Ortsvektors hat die Komponenten $(0, 0, 0)$. Also folgt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P - 0 \\ y_P - 0 \\ z_P - 0 \end{pmatrix}$$

Definition 28. Der Vektor $\vec{0}$ mit den Komponenten $(0, 0, 0)$ heisst *Nullvektor*.



25.2 Beispiel Im zweidimensionalen Raum, siehe Abbildung, habe der Punkt B die Koordinaten $(3, 5)$ und A $(4.5, 2)$. Damit ist die Komponentendarstellung von $\vec{v}$ gegeben als:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 - 4.5 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Ein zahlenmässiger Vektor $\vec{v}$ ist zur Illustration ein Ding mit der Form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Komponenten sind alles Elemente der reellen Zahlen, $v_i \in \mathbb{R}$. Umgekehrt kann man auch sagen, der Raum $\mathbb{R}^3$ besteht aus allen Vektoren, geschrieben:

$$\mathbb{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \}$$

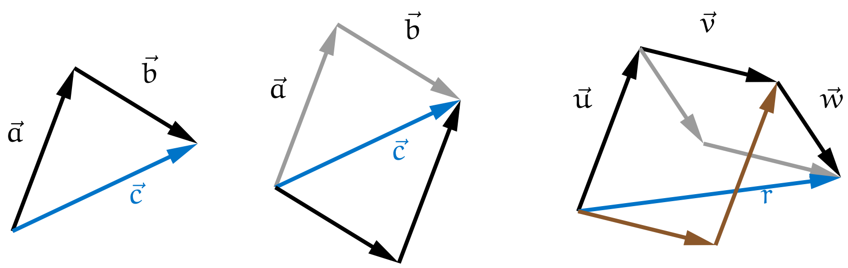
Das gilt auch für $\mathbb{R}^2$ entsprechend. Ein "Vektor" mit nur einer Dimension gilt als Skalar. Wir haben Gebrauch gemacht von der Definition der Addition von Vektoren.

Addition von Vektoren

Definition 29. Die Summe zweier Vektoren ist der Vektor mit den Summen der Komponenten als Komponenten, also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Die Addition von Vektoren ist *kommutativ* und *assoziativ*, d.h. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ und $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
Die geometrische Anschauung der Addition ist das Aneinanderreihen von Vektoren. Die Reihenfolge der Addition ist gleichgültig.



Multiplikation mit Skalar

Wir machen nun eine Festlegung für den Begriff Skalar.

Definition 30. Ein *Skalar* ist eine mathematische Grösse, die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert ist.

Mit der k-fachen Anwendung der Summe legt man die Multiplikation eines Vektors mit einem Zahlenwert, hier Skalar, fest.

Definition 31. Ein Vektor $\vec{v}$ wird mit einem Skalar k multipliziert, indem alle Komponenten mit k multipliziert werden,

$$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ k \cdot v_3 \end{pmatrix}.$$

Wie schon üblich, fragt man nach den Eigenschaften dieser Operation. Interessieren könnte das Verteilungsgesetz. Gilt $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$? Nachrechnen bestätigt die Gültigkeit sehr rasch.
Und was ist mit $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$? Auch dies ist beinahe trivial. Die erste Komponente ist links $(k_1 + k_2)a_1$ und rechts $k_1 a_1 + k_2 a_1$, also gleich.

25.3 Übung Wir wollen den *Mittelpunkt einer Strecke*, die von den Punkten P_1 und P_2 begrenzt wird, bestimmen. Wir können den Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ einfach halbieren, indem wir ihn mit dem Faktor $k = 1/2$ stauchen. Damit ergibt sich der Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ als $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$ oder kurz $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_1})$. Mit Koordinaten:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

◁

Subtraktion

Ein spezieller Vektor ist der sogenannte Kehrvektor oder Gegenvektor.

Definition 32. Der *Kehrvektor* $-\vec{a}$ ist der mit $k = -1$ multiplizierte Vektor $k \cdot \vec{a}$.

Satz 25.4. Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ ist die Addition des Minuenden $\vec{a}$ mit dem Kehrvektor des Subtrahenden $-\vec{b}$.

25.5 Beispiel Wir bestimmen die Differenz von $\vec{a} = (1, 2, 3)$ minus $\vec{b} = (3, 4, 5)$. Der Kehrvektor ist $-\vec{b} = (-3, -4, -5)$. Die Resultierende ist

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-4 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

◁

Linearkombination

Die Summe zweier oder mehrere Vektoren ist wiederum ein Vektor.

Definition 33. Eine Vektor $\vec{v}$ ist eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$$

gilt. k_1 und k_2 sind die Koeffizienten $\in \mathbb{R}$.

Kollineare und komplanare Vektoren

Wir vergleichen zwei oder drei Vektoren und stellen Eigenheiten fest.

Definition 34. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear*, wenn sie zu einer einzigen Geraden parallel sind – sie haben die gleiche Richtung ($k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ für $k \neq 0$).

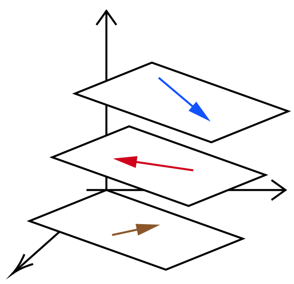
Satz 25.6. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nur dann nicht kollinear, wenn die Gleichung $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ nur für $k = 0$ gilt.

Wählt man zufällig zwei Vektoren, so sind sie meist nicht kollinear.

25.7 Beispiel Zwei Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (-1, 3, 2)$ sind nicht kollinear, denn man müsste eine Zahl k finden, so dass $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Die Verhältnisse der a_i zu b_i sind aber -1, 2/3 und 3/2. Es gibt kein k, ausser null, das die Gleichung erfüllt. ◁

Definition 35. Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heissen *komplanar*, wenn sie zu einer einzigen Ebene parallel sind.

Die Abbildung zeigt drei Vektoren, die zwar in drei verschiedenen Ebenen liegen. Aber die Ebenen sind “parallel”, haben dieselbe Ausrichtung. Das bedeutet, dass man mit diesen Vektoren nicht von einer zur anderen Ebene gelangen kann, denn es fehlt eine Komponente in die zur Ebene senkrechte Richtung.



Satz 25.8. Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear, dann lässt sich ein zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanarer Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen.

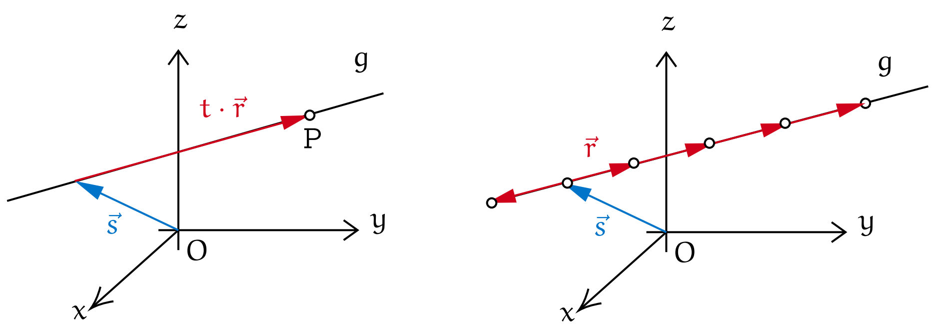
Satz 25.9. Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind dann und nur dann nicht komplanar, wenn die Gleichung $k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$ nur für $k_1 = k_2 = 0$ erfüllt ist.

Also, wenn der dritte Vektor eine Linearkombination der zwei anderen ist, sind die Vektoren komplanar.

25.1.2 Linien im Raum

Wir haben bis hierhin Punkte betrachtet. Nun wollen wir Linie, v.a. Geraden anschauen. Aus der Abbildung kann man unschwer erahnen, dass eine Gerade g aus der Menge der Punkte im Raum besteht, die durch einen Stützvektor $\vec{s}$ und einen Richtungsvektor $\vec{r}$ erreichbar sind. Führt man einen Parameter t ein, also ein Variable, die man für einen gerade betrachteten Fall konstant setzt, für den nächsten Fall aber variiert werden kann, so kann man die Gerade festlegen als

$$g : \{\vec{s} + t\vec{r} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



Satz 25.10. Punkt-Richtungs-Gleichung Für jedes Paar von Stützvektor $\vec{s}$ und Richtungsvektor $\vec{r}$ existiert eine Gerade $g : \vec{s} + t \cdot \vec{r}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Alternativ gilt, dass durch zwei unterschiedliche Punkte eine Gerade festgelegt ist.

Satz 25.11. Zweipunkt-Gleichung Zwei unterschiedliche Ortsvektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ legen die Gerade g als $\overrightarrow{OP_1} + t \cdot (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2})$ mit $t \in \mathbb{R}$ fest.

25.12 Übung Wir suchen den Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$, wobei die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ bekannt sind. Dazu addiert man den halben Vektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Also $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ folgt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Der Mittelpunkt ist der Durchschnitt. ◁

Formel 25.13. Teilungspunkt Der *Teilungspunkt* T ist jener Punkt, der die Strecke von A nach B im Verhältnis λ teilt:

$$\overrightarrow{OT} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$$

25.14 Übung Der Schwerpunkt, ein Begriff aus der Physik, von drei Punkten ist der Durchschnitt der Eckpunkte. Mit den Punkten A, B, C ergibt sich der Schwerpunkt S als $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Mit $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ und $C = (1, 1, 3)$ folgt $S(1, 2/3, 1)$.

25.15 Formel. Der Schwerpunkt dreier Punkte ist:

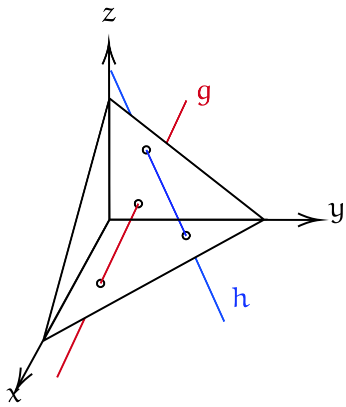
$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

◁

Gegenseitige Lage von Geraden

Im zweidimensionalen Raum können sich zwei Geraden entweder schneiden oder sie sind parallel (zwei Geraden, die zusammenfallen, also gleich sind, sind auch parallel). In dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ gibt es ein Möglichkeiten mehr. Das heisst, sie schneiden sich nicht und sind nicht parallel.

Definition 36. Zwei Geraden, die nicht parallel sind und sich nicht schneiden, heissen *windschief*.

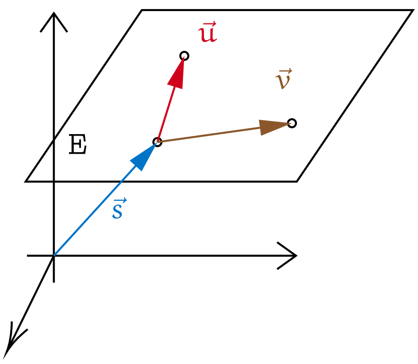


In der Abbildung sind zwei windschiefe Geraden eingezeichnet. Im gezeigten Abschnitt kommen sie sich am nächsten, schneiden sich aber nicht. Den (kürzesten) Abstand zwischen den Geraden werden wir später berechnen. Wenn sich zwei Geraden schneiden, dann ist dies mengentheoretisch gesprochen die Schnittmenge der Elemente der beiden Geraden. Wenn man die Punkt-Richtungsgleichungen der zwei Geraden gleichsetzt, erhält man komponentenweise ein lineares Gleichungssystem für die zwei Parameter.
Es gibt also vier Lagen zweier Geraden: Sie sind

- gleich,
- parallel,
- schneidend oder
- windschief.

Wir werden noch darauf zurückkommen, wie man diese Eigenschaft feststellt.

25.1.3 Ebenen im Raum



Die Gerade kann durch zwei Vektoren und einen Parameter bestimmt werden. Eine Eben hat eine Dimension mehr als ein Gleichung. Auf der Gerade hat man bildlich gesprochen nur die Möglichkeit, entlang der Geraden zu wandern. In (oder auf) der Ebene hat man zwei Freiheitsgrade der Bewegung. Der Stützvektor $\vec{s}$ bringt uns auf die Ebene. Dort können wir entlang zweier nicht parallel Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wandern.
Eine Ebene ist durch drei Punkte, die nicht alle auf einer Gerade liegen dürfen, festgelegt. Diese drei Punkte definieren drei Vektoren, wobei der dritte die Summe der zwei anderen ist. Nehmen wir drei Punkte, dann geht die Ebene E durch diese Punkte $P_1(1, 0, 5)$, $P_2(2, 1, -3)$ und $P_3(-2, 4, 0.5)$ und besteht mit den zwei Parametern s und t aus der Menge der Punkte

$$E : \{\vec{s} + k\vec{u} + m\vec{v} \mid k, m \in \mathbb{R}\}.$$

Die Bestimmung von $\vec{s}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ geht wie folgt:

$$\vec{s} = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4.5 \end{pmatrix}$$

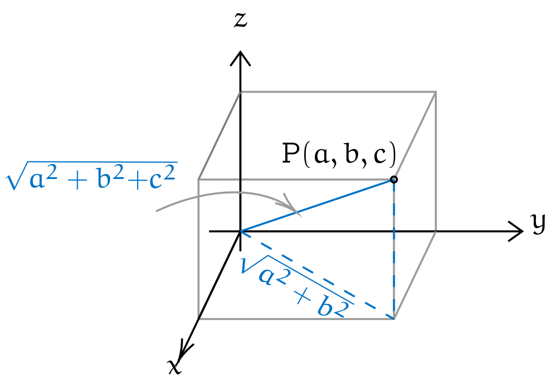
In Mengennotation können wir für diese Ebene E also schreiben:

$$E : \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4.5 \end{pmatrix} \mid k, m \in \mathbb{R} \}.$$

Man merke, dass gewisse Punkte der Ebene negative Werte von m und/oder k aufweisen.

25.1.4 Betrag und Abstand

Wir haben einen Vektor als Objekt mit Länge und Richtung definiert. Bis hierhin haben wir Vektoren durch Anfangspunkt und Aufpunkt festgelegt. Nun wollen wir die zwei charakteristischen Grössen bestimmen. Die Länge ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras. Für die Richtung müssen wir erst ein paar Hilfsgrössen definieren.



Definition 37. Der *Betrag* oder die *Länge* eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$ ist die Quadratwurzel der Summe der quadrierten Komponenten,

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Wichtig 2. Wir werden anstatt $|\vec{a}|$ auch ganz einfach a schreiben. ⊣

Anmerkung 25.16. Die Berechnung der Länge des Vektors erfolgt nach dem Satz des Pythagoras, für $n = 3$ zweimal angewendet.

Anmerkung 25.17. Jeder Vektor der Länge 0 ist eine Nullvektor.

25.18 Beispiel Die Länge des Vektors $a = (1, 0, 5)$ und $b = (2, 1. -3)$ sind $|a| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$ und $|b| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$. ◁

Da eine Vektor zwei Punkte auf einer Geraden verbindet, kann man die Formel für den Betrag auch nutzen, um den Abstand zwischen den Punkten zu bestimmen.
Zwei Punkte $A(x_A, y_A, z_A$ und $B(x_B, y_b, z_B$ besitzen den Abstand, der sich aus dem dreidimensionalen Satz des Pythagoras bestimmt, wie in der obigen Abbildung.

Satz 25.19. Die *Distanz* d zwischen zwei Punkten A und B im Raum $\mathbb{R}^3$ ist

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

25.20 Beispiel Bestimmen wir die Distanz von $(1, 2, 3)$ und $(1, -2, -4)$. Nach der Formel folgt:

$$d = \sqrt{(1-1)^2 + (2+2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{17}.$$

◁

25.1.5 Einheitsvektor

Der Einheitsvektor soll die Länge 1 haben.

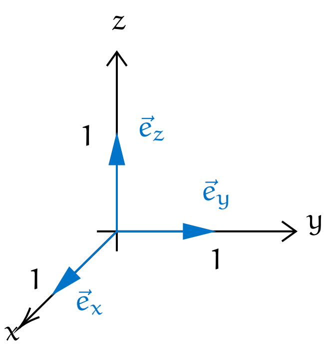
Definition 38. Der normierte Vektor, der nicht Nullvektor ist,

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

ist der Einheitsvektor in Richtung $\vec{v}$. Er hat Länge 1.

25.21 Beispiel Bestimme den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a} = (3, 4, 5)$. Dazu müssen wir die Länge bestimmen, also $\sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{49}$. Damit wird $\vec{e}_a = (3/7, 4/7, 5/7)$. ◁

Im Zusammenhang mit dem kartesischen Koordinatensystem sind die sogenannten Basisvektoren wichtig. Für die drei Richtungen nach x, y und z gelten: $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, und $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$, in $\mathbb{R}^2$ gilt einfacher: $\vec{e}_x = (1, 0)$ und $\vec{e}_y = (0, 1)$.



Die Basisvektoren sind zueinander senkrecht, d.h. jedes Produkt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ ist null. Jeder Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2, 3$ kann als *Linearkombination* der Basisvektoren dargestellt werden. Dabei sind die zu den Basisvektoren zugehörigen Komponenten die Skalare der Multiplikation.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder kürzer

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z.$$

25.22 Beispiel Bestimme den Einheitsvektor $\vec{e}_v$ aus $\vec{v} = (3, -2, 1)$. Zuerst bestimmen wir die Länge des Vektors als $|\vec{v}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$. Sodann schreiben wir

$$\vec{e}_v = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

Definition 39. Drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bilden eine *orthonormierte Basis*, wenn gilt:

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad i \neq j \\ 1 & \text{falls} \quad i = j. \end{cases}$$

25.1.6 Skalarprodukt

Diese besondere Multiplikation ist von sehr grosser Bedeutung und Nützlichkeit.

Definition 40. Das *Skalarprodukt* oder *innere Produkt* zweier Vektoren mit n reellen Komponenten ist die Linearkombination ihrer Komponenten,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Anmerkung 25.23. Das Skalarprodukt hat auch einen Zusammenhang mit der Länge, denn $\vec{u} \bullet \vec{u} = u_1 u_1 + \cdots + u_n u_n = |\vec{u}|^2$.

Anmerkung 25.24. Das Skalarprodukt *ist* ein Skalar und kein Vektor. Man darf es nicht mit der Multiplikation eines Vektors *mit* einem Skalar verwechseln.

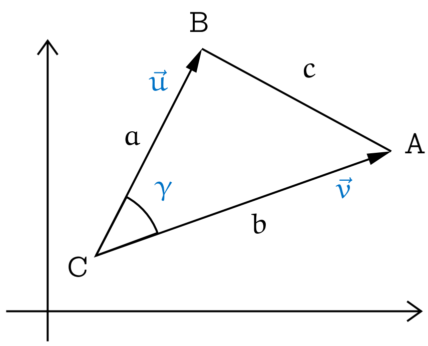
Welche Eigenschaften hat das Skalarprodukt? Wäre es *kommutativ*, dann müsste gelten $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ durch Ausrechnen ist dies schnell bestätigt.
Wie steht es mit dem Verteilungsgesetz (Distributivität)? Also gilt $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$? Wir rechnen in $\mathbb{R}^2$ schnell nach: Die linke Seite ergibt $a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$. Die rechte Seite: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$. Die Termumformung, ausklammern der a-Terme führt zu: $a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$. Beide Seiten sind gleich, das Distributivgesetz gilt.

25.1.7 Richtung, Zwischenwinkel

Mit der Einführung des Skalarprodukts können wir die Richtung oder den Winkel einfacher darstellen.

Zwei Vektoren plus ihre Differenz ergeben ein Dreieck. Die Winkel des Dreiecks lassen sich aus den Seiten berechnen. Wir müssen uns den Kosinussatz in Erinnerung rufen, der für beliebige Dreiecke mit den Seiten a, b und c und dem Winkel γ zwischen den Seiten a und b besagt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



Wir setzen für die Seiten $a = |u|$, $b = |v|$ und $c = |u - v|$. (Wir nennen nun den Winkel γ einfach θ.) Damit gilt eingesetzt

$$\begin{aligned}
|u - v|^2 &= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos(\theta) \\
&= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \\
&= u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 + u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_3^2 + v_3^2 - 2u_3v_3 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)
\end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$-2|u||v|\cos(\theta) = -2 \cdot (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

und weiter

$$\cos(\theta) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|},$$

so dass

$$\theta = \arccos\Big(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\Big).$$

und mit dem Skalarprodukt dann

$$\theta = \arccos\Big(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\Big)$$

Satz 25.25. Der *Zwischenwinkel* zwischen zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, von denen keiner der Nullvektor ist, beträgt

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Anmerkung 25.26. Den Winkel θ erhält man aus $\cos(\theta)$ mit der Arcusfunktion, $\arccos(\theta)$.

Anmerkung 25.27. Unter Benutzung der Einheitsvektoren berechnet sich der Winkel einfach zu:

$$\theta = \arccos(\vec{e}_u \bullet \vec{e}_v)$$

Wichtig 3. Die Formel $\vec{a} \bullet \vec{b} = \cos(\theta)|\vec{a}||\vec{b}| = \cos(\theta) a \cdot b$ ist eingänglicher und besser zu merken. ⊣

25.28 Beispiel Wir berechnen den Zwischenwinkel zweier Basisvektoren $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$. Das ergibt $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$. Damit sind sie senkrecht zueinander. Anderseits ist der $\arccos 0 = 90° = \frac{\pi}{4}$. ◁

Satz 25.29. θ ist der Zwischenwinkel der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Es gilt

$$\vec{v} \bullet \vec{w} \;\text{ ist }\; \begin{cases} > 0 & \text{für } 0° \leqslant \theta < 90° \quad (0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{4}) \\ 0 & \text{für } \theta = 90° \quad (\theta = \frac{\pi}{4}) \\ < 0 & \text{für } 90° < \theta \leqslant 180° \quad (\frac{\pi}{4} \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Satz 25.30. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^n$ sind *senkrecht* (orthogonal) zueinander, dann und nur dann, wenn ihr Skalarprodukt null ist,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \bullet \vec{b} = 0.$$

Sie sind *parallel*, dann und nur dann, wenn ihr Skalarprodukt dem Produkt ihrer Längen gleich ist,

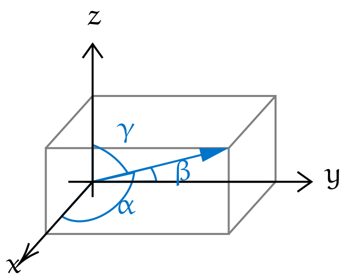
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Anmerkung 25.31. Weiter oben haben wir gesagt, dass zwei Vektoren kollinear sind, wenn sie beide zu einer Geraden parallel sind. Deshalb sind kollineare Vektoren, eigentlich ihre Anfangs- und Aufpunkte, parallel. Hier in diesem Buch betrachten wir die zwei Ausdrücke für Vektoren als gleich.

Anmerkung 25.32. Sind zwei Vektoren parallel, dann ist der Zwischenwinkel null und damit das Argument der Arcus-Cosinus-Funktion 1. D.h.

$$\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 1.$$

Wir bestimmen die Winkel eines Vektors $\vec{a}$, die dieser mit den Achsen des Koordinatensystems bildet. Wir bezeichnen sie mit α, β und γ. Zu ihrer Berechnung nehmen wir das Skalarprodukt gebildet aus dem Vektor $\vec{a}$ und den Einheitsvektoren z.B. $\vec{e}_x$ etc. Damit werden die Winkel



$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{e}_x}{a \cdot 1} = \frac{a_1}{a} \\
\cos(\beta) &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{e}_y}{a \cdot 1} = \frac{a_2}{a} \\
\cos(\gamma) &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{e}_z}{a \cdot 1} = \frac{a_3}{a}
\end{aligned}$$

Nun sind die Winkel nicht unabhängig voneinander, denn es gilt aus der Definition der Länge von $\vec{a}$:

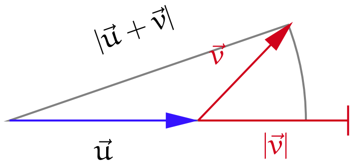
$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1.$$

25.1.8 Ungleichungen

Addition

Die Länge der Summe zweier Vektoren, die nicht parallel sind ist kürzer als die Länge der Summe zweier paralleler Vektoren.

Die Abbildung rechts zeigt diesen Sachverhalt anschaulich. Aus der elementaren Geometrie wissen wir, dass die Hypothenuse immer kürzer ist als die Summe der zwei Katheten. Mit Vektoren stellt sich diese Tatsache wie folgt dar.



Satz 25.33 (**Dreiecksungleichung**). Für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt,

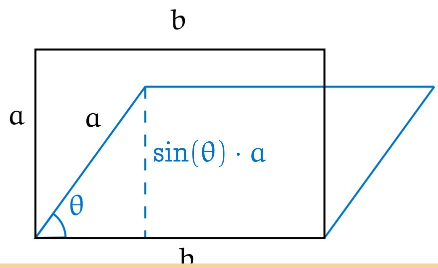
$$|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|,$$

wobei Gleichheit gilt, wenn der eine Vektor ein nicht-negatives skalares Vielfaches des anderen ist.

Anmerkung 25.34. Deshalb ist die Gerade die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.

Skalarprodukt**

Wenn wir von der Ebene ausgehen, dann sieht man in der Abbildung ein Parallelogramm und ein Rechteck mit gleichlangen Seiten a und b. Die Fläche des Parallegramms ist $F = ab \sin\theta$, die des Rechtecks $F_\square = ab$. Solange $\theta > 0°$ ist, ist $\sin(\theta) < 1$. Deshalb gilt folgender Satz.



Satz 25.35 (Cauchy-Schwarz Ungleichung). Für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt,

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leqslant |\vec{u}||\vec{v}|,$$

wobei Gleichheit nur dann gegeben ist, wenn ein Vektor ein skalares Vielfaches des anderen ist (kollinear, parallel).

Wenn $\vec{a} \bullet \vec{b} = \cos(\theta)|\vec{a}||\vec{b}|$ ist und $\cos(\theta) \leqslant 1$, dann folgt, dass $\vec{a} \bullet \vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$.

25.1.9 Eigenschaften von Vektoroperationen

Wir fassen zusammen.

Eigenschaften 25.36. Addition Für die Addition von Vektoren gilt:

(a) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$	Kommutativgesetz
(b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$	Assoziativgesetz
(c) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$	Additive Identität
(d) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$	Additive Inverse

Eigenschaften 25.37. Skalar mal Vektor Für beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, und Skalare k, l, gilt

(a) $k(l\vec{v}) = (kl)\vec{v}$	Assoziativgesetz
(b) $k(\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$	Distributivgesetz
(c) $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$	Distributivgesetz

Eigenschaften 25.38. Skalarprodukt Für beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, und den Skalar k gilt

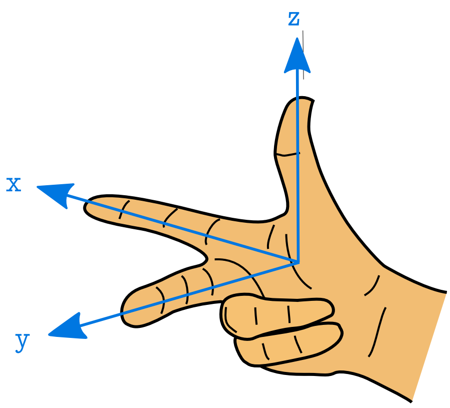
(a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$	Kommutativgesetz
(b) $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$	Assoziativgesetz
(c) $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0 = \vec{0} \cdot \vec{v}$	Nullelement
(d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	Distributivgesetz
(e) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$	Distributivgesetz

Die Behauptungen (a)-(e) sind Anwendungen der Definition und werden hier nicht weiter analysiert.
Falls $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ und $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, dann folgt: $\vec{u} \cdot (k\vec{v} + l\vec{w}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) + l(\vec{u} \cdot \vec{w}) = k(0) + l(0) = 0$ für alle Skalare k, l. Damit ergibt sich der Satz:

Satz 25.39. Wenn $\vec{u} \perp \vec{v}$ und $\vec{u} \perp \vec{w}$, dann $\vec{u} \perp (k\vec{v} + l\vec{w})$ für alle Skalare k, l.

25.2 Das Vektorprodukt

25.2.1 Chiralität des Koordinatensystems



Dieser Abschnitt beschreibt eine Eigenschaft des dreidimensionalen Koordinatensystems, das für die folgenden Betrachtungen wichtig ist. Es hilft, Richtungen und damit Vorzeichen eindeutig festzulegen. Bastler wissen, dass es Links- und Rechtsschrauben gibt. Die meisten sind Rechtsschrauben, weil es für Rechtshänder kraftvoller anzuziehen sind.
Die Chiralität, zu Deutsch "Händigkeit", kann linksdrehend oder rechtsdrehend sein. Es gilt die Festsetzung: Ein Rechtssystem im dreidimensionalen Raum sind drei Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$, wenn vom Endpunkt des Vektors $\vec{z}$ aus gesehen die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ ein Rechtssystem in der Ebene bilden. Ein Rechtssystem in der Ebene bedeutet, dass$\vec{x}$, $\vec{y}$, bei denen $\vec{y}$ aus $\vec{x}$ auf kürzestem Wege durch Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn hervorgeht.

25.2.2 Begriff

Wir haben das Skalarprodukt kennengelernt, bei welchem man zwei Vektoren "multipliziert" hat und als Resultat einen Zahlenwert bekommen hat. Das Vektorprodukt, in dieser Logik der Namensgebung, ist eine Multiplikation von Vektoren, die zu einem Vektor führt. Man kann mit dem generischen Verkettungszeichen folgende Darstellung machen:

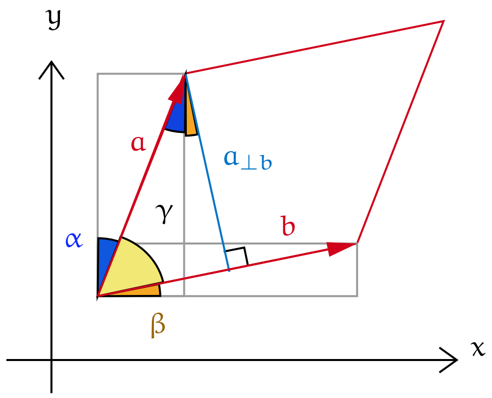
$$\vec{c} = \vec{a} \circ \vec{b}$$

Eigenschaften 25.1. Das Vektorprodukt soll folgende drei Eigenschaften besitzen;

(1) Der Vektor $\vec{c}$ ist normal, d.h. senkrecht, auf der Ebene, die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird,

(2) die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms,

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtshandsystem.



Wir beginnen mit der Flächeneigenschaft und betrachten sie vorerst in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Fläche eines Parallelogramms berechnet sich als Höhe mal Grundseite, in unserer Abbildung also $F = a_{\perp b} \cdot b$. Die Höhe kann man als $a \sin\gamma$ oder $a\cos(\alpha+\beta)$ berechnen. Aus den Additionstheoremen der Trigonometrie wissen wir, dass für Summen von Winkeln gilt: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$. Nun wollen wir die Funktionen durch die Komponenten der Vektoren ersetzen. Es ist $\cos(\alpha) = \frac{a_y}{a}$, $\cos(\beta) = \frac{b_x}{b}$, $\sin(\alpha) = \frac{a_x}{a}$ und $\sin(\beta) = \frac{b_y}{b}$. Somit gilt.

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a_y}{a}\cdot\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\cdot\frac{b_y}{b}$$

Und damit folgt die Fläche aus $F = a_{\perp b}\cdot b = \cos(\alpha+\beta)\cdot ab$:

$$F = a_y \cdot b_x - a_x \cdot b_y.$$

Bevor wir zur Fläche in $\mathbb{R}^3$ zurückkommen, bestimmen wir einen Vektor, der die Eigenschaft (1) erfüllt. Der Vektor $\vec{n}$ soll sowohl senkrect zu $\vec{a}$ als auch $\vec{b}$ sein, wobei diese nicht kollinear sein dürfen. Das heisst, es müssen die zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}\vec{n}\bullet\vec{a} &= 0\\ \vec{n}\bullet\vec{b} &= 0\end{aligned}$$

Da wir aber zwei Gleichungen mit drei Unbekannten haben, ist eine Variable ein Parameter, den wir zu 1 setzen, hier $n_3 = 1$:

$$\begin{aligned}a_1\,n_1 + a_2\,n_2 + a_3\,1 &= 0\\ b_1\,n_1 + b_2\,n_2 + b_3\,1 &= 0\end{aligned}$$

Somit resultiert mit der Determinantenmethode für Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{-a_3b_2 + a_2b_3}{a_1b2 - a_2b_1}\\ n_2 &= \frac{-a_1b_3 + a_3b_1}{a_1b2 - a_2b_1}\\ n_3 &= 1\end{aligned}$$

Wir können nun diesen Vektor strecken ohne seine Richtung zu ändern, indem wir mit dem Nennen multiplizieren und erhalten eine kollinearen, normalen Vektor $\vec{m}$:

$$\begin{aligned}m_1 &= a_2b_3 - a_3b_2\\ m_2 &= a_3b_1 - a_1b_3\\ m_3 &= a_1b2 - a_2b_1\end{aligned}$$

Nun kommen wir auf die Fläche zurück. Das wird eine längere Rechnerei. Es muss aber sein, sonst glaubt man das Resultat nicht. Es beginnt mit (wir schreiben a anstatt $|\vec{a}|$):

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$$

wir quadrieren und machen dann von $\cos(\gamma)^2 + \sin(\gamma)^2 = 1$ gebrauch:

$$(\vec{a} \bullet \vec{b})^2 = a^2b^2(1 - \sin(\gamma)^2) = a^2b^2 - a^2b^2\sin(\gamma)^2$$

der letzte Term entspricht der Fläche $F^2 = a^2b^2\sin(\gamma)^2$. Somit folgt

$$F^2 = a^2b^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

Wir betrachten die zwei Terme vorerst separat und fügen sie dann zusammen. Wir beginnen mit:

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) &= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 \\ &+ a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 \\ &+ a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2\end{aligned}$$

Der zweite Term ist:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \bullet \vec{b})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ &+ a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3 \\ &+ a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3\end{aligned}$$

Nun subtrahieren wir die letzte rechte Seite von der oberen rechten Seite. Je drei Terme kann man geradewegs weglassen, denn sie kommen in beiden Termen vor, nämlich $a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$. Damit folgt;

$$\left.\begin{array}{l} +a_1^2b_2^2 \\ +a_1^2b_3^2 \\ +a_2^2b_1^2 \\ +a_2^2b_3^2 \\ +a_3^2b_1^2 \\ +a_3^2b_2^2 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} +a_1b_1a_2b_2 \\ +a_1b_1a_3b_3 \\ +a_2b_2a_3b_3 \\ +a_1b_1a_2b_2 \\ +a_1b_1a_3b_3 \\ +a_2b_2a_3b_3 \end{array}\right.$$

wir gruppieren etwas um und faktorisieren die Quadrate:

$$\left.\begin{array}{ll} +a_1b_2a_1b_2 & -a_1b_1a_2b_2 \\ +a_1b_3a_1b_3 & -a_1b_1a_3b_3 \\ +a_2b_1a_2b_1 & -a_1b_1a_2b_2 \\ +a_2b_3a_2b_3 & -a_2b_2a_3b_3 \\ +a_3b_1a_3b_1 & -a_1b_1a_3b_3 \\ +a_3b_2a_3b_2 & -a_2b_2a_3b_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +a_1b_2(a_1b_2 - b_1a_2) \\ +a_1b_3(a_1b_3 - b_1a_3) \\ +a_2b_1(a_2b_1 - a_1b_2) \\ +a_2b_3(a_2b_3 - b_2a_3) \\ +a_3b_1(a_3b_1 - a_1b_3) \\ +a_3b_2(a_3b_2 - a_2b_3) \end{array}\right.$$

Von diesen sechs Termen gehören je zwei zusammen, und dann erkennen wir die drei Quadrate

$$\left.\begin{array}{l} +(a_1b_2 - b_1a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ +(a_1b_3 - b_1a_3)(a_1b_3 - a_3b_1) \\ +(a_2b_3 - b_2a_3)(a_2b_3 - a_3b_2) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +(a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\ +(a_1b_3 - a_3b_1)^2 \\ +(a_2b_3 - a_3b_2)^2 \end{array}\right.$$

Das Quadrat der Fläche ist also

$$F^2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

Und nun kommt das Wunder, wenn wir die Terme mit den Komponenten des Normalenvektors $\vec{m}$ vergleichen.

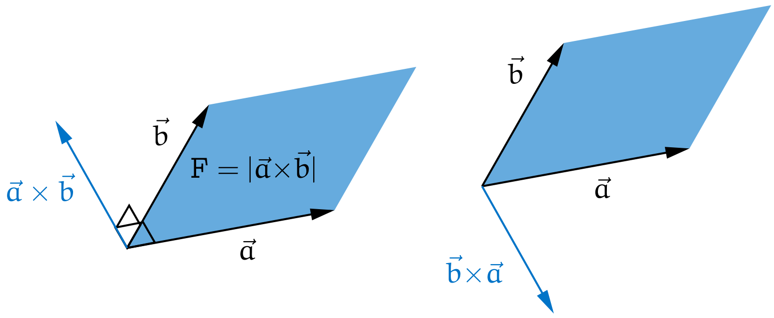
$$F^2 = \underbrace{(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}_{m_3^2} + \underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1)^2}_{m_2^2} + \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2}_{m_1^2}.$$

Wir haben also mit den Vektor $\vec{m}$ den Vektor gefunden, der die geforderten Eigenschaften aufweist, nämlich er ist normal (senkrecht) auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene und sein Betrag entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms!

Definition 41. Es sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Das *Vektorprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, geschrieben $\vec{a} \times \vec{b}$ ist der Vektor in $\mathbb{R}^3$ gemäss:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_2, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

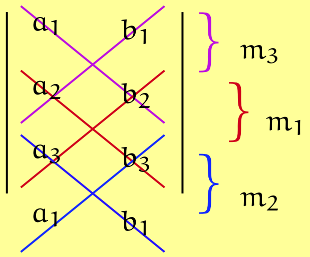
Im der folgenden Abbildung sieht man, in der Zusammenfassung, das Vektroprodukt. Die Rechthandregel besagt, dass für $(\vec{a}, \vec{b})$ und das Vektorprodukt sich wie x, y und z verhalten. Deshalb zeigt $\vec{b} \times \vec{a}$ in die Gegenrichtung. Es gilt also $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



Die Vektoren in der Reihenfolge $\vec{a}$, $\vec{b}$ und das Produkt nach oben sowie $\vec{b}$, $\vec{a}$ und das Produkt nach unten entsprechen dem rechtshändige Systeme. Eine Rotation um den dritten Vektor führt den ersten über den zweiten im Gegenuhrzeigersinn.

25.2 Beispiel Wir bilden das Vektorprodukt der zwei Einheitsvektoren in x- und y-Richtung. Es ist $\vec{e}_x = (1,0,0)$ und $\vec{e}_y = (0,1,0$. Setzt man ein, dann folgt. $((0)(0)-(0)(1),(0)(0)-(1)(0),(1)(1)-(0)(0))$ also $(0,0,1)$. Das ist natürlich $\vec{e}_z$. $\triangleleft$

25.3 Rezept Wir brauchen eine handliche Regel, um das Vektorprodukt zu errechnen.



Die eine Methode besteĥt im Nebeneinaderschreiben der Vektoren. Dann fügt man eine Zeile ein mit den Komponenten der ersten Zeile. In der Art der Determinantenberechnung bilden wir die Differenzen der Produkte. Dabei muss man beachten, dass man mit der dritten Komponente m_3 beginnt und zyklisch dann bei m_1 fortfährt und zu m_2 gelangt.

25.4 Rezept Die andere Methode haben wir schon angedeutet, man berechnet die Determinanten des Gleichungssystems:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \end{array}\right]$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad m_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix} \quad m_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}$$

Satz 25.5. Ist das Vektorprodukt $\vec{c}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die keine Nullvektoren sind, kein Nullvektor, dann ist $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal (senkrecht).

Das Vektorprodukt $\vec{c}$ steht senkrecht auf der Ebene, die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Für den Beweis muss man nur zeigen, dass das Skalarprodukt null ist. Wir zeigen, dass $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a} = 0$ ist:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \bullet (a_1, a_2, a_3) \\ &= a_2b_3a_1 - a_3b_2a_1 + a_3b_1a_2 - a_1b_3a_2 + a_1b_2a_3 - a_2b_1a_3 \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 - b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - a_1b_2a_3 \\ &= 0 \text{ , nach Umstellen der Terme.}\end{aligned}$$

Für $(\vec{b} \times \vec{a}) \bullet \vec{b} = 0$ ist der Beweis ganz analog.

Satz 25.6. Ist θ der Zwischenwinkel der Vektoren, die keine Nullvektoren sind, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$, dann gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\theta) \tag{25.1}$$

25.7 Übung Wir wollen den Flächeninhalt eines Dreiecks, das durch die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$ gebildet werden, ausrechnen. Der vierte Punkt sei S mit $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \vec{v} = \overrightarrow{PR}$. Die Fläche des Parallelogramms ist bekanntlich:

$$F_{PQSR} = u \cdot v \cdot \sin(\theta) = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$ ist offensichtlich die Hälfte, also

$$F_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$

$\triangleleft$

Es gelten für die Flächen folgende Regeln:

Satz 25.8. Flächen von Dreieick und Parallelogramm

(1) Die Fläche F eines Dreiecks mit anliegenden Seiten als Vektoren in $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist:

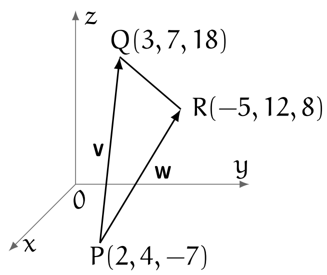
$$F = \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}|$$

(2) Die Fläche F eines Parallelogramms mit anliegenden Seiten als Vektoren in $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist is:

$$F = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

Diese Regeln, da sie den Kosinussatz innehaben, sind einfacher zu handhaben als trigonometrische Vorstellungen im Raum.

25.9 Übung Wir wollen die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$ mit $P = (2,4,-7)$, $Q = (3,7,18)$, und $R = (-5,12,8)$ bestimmen.



Wir legen fest, dass $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{PR}$, gemäss Abbildung. Für $\vec{v} = (3,7,18) - (2,4,-7) = (1,3,25)$ und $\vec{w} = (-5,12,8) - (2,4,-7) = (-7,8,15)$, ergibt sich die Fläche F des Dreiecks $\triangle PQR$ aus dem Vektorprodukt

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| = \frac{1}{2}|(1,3,25) \times (-7,8,15)| \\
&= \frac{1}{2}|((3)(15) - (25)(8), (25)(-7) - (1)(15), (1)(8) - (3)(-7))| \\
&= \frac{1}{2}|(-155,-190,29)| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(-155)^2 + (-190)^2 + 29^2} = \frac{1}{2}\sqrt{60966}
\end{aligned}$$

$F \approx 123.46$

◁

Im folgenden Kasten fassen wir die Eigenschaften des Vektorproduktes zusammen.

Eigenschaften 25.10. Vektorprodukt

Für beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$, und den Skalar k, gilt:

(a) $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ Antikommutatives Gesetz

(b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ Distributivgesetz (I)

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ Distributivgesetz (II)

(d) $(k\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k\vec{w}) = k(\vec{v} \times \vec{w})$ Assozitivität

(e) $\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v}$

(f) $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$

(g) $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ nur und nur dann, wenn $\vec{v} \parallel \vec{w}$

Die Eigenschaften (b)-(f) sind sofort einsichtig. Das (a) können wir folgendermassen herleiten:

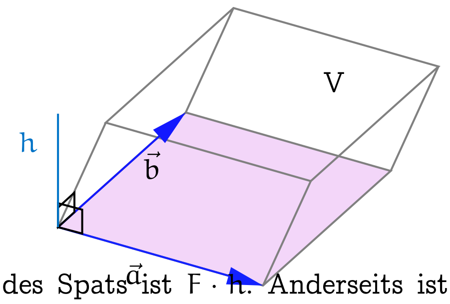
$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \\
&= -(v_3w_2 - v_2w_3, v_1w_3 - v_3w_1, v_2w_1 - v_1w_2) \\
&= -(w_2v_3 - w_3v_2, w_3v_1 - w_1v_3, w_1v_2 - w_2v_1) \\
&= -\vec{w} \times \vec{v}
\end{aligned}$$

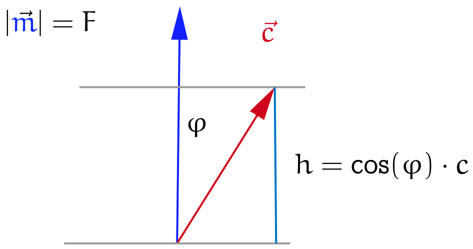
Die Beträge sind gleich, die Richtung ist entgegengesetzt.
Zu (g) lässt sich einfach sagen, dass für zwei Vektoren, die nicht Nullvektoren sind, die also eine Länge haben, die Fläche null ist, wenn $\sin(\theta)$ null ist. Das ist bei $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2} = 180°$ der Fall. Dann sind sie aber parallel (oder kollinear).

25.3 Das Spatprodukt*

Mit dem Vektorprodukt gelingt es, die Fläche des Parallelogramms aus zwei Vektoren zu bestimmen.

Bekanntlich errechnet sich das Volumen eines Prismas, und speziell eines Parallelepipeds, als Grundfläche mal Höhe. Ein Parallelepiped wird von 6 Parallelogrammen begrenzt, von denen je 2 gegenüber liegende deckungsgleich sind und in parallelen Ebenen liegen. Es wird auch "Spat" genannt.





Das Volumen des Spats ist $F \cdot h$. Anderseits ist $F = |\vec{m}|$. Das Skalarprodukt $\vec{c} \bullet \vec{m}$ ist wiederum $F \cdot c \cdot \cos(\varphi)$. Somit folgt $V = \vec{c} \bullet \vec{m} = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$. Also, drei Vektoren, die alle nicht kollinear sind, bilden ein Spat, dessen Volumen bestimmt werden kann.

Definition 42. Das *Spatprodukt* dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Satz 25.1. Bilden drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ die anliegenden Seiten eines Spats, dann ist dessen Volumen gleich

$$V = |\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})|$$

25.2 Übung Wir bestimmen das Volume des Spats, das durch die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, 1, 4)$ und $\vec{c} = (-1, -2, 1)$ gebildet wird. Zuerst berechnen wir den Normalenvektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Wir schreiben

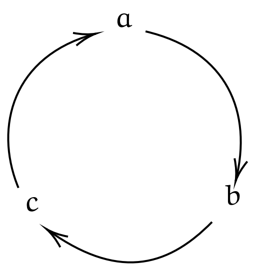
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Damit folgt nach unserem Rezept $m_3 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1$, $m_1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$ und $m_2 = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4$. Zusammen $\vec{m} = (5, -4, 1)$. Das Skalarprodukt ist dann $V = |(-1)5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1| = |4| = 4$. $\triangleleft$

Dasselbe Spat kann man auf drei Arten berechnen, denn zu den drei unterschiedlichen Flächen gibt es drei unterschiedliche Höhen. Aus dieser Betrachtung folgt die Regel

Satz 25.3. Bilden drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ ein Spat, so gilt:

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \bullet (\vec{c} \times \vec{a})$$



Anmerkung 25.4. Im obigen Satz folgt die Reihenfolge dem sogenannten zyklischen Vertauschen. Dabei wird ein Tripel aus der Reihe $a, b, c, a, b, c, a \ldots$ herausgegriffen. Vertauscht man zwei Glieder der Reihe, also z.B. a, c, b, so ändert sich das Vorzeichen. Es gilt z.B.

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \bullet (\vec{c} \times \vec{b}).$$

25.3.1 Determinantenmethode

Wir haben in Rezept 25.4 gesehen, dass man Determinanten verwenden kann, um das Vektorprodukt zu bestimmen. Nun gibt es eine Erweiterung, mit der man das Spatprodukt aus einer 3×3-Matrix in einem Lauf berechnen kann.
Wenn man das Spatprodukt ausschreibt $\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$, so sieht die Summe wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) &= (c1, c2, c3) \bullet (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_2, a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Terme mit dem Schema von Sarrus vergleichen,

$$\begin{array}{|ccc|cc}
\multicolumn{1}{c}{+} & + & \multicolumn{1}{c}{+} & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
\multicolumn{1}{c}{-} & - & \multicolumn{1}{c}{-} & &
\end{array}$$

, dann sehen wir, dass gilt:

$$V = \det(\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2. \end{array}\right.$$

Wir testen die Formel am obigen Beispiel, dessen Lösung wir kennen. Die Determinante ist

$$V = \det(\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})) = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right.$$

Wir erhalten folgendes Resultat $V = 1 - 8 + 0 - (-3) - (-8) - 0 = 4$ Heureka!

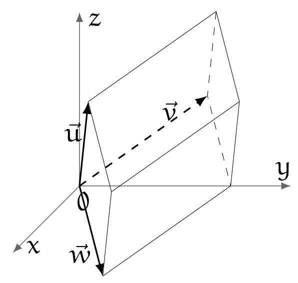
Satz 25.5. Für das Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{25.2}$$

Anmerkung 25.6. Anstatt die Komponenten der Vektoren zeilenweise zu notieren, kann man sie auch spaltenweise schreiben, ohne das Resultat zu ändern.

25.7 Beispiel Bestimme das Volumen des Spates mit den anliegenden Seitenvektoren $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ und $\vec{w} = (1, 1, -2)$

Wir rechnen also mit der Determinante



$$\det(\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Dann erweitern wir die Matrix zum Schema

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Daraus berechnen wir das Volumen $V = (2 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1) - (3 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2)) = -12 + 2 - 3 - 9 - 4 - 2 = 28$ $\triangleleft$

25.3.2 Tripelprodukt**

Wir haben die Produkte $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \bullet \vec{c}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$ schon betrachtet ($(\vec{a} \bullet \vec{b}) \times \vec{c}$ ist sinnlos). Es bleibt also $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, für das angeblich gilt:

Satz 25.8. Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c}$$

Mit der Wahl von $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, 0, 0)$ und $\vec{c} = (c_1, c_2, 0)$ rechnen wir das Vektorprodukt in der Klammer aus und dann das zweite Produkt nach

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ 0 & c_2 \\ 0 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \\ a_3 & b_1 c_2 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_1 c_2 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{25.3}$$

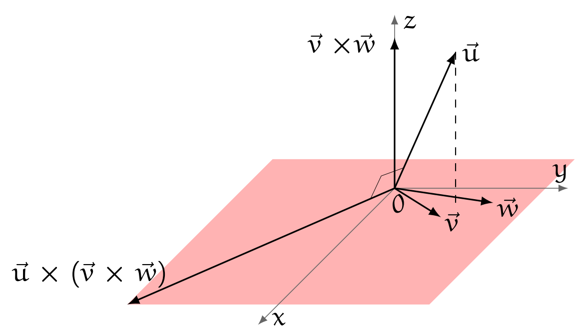
Anderseits rechnen wir

$$(\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c} = (a_1 c_1 + a - 2c_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - a_1 b_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 c_1 b_1 + a_2 c_2 b_1 - a_1 b_1 c_1 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_1 c_2 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Vergleich bestätigt den Satz.

Anmerkung 25.9. Man beachte, dass das Tripelprodukt einen Vektor produziert. Dieser liegt, da zweimal senkrecht auf der Ebene, wieder in der Ebene.



25.10 Übung Bestimmen wir $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ für $\vec{u} = (1, 2, 4)$, $\vec{v} = (2, 2, 0)$, $\vec{w} = (1, 3, 0)$. Da $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ und $\vec{u} \cdot \vec{w} = 7$, folgt

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \\
&= 7\,(2, 2, 0) - 6\,(1, 3, 0) = (14, 14, 0) - (6, 18, 0) \\
&= (8, -4, 0)
\end{aligned}$$

Wie in der Abbildung ersichtlich, liegen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in der xy-Ebene. Ebenso $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. Deshalb ist $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ orthogonal zu beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v} \times \vec{w} = (0, 0, 4)$. ◁

25.3.3 Vierfachprodukt**

Man kann natürlich beliebig viele Produkte aneinanderreihen. Hier gibt es einfache Aequivalenzen. Mit vier Termen beenden wir die Serie.

Satz 25.11. Es gilt für vier Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ in $\mathbb{R}^3$.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})(\vec{v} \bullet \vec{z}) - (\vec{u} \bullet \vec{z})(\vec{v} \bullet \vec{w})$$

25.12 Übung Wir wollen die obige Formel herleiten unter Verwendung des Resultats für das Tripelprodukt. Zur Vereinfachung schreiben wir auch $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) &= \vec{a} \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) \\
&= \vec{w} \cdot (\vec{z} \times \vec{a}) \quad \text{(zyklisch tauschen)} \\
&= \vec{w} \cdot (\vec{z} \times (\vec{u} \times \vec{v})) \\
&= \vec{w} \cdot ((\vec{z} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{z} \cdot \vec{u})\vec{v}) \quad \text{(als Tripelprodukt)} \\
&= (\vec{z} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{u}) - (\vec{z} \cdot \vec{u})(\vec{w} \cdot \vec{v}) \\
&= (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad \text{(kommutativ).}
\end{aligned}$$

◁

25.4 Anwendungen zu Linien und Ebenen

Wir kennen nun die Grundbegriffe und Rechenregeln für die Vektoren. Damit können wir nun Fragestellungen zu Geraden und Ebenen im Raum nachgehen. Wir behandeln einen gewissen Vorrat an Standardaufgaben.

25.4.1 Darstellungsformen

Wir haben darauf hingewiesen, dass die Vektorgeometrie im 19. Jahrhundert von Hermann Grassmann *erfunden* wurde. Sie ist ein Formalismus, um einfacher rechnen zu können. Vor dieser Zeit wurden aber die Probleme schon behandelt. Die ältere Darstellung kann man als *analytisch* bezeichnen. Sie fusst als Beschreibung des Raumes und damit der Geometrie auf *Gleichungen*. Gleichungen sind Bedingungen für Punkte und Punktmengen, die man wiederum in der einfachen Geometrie als *geometrische Örter* bezeichnet.
Zur Berechnung spezieller Grössen ist es praktisch, zwischen den zwei Darstellungen als Vektor und als Gleichung hin und her zu wechseln oder sie zu mischen, je nach dem, welche vorteilhafter ist. Deshalb wird im folgenden auf den zwei Darstellungen beharrt. Wir verzichte aber, als drittes die Verhältnisse als Mengen darzustellen.

25.4.2 Linien

Gerade durch Punkt mit bestimmter Richtung

Diese Aufgaben haben wir schon weiter oben kennengelernt (Abschnitt 25.1.2).
In einem Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ in $\mathbb{R}^3$ soll die Gerade durchgehen, die die Richtung parallel zum Richtungsvektor $\vec{v} = (a, b, c)$ aufweist. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ ist der Stützvektor. Jeder Punkt der Gerade kann durch einen bestimmten Parameterwert erreicht werden, wenn der Richungsvektor damit gestreckt oder gestaucht wird, wenn der Parameter t also im Intervall $J = (-\infty, \infty)$ liegt. Die Gleichung der Gerade g ist in Parameterform:

Formel 25.1.

$$g: \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot a \\ y_0 + t \cdot b \\ z_0 + t \cdot c \end{pmatrix}$$

Anmerkung 25.2. Der Punkt P stimmt mit dem Parameterwert $t = 0$ überein.

Aus der Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot a \\ y_0 + t \cdot b \\ z_0 + t \cdot c \end{pmatrix}$$

kann man komponentenweise den Parameter t ausrechnen und die Terme gleichsetzen. Dies ist die analytische Darstellung der Geraden. Für den Richtungsvektor, dessen Komponenten alle nicht-null sind, folgt die Darstellung

Formel 25.3.

$$g: \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Falls beispielsweise $a = 0$ ist, darf man die x-Komponente nicht als Bruch darstellen. In diesem Fall hat die Gerade keine Änderung in x, d.h. sie liegt in der Ebene mit konstantem $x = x_0$. Deshalb schreibt man dann

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Für $b = 0$ und $c = 0$ geht man analog vor.

25.4 Übung Wir bestimmen die Gerade g mit Stützvektor $\vec{r} = (2, 3, 5)$ und Richtungsvektor $\vec{v} = (4, -1, 6)$ in verschiedenen Formen.
Mit der Formel schreiben wir

$$g: \quad \vec{r} + t\vec{v} = (2, 3, 5) + t(4, -1, 6), \quad \text{für } -\infty < t < \infty$$

In Komponentenform

$$g: \quad x = 2 + 4t, \quad y = 3 - t, \quad z = 5 + 6t, \quad \text{für } -\infty < t < \infty$$

und analytisch

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 5}{6}$$

Jetzt finden wir zwei beliebige Punkte auf g, indem wir zwei Werte für t wählen, z.B. $t = 1$ und $t = 2$. Damit sind die zwei Punkte $(6, 2, 11)$ und $(10, 1, 17)$ auf g. ◁

Gerade durch zwei Punkte

Es sind $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ and $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ zwei verschieden Punkte in $\mathbb{R}^3$. Die Gerade h wird durch sie bestimmt. Mit $\vec{r_1} = \overrightarrow{OP_1}$ und $\vec{r_2} = \overrightarrow{OP_2}$. Wir wählen einen der zwei als Stützvektor und bestimmen den Richtungsvektor als Differenz $r_2 - r_1$. Damit folgt für die Geradengleichung:

Formel 25.5. Für $-\infty < t < \infty$ ist h vektormässig:

$$h: \quad \vec{r} = r_1 + t \cdot (r_2 - r_1)$$

Komponentenweise

$$h: \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t$$

und analytisch

$$h: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (\text{falls } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2, \text{ und } z_1 \neq z_2).$$

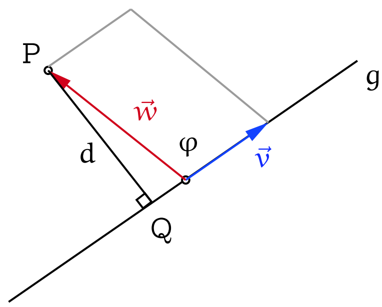
25.6 Beispiel Gesucht die Gerade h durch die zwei Punkte $P_1 = (-3, 1, -4)$ und $P_2 = (4, 4, -6)$ komponentenweise. Den ersten Punkt interpretieren wir als Stützvektor und die Richtung ist die Differenz der beiden Ortsvektoren, also $\vec{v} = (-7, -3, 2)$. Damit folgt

$$x = -3 - 7t, \quad y = 1 - 3t, \quad z = -4 + 2t,$$

◁

Abstand zwischen Punkt und Gerade

Die Gerade g in Vektorform ist $\vec{r} + t\vec{v}$ (für $-\infty < t < \infty$), und P ist ein Punkt, der nicht auf g liegt. (Denn was wäre sonst der Witz der Sache?) Der Abstand ist die kürzeste Verbindung zwischen dem Punkt und der Geraden. Deshalb steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Geraden g. Aus der Abbildung ist das Parallelogramm ersichtlich, das durch den Richtungsvektor $\vec{v}$ und einem beliebigen Vektor $\vec{w}$ mit Aufpunkt P und Anfangspunkt auf g gebildet wird. Ihre Fläche ist $F = |\vec{v} \times \vec{w}|$ und $F = d \cdot v$. Also gilt für den Abstand d:



Formel 25.7. Abstand Punkt von Geraden

$$d = \frac{|\vec{v} \times \vec{w}|}{v}$$

25.8 Beispiel Wir bestimmen den Abstand d zwischen der Geraden mit $Q = (-3, 1, -4)$ und $\vec{v} = (7, 3, -2)$ und dem Punkt $P = (1, 1, 1)$. Wir bilden den Vektor $\vec{w}$ als $\overrightarrow{QP} = (1, 1, 1) - (-3, 1, -4) = (4, 0, 5)$. Das Vektorprodukt ergibt sich aus

$$\left|\begin{array}{rr} 7 & 4 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{array}\right|$$

als $(3\cdot5, -2\cdot4-5\cdot7, 7\cdot0-(4\cdot3))$ und somit $(15, -43, -12)$. Seine Länge beträgt (Pythagoras) $\sqrt{15^2+43^2+12^2} = \sqrt{225+1849+144} = \sqrt{2218}$. Jetzt brauchen wir noch die Längen v. Es ist $v = \sqrt{49+9+4} = \sqrt{62}$. Der Abstand beträgt also

$$d = \frac{\sqrt{2218}}{\sqrt{62}} = \sqrt{\frac{2218}{62}} = \sqrt{35.77} = 5.98$$

Die Abstandsberechnung erfordert etwas Rechenleistung. ◁

Abstand zweier Geraden

Auf Seite 25-6 haben wir die vier Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden im Raum schon aufgezählt. Wenn sie identisch sind, ist der Abstand null. Wenn sie sich schneiden, ist der kleinst Abstand ebenfalls null. Sind sie parallel, haben sie überall denselben Abstand und sind sie windschief, was der häufigste Fall ist, gibt es einen kürzesten Abstand. Die Fälle identisch und parallel haben gemeinsam, dass die zwei Richtungsvektoren der Gleichung kollinear sind, also $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.
Wir nehem zwei Geraden g und h mit den jeweiligen Vektordarstellungen in Parameterform. Man beachte, jede Gerade hat unterschiedliche Parameter, hier s und t:

$$g: \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix}-3\\8\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Schnittpunkt, so erfüllen seine Koordinaten $(x_s, y_s, z_s$ komponentenweise die Bedingungen der zwei Geraden. In der Parameterdarstellung fragt man also nach dem Wertepaar (s,t), das für den Schnittpunkt gilt. Die Bedingungen der Komponenten bilden ein Gleichungssystem für die Unbekannten s und t. Drei Gleichungen für zwei Unbekannte. Wir berechnen diese Werte aus zwei Gleichungen und testen sie an der dritten.

$$\begin{aligned} -1+3s &= -3+t \\ 2+2s &= 8-3t \\ 1+s &= -3+2t \end{aligned}$$

bringen wir in die Form, unter Weglassung der dritten Gleichung:

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 3s & - & 1t & = & -2 \\ 2s & + & 3t & = & 6 \end{array} \right|$$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix rechnen wir im Kopf als $3\cdot3+1\cdot2 = 11$ aus

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Für s ergibt sich

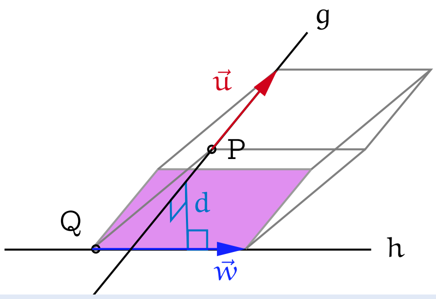
$$s = \frac{1}{11}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{0}{11} = 0.$$

Und für t:

$$t = \frac{1}{11}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{18+4}{9} = \frac{22}{11} = 2.$$

Wir testen die Werte $(0,2)$ an der dritten Gleichung und erhalten $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$. Auch die dritte Gleichung ist erfüllt, die Geraden schneiden sich in $Q = (-1,2,-1)$.
Das war nun zufällig. Wir sollten eine Möglichkeit haben, den allgemeinen Falls zu rechnen, aus dem sich der spezielle auch ergibt.

Wir betrachten das Spat, das durch die zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und einen Verbindungsvektor $\overrightarrow{QP}$ aufgespannt wird. Die Distanz d ist die Höhe zur Grundfläche aus $\vec{u}$ und $\vec{w}$ im Punkt Q. Die Höhe ist bekanntlich für Prismen – und das Parallelepiped ist ein solches – das Verhältnis von Volumen zu Grundfläche. Also folgt:



Formel 25.9. Abstand zweier windschiefer Geraden

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \bullet (\vec{w} \times \vec{u})|}{|\vec{w} \times \vec{u}|}$$

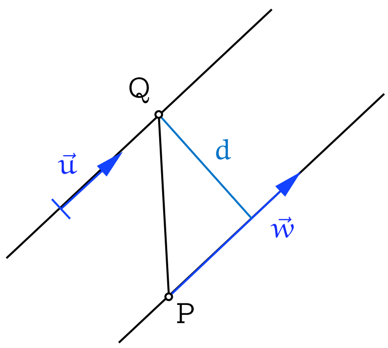
25.10 Übung Wir nehmen die Ausgangslage vom obigen Beispiel. Wir unterscheiden dann zwei Unterbeispiele, (a) genau wie oben und (b) $P = (-1,2,1)$ wird durch $P' = (1,2,1)$ ersetzt, damit sich die Gerade eben nicht schneiden. P' haben wir willkürlich gewählt, sodass $P \neq P'$. Für beide Varianten brauchen wir das Vektorprodukt der Richtungsvektoren

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Daraus folgt $(4+3, 1-6, -9-2) = (7,-5,-11)$. Es ist $\overrightarrow{PQ} = (-2,6,-4)$ und $\overrightarrow{P'Q} = (-4,6,-4)$. Das erste Skalarprodukt ergibt $(7,-5,-11) \bullet (-2,6,-4) = (-14-30+44) = 0$. Schön, wir haben die richtige Distanz von null gefunden, die Geraden schneiden sich.
Für (b) folgt das Skalarprodukt als $(-4,6,-4) \bullet (7,-5,-11) = -28-30+44 = -14$. Wir brauchen noch die Länge von $= \vec{u} \times \vec{w} = (7,-5,-11)$. Diese beträgt $\sqrt{49+25+121} = \sqrt{175}$. Die Distanz der der beiden Geraden ist:

$$d = \frac{14}{\sqrt{175}} = 1.06$$

Die Formel ist auch für sich schneidende Geraden richtig. ◁



Was ist aber mit parallelen Geraden? Dann ist genau $\vec{u} \times \vec{u} = 0$. Wenn also $\vec{w} = k \cdot \vec{u}$, dann kann man die Fläche des Parallelogramms durch die Seitenlänge des Richtungsvektors, auf der die Distanz als Lot steht dividieren. Also

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}|}{w}.$$

Zusammenfassend lautet die Strategie zur Bestimmung des Abstands zweier Geraden:

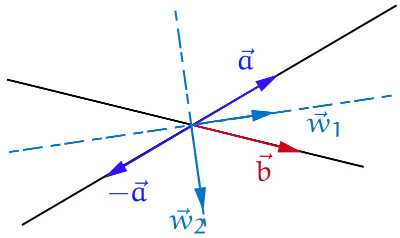
(1) Finde heraus, ob die Richtungsvektoren parallel (kollinear) sind,

(2) wenn ja, bestimme Fläche des Vektorprodukts und teile durch Seitenlänge, wenn nein

(3) berechne Spatvolumen und dividiere durch Fläche.

Winkelhalbierende

Wir suchen die Bestimmung der Winkelhalbierenden zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Es gibt zwei davon, nämlich die des spitzen Winkels $\vec{w}_1$ und die des stumpfen Winkels $\vec{w}_2$. Die Grundüberlegung ist, die zwei Richtungsvektoren auf Einheitslänge zu stauchen, also $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$ und $\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{b}$ und sie einfach zum neuen Richtungsvektor zu addieren. Der Richtungsvektor $\vec{w}_1$ ist eine Linearkombination der zwei Einheitsvektoren in der Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{w}_1 = t \cdot \vec{e}_a + t \cdot \vec{e}_b$.



Formel 25.11. Winkelhalbierende zweier Vektoren Die Richtungsvektoren der zwei Winkelhalbierenden sind

$$w_1 : \qquad \vec{w}_1 = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$$

und

$$w_2 : \qquad \vec{w}_2 = \frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{b}}{b}$$

25.12 Übung Es sind zwei Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 3)$ und $\vec{b} = (2, 1, -1)$ gegeben. Die dazugehörigen Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_b = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgen die Winkelhalbierenden

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} + 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{10} - 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} - 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{10} + 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

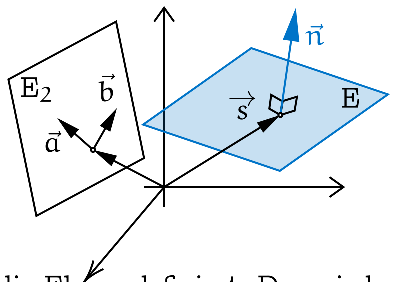
$\triangleleft$

25.4.3 Ebenen

Ebene durch Punkt mit Normalenvektor

Die Eben haben wir vektormässig schon auf Seite 25-6 definiert als

$$E: \quad \vec{s} + k\vec{u} + m\vec{v} \qquad \text{mit } k, m \in \mathbb{R}.$$



Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{w}$ und ist kollinear mit $\vec{u} \times \vec{w}$. Mit der Angabe des Normalenvektors und eines Aufpunkts P mit Ortsvektor $\vec{r'} = (x_0, y_0, z_0)$ ist die Ebene definiert. Denn jeder Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ auf der Ebene, der nicht $\vec{r'}$ ist, erfüllt die Bedingung $\vec{n} \bullet (\vec{s} - \vec{r}) = 0$. Damit lautet die analytische Darstellung der Ebene:

$$E: \qquad \vec{n} \bullet (\vec{s} - \vec{r}) = n_1(x_0 - x) + n_2(y_0 - y) + n_3(z_0 - z) = 0$$

oder wenn man die bestimmten Terme zusammenfasst:

$$E: \qquad n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + d = 0$$

Also, kurz und bündig:

Satz 25.13. Eine Ebene mit einem Punkt (x_0, y_0, z_0) und einem Normalenvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, der nicht der Nullvektor ist, erfüllt die Vektorgleichung

$$E: \qquad \vec{n} \bullet (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

Wichtig 4. Man sollte auch die Form $\vec{n} \bullet r = \vec{n} \bullet r_0$ memorisieren. $\vec{r} = (x, y, z)$ ist der allgemeine Vektor und $\vec{r}_0$ ist ein Punkt in der Ebene. ⊣

Alternativ gilt für die Ebene auch:

Satz 25.14. Eine Ebene E besitze einen Stützvektor $\vec{s}$, zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ in der Ebene und den Normalenvektor $\vec{n}$. Dann kann man die Ebene darstellen verktormässig als

$$E: \qquad \vec{s} + k\vec{u} + m\vec{v}$$

25.15 Übung Bestimme die Ebene E, die den Punkt $P = (-3, 1, 3)$ enthält und den Normalenvektor $\vec{n} = (2, 4, 8)$ aufweist. Das Resultat ist sehr einfach, unter Verwendung der Normalenform der Ebene: Die Punkte (x, y, z) liegen in der Ebene

$$2(x + 3) + 4(y - 1) + 8(z - 3) = 0$$

Dies ist äquivalent mit

$$\begin{aligned} 2(x+3) + 4(y-1) + 8(z-3) &= 0 \\ 2x + 4y + 8z + (6 - 4 - 8 \cdot 3) &= 0 \\ 2x + 4y + 8z &= 22 \end{aligned}$$

Wir wollen die z-Komponente des Vektors $c = (1, 5, z)$ bestimmen, so dass c in der Ebene E liegt. Einsetzen führt zur Gleichung

$$2 + 20 + 8z = 22 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0.$$

Der Normalenvektor bestimmt die Koeffizienten und der Punkt die Konstante. ◁

Definition 43. (**Normalform der Ebene**) Wir nennen folgende Gleichung die *Normalform* der Ebene

$$E: \qquad ax + by + cz + d = 0$$

Anmerkung 25.16. Man beachte den Zusammenhang von Normalform und Vektorform:

$$\underbrace{ax + by + cz}_{\vec{n} \bullet \vec{r}} + \underbrace{d}_{-\vec{n} \bullet \vec{r}_0} = 0$$

Die vorangehende Gleichung hat folgende Normalform: $2x + 4y + 8z - 22 = 0$.
In der Form $2x + 4y + 8z - 22 = 0$ ist der erste Teil $2x + 4y + 8z = \vec{n} \bullet \vec{r}$ und der zweite Teil $22 = -\vec{n} \bullet \vec{r}_0$ eines Punktes in der Ebene.

Ebene aus drei nicht-kollinearen Punkten

Drei Punkte, die nicht alle kollinear sind, d.h. nicht auf einer Geraden liegen, bilden eine Ebene im Raum. Wenn sie kollinear wären, dann gäbe es unendlich viele Ebnen mit diesen drei Punkten. Wir nehmen drei Punkte an, P, Q und R mit den Ortsvektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$. Aus zwei beliebigen der drei berechnen wir einen Normalenvektor $\vec{n} = (\vec{p} - \vec{r}) \times (\vec{q} - \vec{r})$. Mit dem dritten schreiben wird dann für die Ebene E: $\vec{n} \bullet \vec{r} = 0$. Die Ebene aus drei Punkten ist

Formel 25.17. Ebene aus drei Punkten Aus den drei Vektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$ und dem allgemeinen Vektor $\vec{s} = (x, y, z)$ ist die gegeben als Ebene

$$\big((\vec{p} - \vec{r}) \times (\vec{q} - \vec{r})\big) \bullet (\vec{s} - \vec{r}) = 0$$

25.18 Beispiel Wir suchen die Gleichung der Ebene E, welche aus den drei Punkten (Ortsvektoren) $\vec{p} = (2, 1, 3)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$ and $\vec{r} = (3, 2, 1)$ gebildet wird. Wir besimmen das Vektorprodukt als Normalenvektor:

$$\left|\begin{array}{cc} 2-3 & 1-3 \\ 1-2 & -1-2 \\ 3-1 & 2-1 \\ 2-3 & 1-3 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad (-1+6, -4+1, 3-2) = (5, -3, 1)$$

Damit haben wir $\vec{n}$. In die Normalform der Ebene eingesetzt mit $\vec{r}$ folgt:

$$E: \qquad 5(x-3) - 3(y-2) + (z-1) + d = 0$$

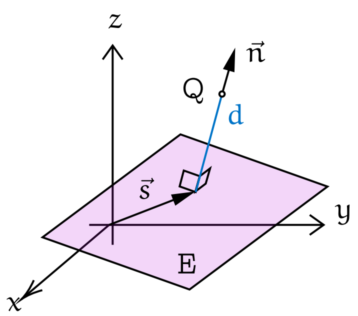
und damit

$$E: \qquad 5x - 3y + z + 10 = 0.$$

◁

Abstand eines Punktes von der Ebene

Wir kennen einen Punkt Q, der nicht auf der Ebene liegt und die Ebene E. Die Ebene kann auf vektormässig auf zwei Arten beschrieben sein, d.h. $\vec{s}$ und $\vec{n}$ oder $\vec{s}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$, oder als Gleichung etc.



Somit können wir dieses Problem mit dem vorhandenen Wissen auf mehrere Arten lösen. Zum Beispiel können wir ausgehend von Q dort $-\vec{n}$ ansetzen und mit der Ebene schneiden. Oder einen Punkt P der Ebene bestimmen, die Differenz der Ortsvektoren bilden und mit dem Normalenvektor n das Skalarprodukt bilden.
Wir nehmen an, wir kennen die Normalform der Ebene, also $ax + by + cz + d = 0$ und den Punkt $Q = (x_0, y_0, z_0)$. Daraus kennen wir $\vec{n} = (a, b, c)$. Wir nehmen einen Punkt P in der Ebene E an mit $P = (x_1, y_1, z_1)$. Für diesen muss also gelten $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$. Wir setzen $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$. Die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{n}$ bilden einen Winkel φ, sodass der Abstand $D = \cos(\varphi) \cdot r$ sein muss. Wir wissen vom Skalarprodukt, dass gilt $\vec{r} \bullet \vec{n} = \cos(\varphi) \cdot r \cdot n$, oder umgeformt und eingesetzt

$$D = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{n}$$

Die Betragsstriche haben wir eingeführt, weil die Distanz positiv sein soll, unabhängig davon, ob Q sozusagen über der Ebene oder darunter liegt. Wir setzen nun $\vec{r}$ ein und bekommen

$$\begin{aligned} D &= \frac{|ar_x + br_y + cr_z|}{n} \\ &= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{n} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + z_1)|}{n} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{n} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Satz 25.19. Es ist $Q = (x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt, der nicht in der Ebene E liegt. E ist gegeben durch die Normalform $ax + bx + cz + d = 0$. Der Abstand D zwischen Q und E ist

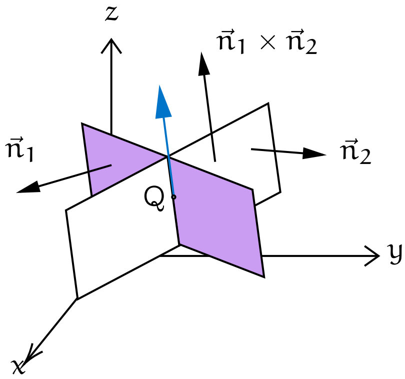
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

25.20 Beispiel Bestimmen wir den Abstand von $Q = (2, 4, -5)$ und der Ebene $5x-3y+z-10 = 0$. Es ist $(a, b, c) = (5, -3, 1)$. Einsetzen in die Formel ergibt

$$\begin{aligned} D &= \frac{|5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 5 - 10)|}{\sqrt{25 + 9 + 1}} \\ &= \frac{|-17|}{\sqrt{35}} \\ &= \frac{17}{\sqrt{35}} = 2.87 \end{aligned}$$

◁

Schnittlinie zweier Ebenen



Zwei Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden g, wenn die Ebenen nicht parallel sind. Wenn sie parallel sind, so sind ihre Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ parallel. Zwei Vektoren sind parallel, wenn $\vec{n_1} \bullet \vec{n_2} = n_1 n_2$ oder $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = 0$.
Die Schnittgerade g ist mengentheoretisch die Menge der Punkte, die sowohl zur Ebene E_1 als auch zur Ebene E_2 gehören. Weil der Vektor $\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$ senkrecht auf $\vec{n_1}$ steht, liegt er in einer Ebene E_1', die parallel zu E_1 ist. Desgleichen ist $\vec{n_2}$ senkrecht auf $\vec{v}$ und liegt somit in einer Ebene E_2', die parallel zu E_2. Damit liegt $\vec{v}$ auf der Schnittgeraden zweier Ebenen E_1' und E_2'. Wir müssen nun noch die richtigen Ebenen wählen, nämlich diejenige, die einen Punkt Q mit Ortsvektor $\vec{r}$ gemeinsam haben. Damit folgt für die Gerade g:

Formel 25.21. Schnittgerade zweier Ebenen

$$g: \qquad \vec{r} + t \cdot (\vec{n_1} \times \vec{n_2}) \quad \text{für } -\infty < t < \infty$$

25.22 Beispiel Wir suchen die Schnittgerade der zwei Ebenen E_1 mit $5x - 3y + z - 10 = 0$ und E_2 mit $2x + 4y - z + 3 = 0$. Sofort erkennen wir die Normalenvektoren $\vec{n_1} = (5, -3, 1)$ und $\vec{n_2} = (2, 4, -1)$. Damit ergibt sich der Vektor $\vec{v}$ als

$$\left|\begin{array}{rr} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Damit kommen wir zum zweiten Teil, dem gemeinsamen Punkt Q. Gemeinsame Punkte erfüllen beide Ebenengleichungen gleichzeitig, d.h.

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z - 10 &= 0 \\ 2x + 4y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Das System von zwei Gleichungen für drei Unbekannte lässt uns die freie Wahl eines Wertes. Da die Ebenen nicht parallel zur x-Achse sind, hat die Schnittgerade eine x-Komponente. Wir wählen $x = 0$, damit die Rechnung einfach wird. Vereinfacht

$$\begin{aligned} -3y + z - 10 &= 0 \\ 4y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir addieren die Gleichungen und erhalten, da das z wegfällt, $y - 7 = 0$ und damit $y = 7$. Damit folgt $z = 10 + 3 \cdot 7 = 31$. Wir haben also ein Q gefunden mit $(0, 7, 31)$. Damit ist die Schnittgerade g:

$$g : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 31 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 26 \end{pmatrix}$$

oder komponentenweise

$$x = -t, \quad y = 7 + 7t, \quad z = 31 + 26t, \quad \text{für } -\infty < t < \infty$$

$\triangleleft$

Schnittwinkel zwischen Ebene und Geraden

Die einfachst Berechnung geht vom Winkel zwischen Normalen der Ebene und Richtungsvektor der Geraden aus. Das Skalarprodukti liefert diesen Winkel ϕ. Der Winkel zur Ebene ist der Komplementärwinkel ϑ, also $\vartheta = 90° - \phi$. Es gilt $\cos(\phi) = \sin(90° - \phi)$, deshalb $\sin(\vartheta) = \cos(\phi)$. Damit ist die Formel gefunden.

Formel 25.23. Schnittwinkel zwischen Ebene und Geraden

$$\sin(\vartheta) = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{v}|}{n \cdot v}$$

Der Winkel ist $\vartheta = \arcsin(\sin(\vartheta))$.

25.24 Übung Es ist $g : (0, 0, 0) + t(1, 2, 3)$ und $E : x + y + 2z + 3$. Wir berechnen den Zwischenwinkel ϑ. Der Normalenvektor ist $\vec{n} = (1, 1, 2)$. Mit der Formel folgt

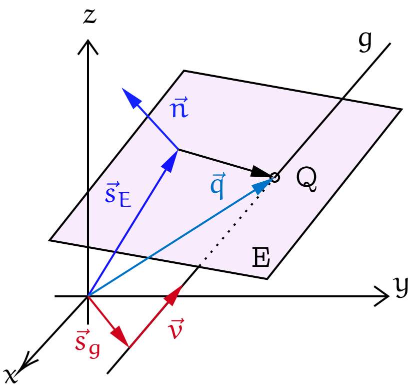
$$\sin(\vartheta) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{1 + 4 + 9}\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{14 \cdot 6}} = \frac{9}{\sqrt{84}} = 0.982$$

und daraus

$$\arcsin(0.982) = 1.380 = 79.11^\circ$$

(Der dazugehörige stumpfe Winkel ist 169.11°.) ◁

Durchstosspunkt in Ebene



Es wird nach dem Punkt gefragt, in dem eine beliebige Gerade g eine Ebene E durchstösst. Das ist nur dann der Falle, wenn die Gerade nicht parallel zur Ebene ist oder nicht in der Ebene selber liegt. Der Punkt Q mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{q}$ muss sowohl die Geradengleichung als auch die Ebenengleichung erfüllen. Die Gerade ist gegeben durch einen Stützvektor $\vec{s}_g$ und den Richtungsvektor $\vec{v}$, somit

$$g: \qquad \vec{s}_g + t \cdot \vec{v}.$$

Die Ebene wiederum sei mit Stützvektor $\vec{s}_E$ und Normalen $\vec{n}$ gegeben. Die Bedingungen lauten somit

$$\vec{q} = \vec{s}_g + t \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{n} \bullet (\vec{q} - \vec{s}_E) = 0$$

Die erste in die zweite einsetzen

$$\vec{n} \bullet (\vec{s}_g + t \cdot \vec{v} - \vec{s}_E) = 0$$

und damit nach ein paar Umstellungen

$$t = \frac{\vec{n} \bullet (\vec{s}_E - \vec{s}_g)}{\vec{n} \bullet \vec{v}}$$

Dies wiederum in die Geradengleichung eingesetzt führt zu folgender allgemeinen Gleichung für $\vec{n} \bullet \vec{v}$

Formel 25.25. Durchstosspunkt

$$\vec{q} = \vec{s}_g + \frac{\vec{n} \bullet (\vec{s}_E - \vec{s}_g)}{\vec{n} \bullet \vec{v}} \vec{v}.$$

Anmerkung 25.26. Man könnte auch aus den drei Komponentengleichungen für die Gerade und die Gleichung der Ebene den Parameterwert t berechnen. Das ist aber eher mühsam.

25.27 Übung Es ist die Ebene E gegeben als $x + y + 2z + 5 = 0$ und die Gerade g als

$$g: \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Normalform liefert $\vec{n} = (1, 1, 2)$ und $\vec{n} \bullet \vec{s}_E = -5$, denn $x + y + 2z = \vec{n} \bullet \vec{q}$. Wir berechnen $\vec{n} \bullet \vec{s}_g = 1 + 0 + 4 = 5$ und $\vec{n} \bullet \vec{v} = 1 - 1 + 4 = 4$.
Nun setzen wir ein

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-5-5}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◁

25.5 Geschlossene Kurven und Flächen

Wir haben eine Fläche bereits diskutiert, nämlich die Ebene. Es gibt aber noch weitere Flächen, man denke an die Kugel oder Zylinder etc. Eine geschlossene Kurve ist der Kreis oder die Ellipse. Um klar zu machen, dass man die Kurve und nicht den Inhalt meint, spricht man auch von Kreisrand und Kreisfläche.

Definition 44. Falls eine Kurve ganz in einer Ebene liegt, dann nennt man sie *ebene Kurve* andernfalls *Raumkurve*.

25.5.1 Kreis und Kugel

Der Kreis lässt sich mit dem Zirkel mit konstanter Öffnungswinkel zeichnen. Dabei beschreibt der Kreis die Menge der Punkte, die gewählten Mittelpunkt einen festen Abstand aufweisen. Diese Eigenschaft wird der Definition zugrunde gelegt. Wenn man eine Kugel in lauter Scheiben schneidet, so ergeben sich Kreisscheiben mit unterschiedlichem Durchmesser. Die Kugel ist eine Art Verallgemeinerung des Kreises.

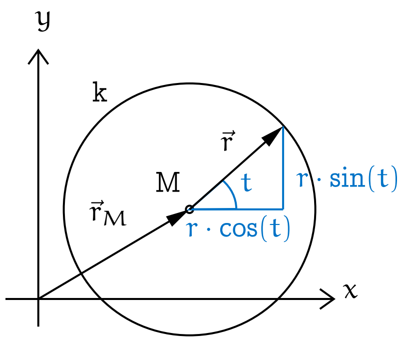
Definition 45. In einer Ebene E ist ein *Kreis* k mit Mittelpunkt $M \in E$ und Radius $r > 0$ die Punktmenge

$$k = \left\{X \in E \mid \overline{MX} = r\right\},$$

Vektoriell

$$k: \qquad (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = r^2 \tag{25.4}$$

Die dritte Darstellung des Kreises ist die Parameterdarstellung der Komponennten. Wie man der Abbildung entnimmt, spielt der Winkel t die Rolle des Parameters. Für den vollen Kreis durchläuft er die Werte $0 \leqslant t < 2\pi$ ($0° \leqslant t < 360°$). Also



$$k: \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

oder mit den Einheitsvektoren

$$k: \qquad \vec{r} = \vec{r}_M + r\cos(t)\vec{e}_x + r\sin(t)\vec{e}_y.$$

Definition 46. Eine *Kugel* ist die Menge der Punkte (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, die von einem Mittelpunkt $M = (x_M, y_M, z_M)$ den festen Abstand r aufweisen,

$$K = \{\,(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\,\}$$

Vektoriell

$$K: \qquad (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = r^2$$

Wichtig 5. Die vektorielle Darstellung von Kreis in $\mathbb{R}^2$ und Kugel in $\mathbb{R}^3$ sind gleich. Den Kreis in der (x, y)-Ebene kann man verstehen als Kugel, die von dieser Ebene geschnitten wird. Die Beschreibung eines Kreises im Raum bedarf deshalb der Angabe der zugehörigen Ebene. Die Form $(\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = r^2$ reicht nicht, um einen bestimmten Kreis in $\mathbb{R}^3$ zu bestimmen. Die Kugel ist die Menge unendlich vieler Kreise. ⊣

Die Formel für die Kugel $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ kann man ausmultiplizieren und erhält nach Umgruppieren:

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2.$$

Die Gleichung kann man als folgende Form verstehen:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0.$$

Anmerkung 25.1. Diese Gleichung gilt für alle Kugeln, aber umgekehrt gilt nicht, dass Figuren, die diese Gleichung erfüllen, Kugeln sein müssen.

Von der ausmultiplizierten Form gelangt man, zwar nicht immer, zur vektoriellen Darstellung durch quadratisches Ergänzen.

25.2 Übung Wir untersuchen die Gleichung $2x^2+2y^2+2z^2-8x+4y-16z+10=0$ und fragen uns, ob es eine Kugel darstellt. Als erstes vereinfachen wir, indem wir durch 2 teilen, d.h.

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+5=0$$

Wir gruppieren die Variablen

$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+2y+1)-1+(z^2-8z+16)-16+5=0$$

und gelangen durch Bilden der Quadrate zu

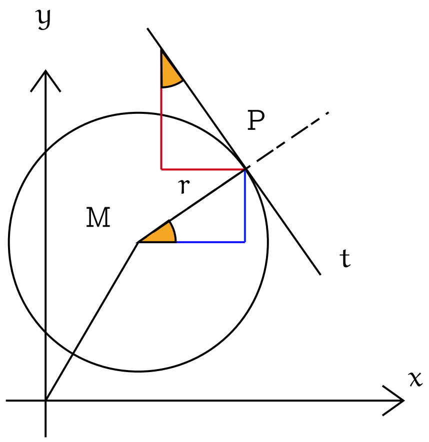
$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=16$$

Es handelt sich also um eine Kugel. Stünde anstatt 16 zum Beispiel 0 oder -5, auf der rechten Seite, die ja den Radius im Quadrat darstellt, so wäre es keine Kugel.

$\triangleleft$

Tangente an Kreis

Die Bestimmung der Tangente am Kreis in der $x-y$-Ebene ist ein Standardproblem. Gemäss Abbildung suchen wir die Gerade, welche den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius R im Punkt P berührt.



Der Kreis ist $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$. Die Steigung der Geraden zwischen M und P ist

$$m=\frac{y_P-y_M}{x_P-x_M}.$$

Wie man leicht einsieht, ist die Steigung der Tangente der negative Kehrbruch dieser Steigung, also

$$m_t=-\frac{1}{m}=-\frac{x_P-x_M}{y_P-y_M}$$

Allgemein ist die Punkt-Richtungsgleichung der Gerade

$$y=m\cdot x+b.$$

Wir brauchen also nur noch b zu bestimmen.

$$b = y_P - m \cdot x_P$$

Eingesetzt folgt

$$y = m \cdot x + y_P - m \cdot x_P = m(x - x_P) + y_P$$

und

$$y - y_P = -\frac{x_P - x_M}{y_P - y_M}(x - x_P)$$

so dass

$$(y - y_P)(y_P - y_M) = -(x_P - x_M)(x - x_P)$$

$$(y - y_P)(y_P - y_M) + (x_P - x_M)(x - x_P) = 0$$

Wir addieren die Kreisgleichung, linke Seite und rechte Seite von $(y_P - y_M)^2 + (x_P - x_M)^2 = r^2$ und erhalten

$$(y - y_P)(y_P - y_M) + (x_P - x_M)(x - x_P) + (y_P - y_M)^2 + (x_P - x_M)^2 = r^2$$

Nun setzen wir die Klammern anders

$$(y - y_P + y_P - y_M)(y_P - y_M) + (x_P - x_M)(x - x_P + x_P - x_M) = r^2$$

und schlussendlich

$$(y - y_M)(y_P - y_M) + (x - x_M)(x_P - x_M) = r^2$$

Für einen Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung folgt

$$yy_P + xx_P = r^2. \tag{25.5}$$

Formel 25.3. Tangente an Kreis Für die Tangente an den Kreis in $\mathbb{R}^2$ gilt

$$t_k : \qquad (y - y_M)(y_P - y_M) + (x - x_M)(x_P - x_M) = r^2$$

Schnitt Kreis von Gerade

Diese Aufgabe ist besonders einfach, aber rechnerisch mühsam. Denn man braucht nur die Geradengleichung $y = mx + b$ in die Kreisgleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ einzusetzen. Also

$$(x - x_M)^2 + (mx + b - y_M)^2 = r^2 \tag{25.6}$$

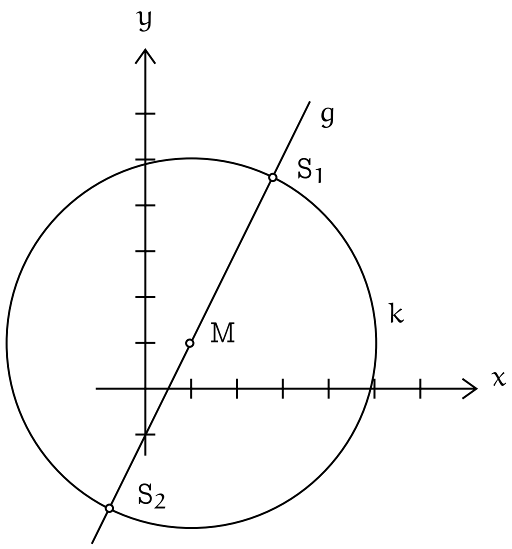
Nächster Schritt

$$x^2 - 2xx_M + x_M^2 + m^2x^2 + 2mx(b - y_M) + (b - y_M)^2 = r^2$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2\big(m(b - y_M) - x_M\big)x + x_M^2 + (b - y_M)^2 - r^2 = 0$$

Nun setzten wir $a = 1 + m^2$, $b = 2\big(m(b - y_M) - x_M\big)$ und $c = x_M^2 + (b - y_M)^2 - r^2$ und holen die Mitternachtsformel heraus, d.h.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



25.4 Übung Der Kreis $(x-1)^2+(y-1)^2=16$ und die Gerade $y=2x-1$ sollen sich schneiden. Die Zwischenwerte sind $a=1+4=5$, $b=2(2(-1-1)-1)=-10$ und $c=1+(-1-1)^2-16=-11$. Daraus folgt

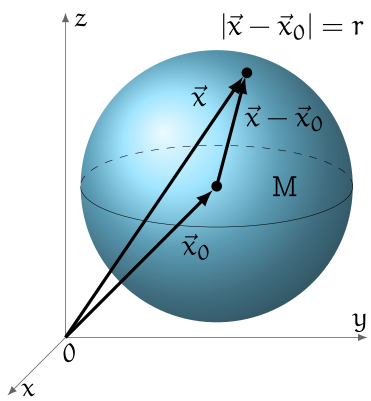
$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot5\cdot(-11)}}{10}\approx 1\pm 1.79,$$

also $x_{1,2}=\{2.79,-0.79\}$ und damit die y-Werte $y_{1,2}=\{4.58,-2.58\}$.

25.5 Anmerkung. Der Schnitt zweier Kreise funktioniert nach derselben Überlegung.

◁

Kreis im Raum**



Da die Kreisgleichung im Raum nicht alleine von der Abstandsgleichung festgelegt wird, kann man die Parametergleichung aus $\mathbb{R}^2$ heranziehen, und die zwei Einheitvektoren durch zwei orthogonale in der Ebene des Kreises ersetzen, also.

$$k\in\mathbb{R}^3:\qquad \vec{r}=\vec{r}_M+r\cos(t)\vec{e}_u+r\sin(t)\vec{e}_v$$

mit $\vec{e}_u\bullet\vec{e}_v=0$. Es gibt also unendlich viele Paare von Einheitsvektoren in der Ebene.
Wir prüfen für die Parametergleichung, ob sie der Vektorgleichung gehorcht. Dazu setzen wir in die Gleichung die Parameterwerte ein

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_M)^2&=(r\cos(t)\vec{e}_u+r\sin(t)\vec{e}_v)^2\\&=r^2\cos(t)^2\vec{e}_u\bullet\vec{e}_u+2r^2\cos(t)\sin(t)\vec{e}_u\bullet\vec{e}_v+r^2\sin(t)^2\vec{e}_v\bullet\vec{e}_v\end{aligned}$$

Da $\vec{e}_u\bullet\vec{e}_v=0$ gilt und

$$\vec{e}_i\bullet\vec{e}_i=1$$

folgt

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_M)^2&=r^2\cos(t)^2+r^2\sin(t)^2\\&=r^2(\cos(t)^2+\sin(t)^2)\\&=r^2\end{aligned}$$

25.6 Übung Wir wollen den Kreis mit Radius r bestimmen, dessen Mittelpunkt $M = (1, 2, 3)$ ist und in $E : -x + 2y - 2z + 3 = 0$ liegt. Schnell ist kontrolliert, dass M und E liegt $(-1 + 4 - 6 + 3 = 0)$. Wir wählen einen zweiten Punkt in der Ebene, am einfachsten $(3, 0, 0)$, indem wir $z = 0$ und $y = 0$ setzen und x ausrechnen aus $-x + 3 = 0$. Einen Vektor in der Eben haben wir also, nämlich $\vec{u} = \overrightarrow{OM} - (3, 0, 0) = (-2, 2, 3)$. Daraus wird

$$\vec{e}_u = \vec{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+4+9}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Der zweite orthogonale Vektor in der Ebene folgt aus $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{153}} \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

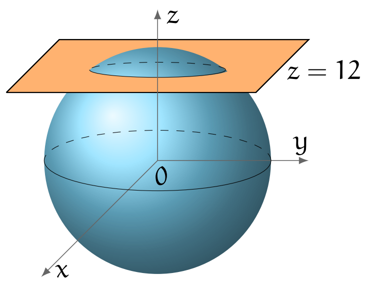
Damit folgt die Gleichung für diesen Kreis als

$$k : \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cos(t)\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\sin(t)\frac{1}{\sqrt{153}} \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

◁

Schnitt einer Ebene mit Kugel

Im vorangehenden Abschnitt haben wir schon herausgefunden, dass ein Kreis im Raum neben der Kugelgleichung noch Eigenschaften der Ebene braucht. Prinzipiell schneidet man Ebene und Kugel, indem man die Variablen der einen Gleichung in die andere einsetzt. Als triviales Beispiel schneiden wir die Kugel $K : x^2 + y^2 + z^2 = 169$ mit der Ebene $z = 12$, wie in der Abbildung dargestellt.



Also $z = 12$ eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 12^2 &= 169 \\ x^2 + y^2 &= 169 - 144 = 25 = 5^2 \end{aligned}$$

Das ist ein Kreis mit Radius 5. Ein allgemeineres Problem betrachten wir nun.

25.7 Übung Die Kugel $K : x^2 + y^2 + z^2 = 144$ soll mit der Ebene $x + 2y - z + 5 = 0$ geschnitten werden. Wir wählen z als zu ersetzende Variable, $z = x + 2y + 5$ und setzten ein:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (x + 2y + 5)^2 &= 144 \\ x^2 + y^2 + x^2 + 4y^2 + 25 + 2xy + 5x + 10y &= 144 \\ 2x^2 + 5y^2 + 5x + 10y + 2xy &= 119 \end{aligned}$$

Je zwei Terme kann man quadratisch ergänzen, $2x^2 + 5x = 2(x + 1.25)^2 - 2 \cdot 1.25^2$ und $5(y^2 + 2y) = 5(y + 1)^2 - 5$. Damit

$$2(x + 1.25)^2 + 5(y + 1)^2 + 2xy = 119 + 5 - 3.125$$

Das ist keine Standardform des Kreises (sondern eine Ellipse). Besonders störend ist der Term $2xy$, den man nicht wegbringt. Wenn wir eine Kreisformel erhalten wollen, müssen wir die Koordinaten transformieren, wie wir es oben schon gemacht haben. Wir suchen zwei Einheitsvektoren in der Schnittebene, in der dann ein Kreis auftauchen muss. Wir kennen einen Normalenvektor der Ebene $n = (1, 2, -1)$. Zwei Punkte bestimmen wir aus der Gleichung der Ebene, indem wir $(0, 0, z)$ wählen und $z = 5$ erhalten und $(x, 0, 0)$ wählen und daraus $(-5, 0, 0)$. Ein Vektor in der Ebene ist also die Differenz dieser zwei Ortsvektoren $(0, 0, 5) - (-5, 0, 0) = (5, 0, 5)$. Wir setzen $\vec{u} = (1, 0, 1)$. Ein zweiter Vektor in der Ebene ist $\vec{v}$, der senkrecht zu $\vec{u}$ und $\vec{n}$ sein soll. Daher $\vec{u} \times \vec{n}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Wir haben also zwei senkrechte Einheitsvektoren in der Kreisebene $\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ und $\vec{e}_v = \frac{1}{3}(-1, 1, 1)$.

Den Vektor $\vec{r}$ in die Ebene kann man schreiben als Linearkombination der neuen Koordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\frac{1}{\sqrt{2}} - v\frac{1}{\sqrt{3}} \\ v\frac{1}{\sqrt{3}} \\ u\frac{1}{\sqrt{2}} + v\frac{1}{3} + 5 \end{pmatrix}$$

wobei der letzte Vektor ein Stützvektor der Ebene ist, d.h. ein Punkt, den wir oben bestimmt haben. Nun setzen wir diese Werte für r in die Kugelgleichung ein

$$\begin{aligned} (u\frac{1}{\sqrt{2}} - v\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (v\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (u\frac{1}{\sqrt{2}} + v\frac{1}{3} + 5)^2 &= 144 \\ u^2/2 + v^2/3 - \frac{uv}{\sqrt{6}} + v^2/3 + u^2/2 + v^2/3 + 25 + \frac{uv}{\sqrt{6}} + \frac{5u}{\sqrt{2}} + \frac{5v}{\sqrt{3}} &= 144 \\ u^2 + v^2 + \frac{5u}{\sqrt{2}} + \frac{5v}{\sqrt{3}} &= 119 \end{aligned}$$

Quadratisches Ergänzen ergibt

$$(x + \frac{5}{2\sqrt{2}})^2 - \frac{25}{8} + (y + \frac{5}{2\sqrt{3}}) - \frac{25}{12} = 119$$

Und letztlich

$$(x + \frac{5}{\sqrt{8}})^2 + (y + \frac{5}{\sqrt{12}}) = 119 + \frac{125}{24}$$

Es gibt unendlich viele Einheitsvektoren und Stützvektoren.

Unsere Lösung ist eine davon. Was aber bei allen diesen Gleichungen gleich sein muss ist die Struktur als Kreisgleichung und der Radius des Kreises. $\triangleleft$

Gerade durch Kugel

Wir suchen nach den Durchstosspunkten einer Geraden durch eine Kugel. Es gibt drei Fälle zu unterscheiden:

(1) die Gerade hat zwei Durchstosspunkte,

(2) die Gerade berührt die Kugel in einem Punkt (Tangente),

(3) die Gerade schneidet die Kugel überhaupt nicht (Passante).

Die Lösung findet man, indem man die Geradenpunkte den Punkten der Kugel einsetzt. Wir nehmen die Gerade $x = 3+t$, $y = 1+2t$, $z = 3-t$ in Parameterform und die Kugelgleichung

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 16$$

und setzen ein

$$\begin{aligned}
(3+t-2)^2 + (1+2t+1)^2 + (3-t-4)^2 &= 16 \\
(t+1)^2 + (2t+2)^2 + (-t-1)^2 &= 16 \\
6t^2 + 12t - 10 &= 0 \\
t^2 + 2t - 10/6 &= 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine quadratische Gleichung für den Parameter t. Hier sehen wir auch, dass es höchstens zwei, vielleicht eine oder kein Lösung gibt. Quadratisches Ergänzen führt zu

$$(t+1)^2 - 1 - 10/6 = 0$$

und von hier

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{16}{6}} - 1 = \pm\frac{4}{\sqrt{6}} - 1$$

Wenn man die zwei Paramterwerte in die Koordinatengleichungen der Geraden einsetzt, so resultieren die zwei Punkte

$$\left(2+\frac{4}{\sqrt{6}}, -1+\frac{8}{\sqrt{6}}, 4-\frac{4}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{und} \quad \left(2-\frac{4}{\sqrt{6}}, -1-\frac{8}{\sqrt{6}}, 4+\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$$

Tangentialebene

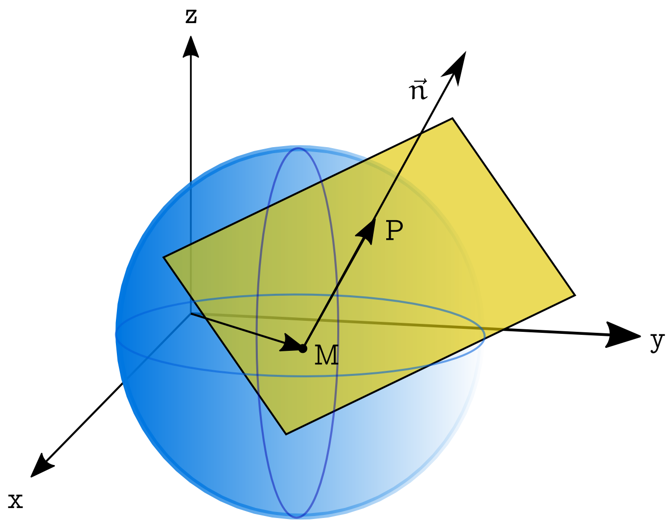
Die Berührende an der Kugel ist eine Ebene. Zu ihrer Berechnung benötigt man die Beschreibung der Kugel und den Punkt auf der Kugel, an dem die Tangentialebene gesucht ist.

Wir kennen also die Kugelgleichung $K : (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = R^2$ und einen Punkt P. Der Normalenvektor durch den Punkt P ist kollinear zum Vektor $\vec{n} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - \vec{r}_M = \vec{r}_P - \vec{r}_M$. Wir kennen also einen Punkt der Ebene und den Normalenvektor. Damit folgt

$$E_T : \qquad (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) = 0$$

Diese Gleichung kann man umformen, wenn man will

$$\begin{aligned}
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) &= 0 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P + \vec{r}_M - \vec{r}_M) &= 0 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) - (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_M) &= 0 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) &= (\vec{r}_P - \vec{r}_M)^2 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) &= R^2
\end{aligned}$$



Formel 25.8. Tangentialebene an Kugel Die Tangentialebene in P an die Kugel $(\vec{r}-\vec{r}_M)^2 = R^2$ ist

$$E_T: \qquad (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet (\vec{r} - \vec{r}_P) = 0$$

oder

$$E_T: \qquad (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet (\vec{r} - \vec{r}_M) = R^2$$

Anmerkung 25.9. Die Formel kann man natürlich auch analytisch schreiben:

$$(x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) + (z_P - z_M)(z - z_M) = R^2.$$

Die zweite Gleichung der Tangentialebene kann man auch folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned}(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet (\vec{r} - \vec{r}_M) &= R^2 \\ \vec{r}_P \bullet \vec{r} &= R^2 + (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet \vec{r}_M\end{aligned}$$

25.10 Übung Wir haben $M = (1, -2, 4)$, $R = 6$ und $P = (5, 2, 6)$. Daraus folgt

$$\vec{r}_P - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt rechnen wir das Skalarprodukt der rechten Seite aus

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 - 8 + 8 = 4$$

und schreiben die Ebene in Normalform

$$4x + 4y + 2z = 6^2 + 4 = 40$$

oder schöner

$$2x + 2y + z - 20 = 0.$$

$\triangleleft$

Schneiden zweier Kugeln

Zwei sich schneidenden Kugel, die nicht notwendigerweise den gleichen Radius haben müssen, schneiden sich in einem Kreis. Sie können sich auch berühren oder auch nicht, oder ineinander enthalten sein.

25.11 Übung Wir untersuchen die zwei Kugeln $K_1 : x^2+y^2+z^2 = 24$ und $K_2 : x^2+y^2+(z-2)^2 = 12$. Wir müssen eine Beschreibung der Punkte (x, y, z) finden, die beide Gleichungen erfüllen. Wir bestimmen die Differenz der beiden Gleichungen – ein Standardverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen – und erhalten

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-(x^2+y^2+(z-2)^2) &= 24-12 \\ z^2-(z^2-4z+4) &= 12 \\ 4z &= 16 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Diesen Wert können wir in eine der Kugelgleichungen einsetzen und erhalten

$$x^2+y^2 = 24-4^2 = 8.$$

Der Mittelpunkt ist $M = (0, 0, 4)$. ◁

25.5.2 Kreiszylinder**

Eine logische Fortführung des Kreises ist der räumliche Körper genannt Kreiszylinder. Seine Grundfläche (oder Schnitt) ist ein Kreis. Beim geraden Zylinder ist die Normale der Kreise kollinear zur Zylinderachse. Wir betrachten hier nur den geraden Kreiszylinder.
Seine Beschreibung ergibt sich als Kreis in einer Koordinateneben und in einem Intervall der Koordinate der Achse. Nehmen wir also zuerst die $x-y$-Ebene und die Achse in z-Richtung, so stellt sich die Mantelfläche dar als

$$Z: \qquad \vec{r} = \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \\ z \quad \text{beliebig} \end{cases}$$

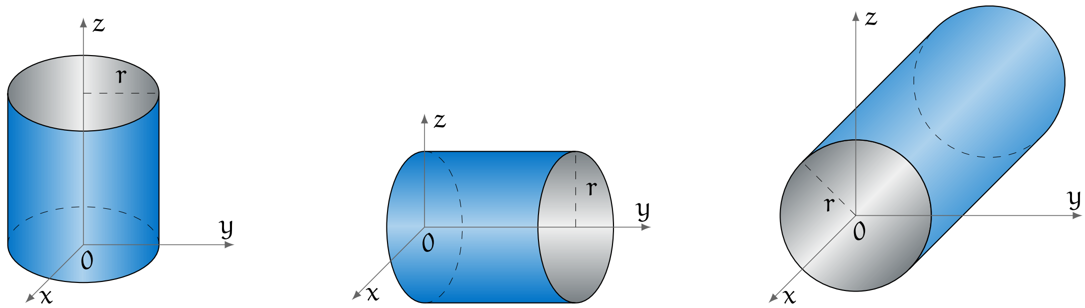
In Parameterdarstellung

$$Z: \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ z \end{pmatrix}$$

für $0 \leqslant t < 2\pi$.
Durch zyklisches Vertauschen erhält man die zwei anderen Zylinder in den $x-z$- und $y-z$-Ebenen (siehe Abbildung).
Schneidet man einen geraden Zylinder mit einer Ebene, so ergeben sich als Spur entweder Kreise (Ebene normal zu Achse), Ellipsen (Ebene nicht normal zur Achse) oder zwei Geraden (Ebene parallel zur Achse).

25.5.3 Kegel

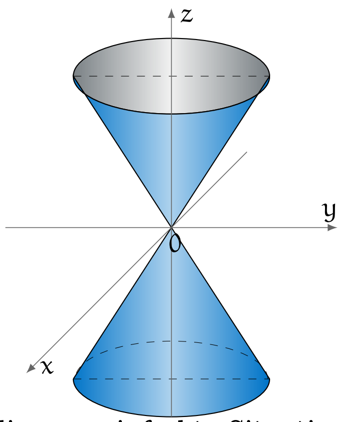
Der gerade Kegel ist dem Zylinder sehr ähnlich, nur in einer Koordinate unterscheidet er sich. Wir nehmen die Paramterdarstellung des Zylinders und ändern den Wert des Radius,



der nun eine lineare Funktion der Höhe s ist.

$$\text{Ke}: \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + b \cdot s)\cos(t) \\ (a + b \cdot s)\sin(t) \\ s \end{pmatrix}$$

Die analytische Gleichung dazu ergibt sich durch eliminieren der Parameter s und t. In einem ersten Schritt ersetzt man s durch z. Dann quadriert man x- und y-Komponente und addiert die zwei Gleichungen. Daraus folgt



$$x^2 + y^2 = (a + bz)^2 \cos(t)^2 + (a + bz)^2 \sin(t)^2$$

Da $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ folgt

$$x^2 + y^2 = (a + bz)^2 = a^2 + 2abz + b^2 z^2$$

Läge die Spitze des Kegels im Ursprung, so wäre $a = 0$. Für diese vereinfachte Situation folgt:

$$x^2 + y^2 - b^2 z^2 = 0$$

Der Parameter b steuert den Öffnungswinkel des Kegels.

Anmerkung 25.12. Es sollte aufgefallen sein, dass wir verschieden Figuren beschrieben haben und dabei typischerweise quadratische Bestimmungsgleichungen aufgetaucht sind. Wir werden noch besser sehen, dass es eine ganze Familie von Kurven und Flächen gibt, die aus der allgemeinen quadratischen Bestimmungsgleichung

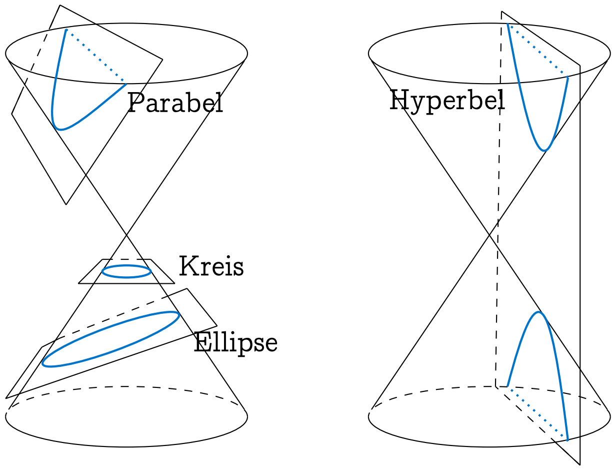
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

hervorgehen. Dies sind Kurven und Flächen zweiter Ordnung. So benannt wegen des quadratischen Terms. In dieser Gleichung sind z.B. ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene, ein Kreis, eine Kugel, der Zylinder und der Kegel enthalten.

Der Kegel hat äusserst interessante eben Schnittkurven.

25.5.4 Kegelschnitte, Kurven zweiter Ordnung*

Zur Erzeugung von Kegelschnitten kann man sich eine kleine Lampe vorstellen, die eine Schablone mit einem Kreisauschnitt beleuchtet und dabei ein Bild auf eine Wand wirft. Die Schablone dreht man in einer senkrechten Achse zur Achse des Lichtkegels. Ist die Schablone senkrecht, ist das Bild ein Kreis. Dreht man die Schablone, erscheint eine Ellipse. Noch weiter erscheint keine geschlossene Kurve mehr sondern eine Parabel. Und noch weiter erscheint eine Hyperbel.

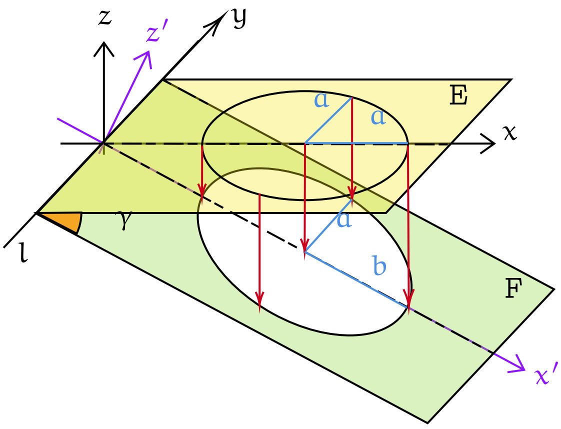


Die Kegelschnitte weisen sogenannte:

- Brennpunkt- und
- Leitlinieneigeschaften

auf.

25.5.5 Die Ellipse



Wie man der Abbildung der Kegelschnitte entnehmen kann, geht die Ellipse aus der zentralen Projektion des Kreises hervor. Ebenso geht sie aus der Parallelprojektion auf eine schiefe Ebene hervor (Schnitt des Kreiszylinders). Die Abbildung ist eine sogenannten *senkrechte Affinität*. Für die Achse x, welche auf l senkrecht steht, wird auf eine Achse x' abgebildet, die auch auf l senkrecht steht. Ein Punkt (x, y) auf E geht über in (x', y) auf F. Es gilt hier

$$(x, y) \mapsto (x \cdot c, y)$$

Wenn man diese Abbildung auf den Kreis anwendet, folgt mit $x = x'/c$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \quad \mapsto \quad \frac{(x - x_M)^2}{c^2} + (y - y_M)^2 = r^2$$

Daraus leiten wir die Definition der Ellipse ab.

Definition 47. Eine *Ellipse* ist eine geschlossene Kurve, die sich als

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$$

darstellen lässt.

Anmerkung 25.13. Die Ellipse mit Mittelpunkt in $(0, 0)$ hat die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

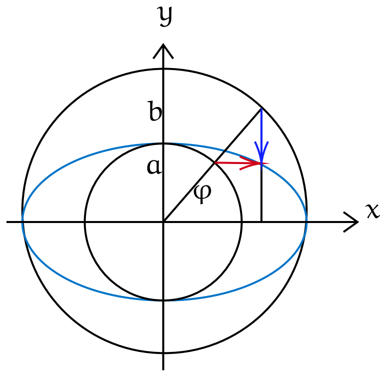
und wird “Mittelpunktgleichung” genannt.

Die Parameterdarstellung ist

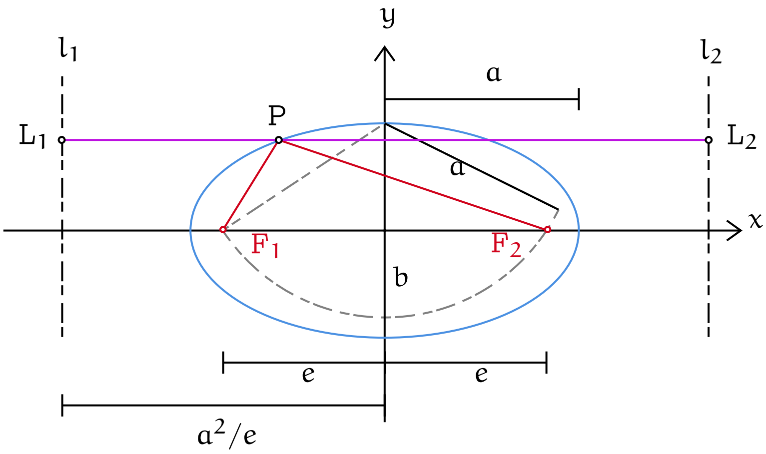
$$e: \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Beim Kreis ist $a = b = r$. Der Kreis ist ein Sonderfall der Ellipse.

Aus der Parametergleichung wird auch klar, wie man eine Ellipse konstruieren könnte. Man zeichnet zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b. Strahlen aus dem Mittelpunkt mit Winkel φ treffen zwei Punkte auf den Kreisen. Die Vertikale des äusseren werden mit der Horizontalen des inneren Punktes verbunden. Nun beschreiben wir ein paar Eigenschaften der Ellipse.



Eigenschaften



Die Ellipse besitzt zwei *Brennpunkte* F_1 und F_2 (F für Focus), die gemäss Abbildung den Abstand vom Mittelpunkt, hier *lineare Exzentrizität* e nach der Vorschrift

$$e^2 = a^2 - b^2$$

bilden.

Definition 48. Die *lineare Exzentrizität* einer Ellipse mit der grossen Hauptachsen a und der kleinen b ist $e^2 = a^2 - b^2$.

Das Verhältnis $\varepsilon = e/a$ nennt man *numerische Exzentrizität* oder Formfaktor der Ellipse.

Es gilt für jeden Punkt P auf einer Ellipse mit der grossen Halbachse a, dass $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

Satz 25.14. Für jeden Punkt P der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 gilt

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Die Herleitung ist ziemlich aufwendig und füllt schnell zwei drei Seiten. Für den ungläubigen Thomas hier die Skizze; die anderen können überspringen. Ausgangslage ist die Darstellung der zwei Strecken als

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2}+\sqrt{(x+e)^2+y^2}=2a$$

Wir skizzieren das Vorgehen, indem wir für die Wurzelterme einfach w_1 und w_2 setzen, und quadrieren. Das gibt $w_1^2+w_2^2+2w_1w_2=4a^2$. Sodann stellen wir um und quadrieren nochmals:

$$4w_1^2w_2^2=(4a^2-w_1^2-w_2^2)^2 \tag{25.7}$$

Wir setzen wieder ein und erhalten auf der linken Seite

$$\begin{aligned}4\big[\big((x-e)^2+y^2\big)\big((x+e)^2+y^2\big)\big] &= 4\big[(x^2-e^2)^2+y^2((x+e)^2+(x-e)^2)+y^4\big]\\ &= 4\big[(x^2-e^2)^2+y^2(2(x^2+e^2))+y^4\big]\end{aligned}$$

Wir führen zwei temporäre Variablen ein, die man aus dem Ausdruck erkennnt, $F=x^2-e^2$ und $E=x^2+e^2$ und schreiben für die linke Seite L

$$L=4\big[F^2+2y^2E+y^4\big]$$

Als Zwischenrechnung bestimmen wir $w_1^2+w_2^2=Q$

$$\begin{aligned}Q&=(x-e)^2+y^2+(x+e)^2+y^2\\ &=2x^2+2e^2+2y^2\\ &=2(x^2+e^2+y^2)\\ &=2(E+y^2)\end{aligned}$$

Wir setzen in die rechte Seite von Gl. 25.7 ein und rechnen das Quadrat aus

$$\begin{aligned}R&=(4a^2-2(E+y^2))^2=4(2a^2-(E+y^2))^2\\ &=4\big[4a^4-4a^2(E+y^2)+(E+y^2)^2\big]\\ &=4\big[4a^4-4a^2(E+y^2)+E^2+2Ey^2+y^4)\big]\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir linke und rechte Seite wieder gleich und teilen noch durch 4

$$F^2+2y^2E+y^4=4a^4-4a^2(E+y^2)+E^2+2Ey^2+y^4$$

Gewisse Terme kann man auf beiden Seiten streichen

$$F^2=4a^4-4a^2(E+y^2)+E^2$$

Wir setzen E und F ein. Der Ausdruck F^2-E^2 wird zu $(x^2-e^2)^2-(x^2+e^2)^2=-4x^2e^2$

$$-4x^2e^2=4a^4-4a^2(x^2+e^2)-4a^2y^2$$

Jetzt setzen wir auch $e^2=a^2-b^2$ ein und kürzen mit 4

$$-x^2(a^2-b^2)=a^4-a^2(x^2+a^2-b^2)-a^2y^2$$

Jetzt gruppieren wir neu und streichen Terme

$$\cancel{-x^2a^2}+x^2b^2=\cancel{a^4}-\cancel{a^2x^2}-\cancel{a^4}+a^2b^2-a^2y^2$$

Nun bringen wir alles auf eine Seite und dividiern durch a^2b^2 und erhalten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Das ist unsere Definition der Ellipse. Das war eine echte Kärrnerarbeit. Die sogenannte "Gärtnerkonstruktion" setzt zwei Pfähle und bindet eine Schlinge an ihnen fest. Dann schreitet man an der gespannten Schlinge den Rasen ab und beschreibt eine Ellipse.

Definition 49. Die zwei Geraden, die orthogonal zur grossen Achse der Ellipse und zueinander symmetrisch bezüglich des Mittelpunkts der Ellipse im Abstand e/a angeordnet sind, werden *Leitlinien der Ellipse* genannt.

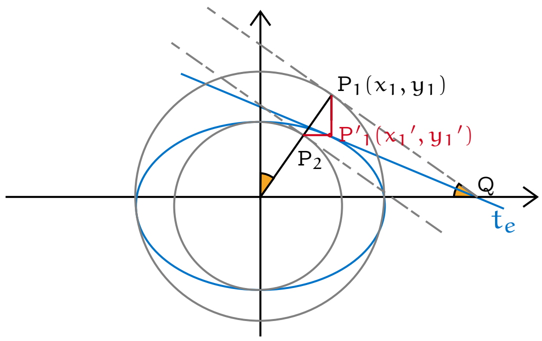
Für die in der Abbildung gezeichnete Leitline l_1 zum Brennpunkt F_1 kann man folgenden Zusammenhang zwischen Leitlinie und Brennpunkt konstruieren.

Satz 25.15. Für alle Punkte der Ellipse ist das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie konstant. Für $j = \{1, 2\}$

$$\frac{\overline{PF_j}}{\overline{PL_j}} = \varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Tangente an Ellipse

Jede Tangente an die Ellipse entspricht einer Tangente an den Haupt- bzw. Nebenkreis, aus der sie aus Stauchung bzw. Dehnung hervorgeht. Wir nehme die Gl. 25.5 von Seite 25-35 hervor.



Hier gilt für den Hauptkreis mit Hauptachse a

$$yy_1 + xx_1 = a^2.$$

Die Transformation der Koordinten ist

$$x = x' \quad \text{und} \quad y = y'\frac{a}{b}$$

und

$$x_1 = x_1' \quad \text{und} \quad y_1 = y_1'\frac{a}{b}$$

Setzt man diese transformierten Werte in die Tangentengleichung des Kreises ein, so folgt

$$y'y_1' + x'x_1' = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1'x' + \frac{a^2}{b^2}y_1'y' = a^2$$

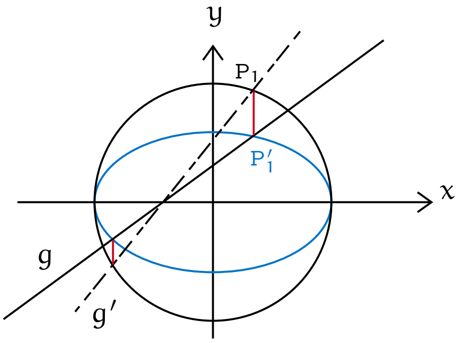
Wir bezeichnen nun die Koordinaten der Punkte der Ellipse mit (x, y). Damit

Formel 25.16. Tangente an Ellipse

$$\frac{xx_P}{a^2} + \frac{yy_P}{b^2} = 1.$$

Anmerkung 25.17. Die Transformation ist eine *affine Abbildung* der Kreistangente an der Hauptachse.

Schnitt Gerade mit Ellipse



Auch hier wenden wir die affine Abbildung auf Kreis und Gerade an. Wie in Gl. 25.6 auf Seite 25-35 setzen wir die Geradengleichung $mx + c$ ein. Wir wählen hier den Mittelpunkt von Ellipse und Kreis im Ursprung. Damit gilt für den Kreis im Ursprung mit dem Radius a, dem Hauptachsenabschnitt

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$

Anstatt x setzten wir $x = x'$ und anstatt $y = mx + c$ dann $y = (mx + c)\frac{a}{b}$. Damit ergibt sich

$$x^2 + \left((mx + c)\frac{a}{b}\right)^2 = a^2$$

$$x^2 + \left(m^2x^2 + 2mcx + c^2\right)\frac{a^2}{b^2} = a^2$$

Multiplizieren mit b^2 und umsortieren

$$x^2(b^2 + m^2a^2) + x(2mca^2) + c^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

Mit $\alpha = b^2 + m^2a^2$, $\beta = 2mca^2$ und $\gamma = c^2a^2 - a^2b^2$ wenden wir sodann die Mitternachtsformel an, d.h.

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Diese zwei (oder eine oder keine) Lösungen setzen wir dann in die Ellipsengleichung ein und erhalten die entsprechenden $y_{1,2}$-Werte. Da eine Gewinnumformung stattfindet, sind diese Werte an der Geraden zu verifizieren.

25.5.6 Die Parabel

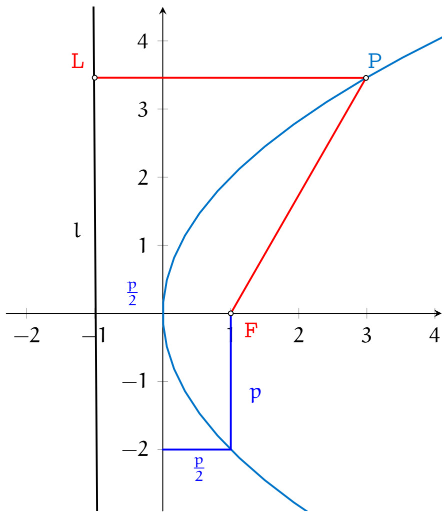
Die Parabel ist uns schon als Kurve zur quadratische Funktion bekannt, die meist in der Normalform als

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

geschrieben wird. Wir kennen auch die Scheitelform etc. Hier interessieren vor allem die Punkte (x, y), die bestimme Eigenschaften aufweisen.

Die Parabel geht aus der Ellipse hervor, wenn man den Winkel der Schnittebene zur Achse so erhöht, dass die Ebene parallel zum Kegelmantel ist. Dabei bleibt die Eigenschaft von Satz 25.15 auf Seite 25-46 der Ellipse erhalten.

Auch für die Parabel gibt es einen Brennpunkt F und eine Leitlinie l. Legt man eine Gerade parallel zur x-Achse durch einen Punkt P, so schneidet diese die Leitlinie in L. Hier gilt die Beziehung gemäss folgendem Satz.



Satz 25.18. Für die Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l gilt für jeden Punkt P

$$\overline{PF} = \overline{PL}$$

In Analogie zur Ellipse

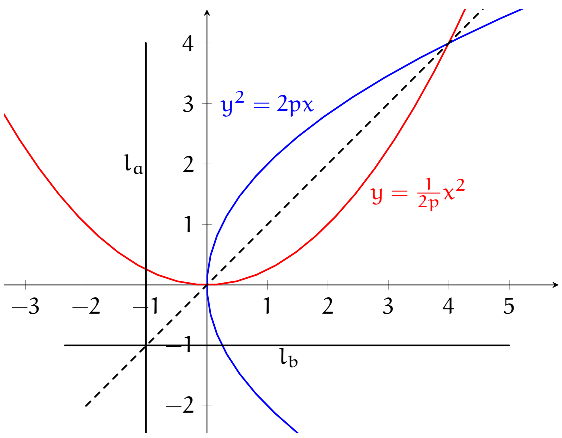
$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} = \varepsilon = 1.$$

Mit dem Abstand von Brennpunkt zu Leitlinie p gilt für jeden Punkt der Parabel

Definition 50. Die Parabelkurve ist gegeben durch

$$y^2 = 2px \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2p}y^2$$

Wir haben von Parabelkurve gesprochen, um die Kurve von der Parabelfunktion zu unterscheiden, die ja in Normalform als $y = ax^2 + bx + c$ geschrieben wird. Die Kurve ist die an der 45°-Achse gespiegelte Funktion. Sowohl Kurve als auch Funktion sind Parabeln. Die Normalform ist $y = ax^2$. Die gespiegelte geht aus der Vertauschung von $x \mapsto y$ et viceversa hervor, also $x = ay^2$.



Eigenschaften 25.19. Für die Parabel gilt:

$$y^2 = 2px \quad \text{respektive} \quad x^2 = 2py$$

ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Nullpunkt liegt. Sie ist zur

$$x - \text{Achse} \quad \text{respektive} \quad y - \text{Achse}$$

symmetrisch, ihr Brennpunkt liegt bei

$$x = \tfrac{p}{2} \quad \text{respektive} \quad y = \tfrac{p}{2}$$

und ihre Leitlinie ist

$$x = -\tfrac{p}{2} \quad \text{respektive} \quad y = -\tfrac{p}{2}$$

Im weiteren gilt auch

Satz 25.20. Die durch

$$x = Ay^2 + By + C \quad \text{respektive} \quad y = Ax^2 + Bx + C$$

dargestellte Kurve ist eine Parabel mit dem Scheitel

$$\left(C - \tfrac{B^2}{4A}, \tfrac{B}{2A}\right) \quad \text{respektive} \quad \left(\tfrac{B}{2A}, C - \tfrac{B^2}{4A}\right)$$

deren Symmetrieachse zur

$$x - \text{Achse} \quad \text{respektive} \quad y - \text{Achse}$$

parallel ist.

Denn versucht man die rechte Seite von $x = Ay^2 + By + C$ mit quadratischer Ergänzung zu transformieren, so folgt

$$x = A\left(y + \frac{B}{2A}\right)^2 - A\left(\frac{B}{2A}\right)^2 + C$$

oder äquivalent

$$x - \left(C - \frac{B^2}{4A}\right) = A\left(y + \frac{B}{2A}\right)^2$$

Mit den Transformierten

$$x' = x - \left(C - \frac{B^2}{4A}\right) \quad \text{und} \quad y' = y + \frac{B}{2A}$$

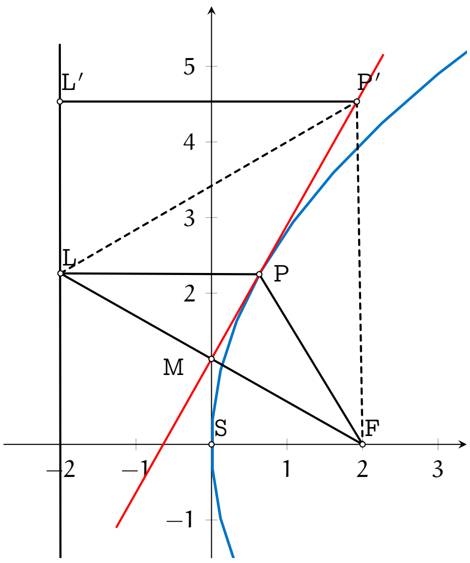
folgt

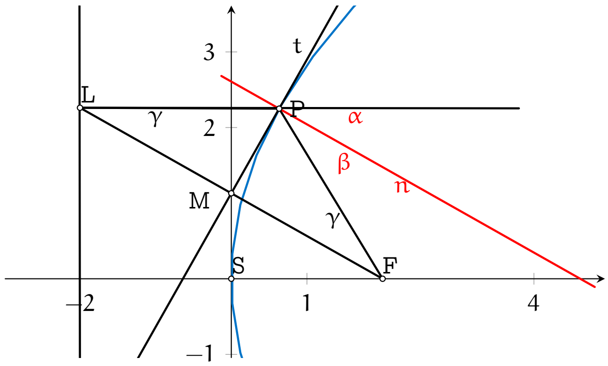
$$x' = A \cdot y'^2$$

Eine Parabel mit Scheitel $x'_s = 0$ und $y'_s = 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Tangente der Parabel

Die Tangente an die Parabel kennen wir natürlich als Ableitung der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ an der Stelle x. Geometrisch ist aber die Tangente auch interessant zu konstruieren. Aufgrund der Tatsache, dass $\overline{PF} = \overline{PL}$ ist (siehe Satz 25.18 auf Seite 25-48), ist $\triangle FPL$ ein gleichschenkliges. Deshalb sind die Winkel $\angle MFP = \angle MLP$. Für einen beliebigen Punkt P' auf der Mittelsenkrechten m gilt $\overline{P'L} = \overline{P'F}$. Denn es ist auch eine gleichschenkliges Dreieck. Nun gilt für alle Punkte P' auf m, dass $\overline{P'L'} < \overline{P'L'}$. Es muss also $\frac{\overline{P'F}}{\overline{P'L'}} > 1$ sein ausser für $P' = P$. Das heisst: alle Punkte auf der Geraden m mit Ausnahme von P liegen ausserhalb der Parabel. Die Gerade m muss also die Tangente sein.





Satz 25.21. Der Fusspunkt M des Lots vom Brennpunkt F auf die Tangente liegt auf der Scheiteltangente.

Nun berechnen wir die Tangentengleichung analytisch. Die Steigung im Punkt $M = (0, y_1/2)$ mit $P = (x_1, y_1)$ ist $m = \frac{y_1}{2x_1}$. Alternativ, mit $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$ dann $m = \frac{p}{y_1}$. Mit der Punkt-Richtungsgleichung folgt die Gerade:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

und

$$yy_1 = p(x - x_1) + y_1^2 = p(x - x_1) + 2px_1 = p(x + x_1)$$

Formel 25.22. Tangente an Parabel Die Tangentengleichung an die Parabel lautet

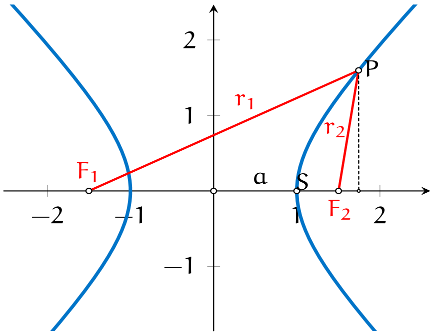
$$t_p : \qquad yy_1 = p(x + x_1)$$

In der Abbildung rechts sehen wir die Normale n, die senkrecht auf der Tangente t steht. Man kann schliessen, dass $\alpha + \beta = 2\gamma$ ist ($\angle LPF = 180 - 2\gamma$) und weiters $\beta = \gamma$ ($\beta + \angle MPF = 90$ und $\angle MPF = 90 - \gamma$). Somit ist dann auch $\alpha = \gamma$ und $\alpha = \beta$. Es ist also Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel. Physikalisch bedeutet dies, dass eine Lampe im Brennpunkt nach der Reflexion parallele Strahlen produziert. Für die Parabel gilt also

Satz 25.23. Brennstrahl und Parallele zur x-Achse bilden mit der Normalen gleiche Winkel.

Anmerkung 25.24. Durch diesen Satz findet die Bezeichnung Brennpunkt ihre Rechtfertigung.

25.5.7 Die Hyperbel



Die Hyperbel ist die letzte der vier Kegelschnitte. Wiederum handelt es sich um eine Kurve zweiter Ordnung mit $Ax^2 + By^2 + \ldots + J = 0$ und Brennpunkten und Exzentrizität. In der Abbildung kann man festhalten, dass die Strecke $\overline{OS} = a$, vom Ursprung zum Scheitel. Man nennt a die grosse Halbachse, wie gehabt. Die Exzentrizität e ist die Strecke $\overline{OF}$. Somit liegen die zwei Brennpunkte F_1 und F_2 um $2e$ auseinander. Im weiteren sieht man die Strecken r_1 und r_2, welche die Brennpunkte über einen Punkt auf einem Hyperbelast miteinander verbinden. Man nennt sie *Brennstrahlen*.

Definition 51. Die Hyperbel ist die Kurve, welche der Gleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ gehorcht.

Formel 25.25. Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Formel 25.26. Exzentrizität der Hyperbel

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Satz 25.27. Die Differenz der Brennstrahlen der Hyperbel ist gleich der Hauptachse

$$r_1 - r_2 = 2a$$

Wir behaupten, dass $r_1 - r_2 = 2a$ ist. Mit dem Satz des Pythagoras gilt $r_1^2 = y^2 + (e + x)^2$ und $r_2^2 = y^2 + (e - x)^2$. Die Differenz der Quadrate ist, wobei wir die Formel $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ anwenden,

$$r_1^2 - r_2^2 = (e + x)^2 - (e - x)^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 2a \cdot (r_1 + r_2)$$
$$\frac{4ex}{2a} = r_1 + r_2$$

Dieser Summe addieren wir die Behauptung

$$r_1 + r_2 + (r_1 - r_2) = \frac{4ex}{2a} + 2a = 2r_1$$

Daraus ergibt sich für r_1

$$r_1 = \frac{ex}{a} + a$$

Dieses Resultat setzen wir in die Gleichung der Länge $r_1^2 = y^2 + (e + x)^2$ ein und erhalten

$$\left(\frac{ex}{a} + a\right)^2 = y^2 + (e^2 + 2ex + x^2) = \frac{e^2x^2}{a^2} + 2ex + a^2$$

und damit, unter Verwendung von $b^2 = e^2 - a^2$

$$y^2 + b^2 + \cancel{x^2} = x^2 \frac{\cancel{a^2} + b^2}{a^2} = \cancel{x^2} + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Nun dividieren wir durch b^2, vertauschen die Seiten und erhalten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^1} = 1$$

Das ist die Definitionsgleichung.

25.28 Übung Wie lautet die Gleichung der Hyperbel, für die $b = 2\sqrt{3}$ und $e = 4$ ist? Wir bestimmen a^2 aus $e^2 = a^2 + b^2$, also $a^2 = 16 - 12 = 4$. Damit lautet die Gleichung $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. ◁

25.29 Übung Es ist gegeben die Gleichung $4x^2 - 6y^2 = 96$. Wir suchen die Achsen a und b sowie die Exzentrizität e. Wir bringen die Gleichung auf die Form $\frac{4x^2}{96} - \frac{6y^2}{96} = 1$ und weiter $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{16} = 1$. Daraus lesen wir ab $a^2 = 24$ und $b^2 = 16$ oder $a = 2\sqrt{6}$ und $b = 4$. Daraus folgt $e^2 = 24 + 16 = 40$ oder $e = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. ◁

Asymptote, Grenzgleichung

Wir schreiben die Hyperbel-Gleichung in der Form, nach y aufgelöst, um zu

$$y = \pm\sqrt{b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1)}$$

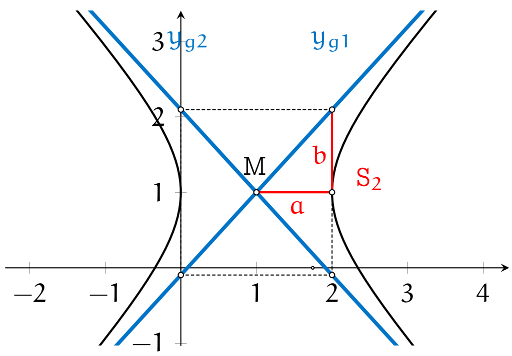
Im Grenzübergang $x \to \infty$ wird der Subtrahend 1 vernachlässigbar. Für y_g asymptotisch ist dann

$$y_g = \pm\sqrt{b^2 \frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a} x$$

Mit aus dem Ursprung heraus verschobenen Hyperbel gilt mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$

Formel 25.30. Asymptoten der Hyperbel

$$y_g = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$



In der Mittelpunktgleichung wird die Asymptote einfach zu xb/a. In der Abbildung links wird zum ersten Mal der Parameter b sichtbar. Die Steigung der Grenzkurve ist b/a respektive $-b/a$. Die Asymptoten gehen durch den Mittelpunkt M. Man beachte, dass der Punkt $(a, 0)$ auf der Hyperbel liegt, aber b nur bei der Grenzkurve in Erscheinung tritt.

Tangente an Hyperbel

Die Tangente ("Berührende") ist ein Spezialfall der Sekante ("Schneidende"), bei der der zweite Schnittpunkt zum ersten wandert und mit diesem verschmilzt. Die Berührende hat nur einen Punkt mit der Kurve gemein. Wir bestimmen die Tangente, eine Gerede, im Punkt

$P = (x_p, y_p)$ mit Hilfe eines zweiten Punktes $Q = (x_q, y_q)$, der mit P eine Sekante bildet. Die Sekante ist als *Zweipunktform* der Gerade:

$$y - y_p = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}(x - x_p) = m_s(x - x_p)$$

Nun gilt gemäss Definition, etwas umgeformt

$$\begin{aligned} a^2y_p^2 &= b^2x_p^2 - a^2b^2 \\ a^2y_q^2 &= b^2x_q^2 - a^2b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2(y_p^2 - y_q^2) &= b^2(x_p^2 - x_q^2) \\ a^2(y_p - y_q)(y_p + y_q) &= b^2(x_p - x_q)(x_p + x_q) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Steigung

$$\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} = \frac{b^2(x_p + x_q)}{a^2(y_p + y_q)} = m_s$$

Jetzt machen wir den Übergang $x_q \to x_p$, d.h. wir setzen $x_q = x_p$ und erhalten die Tangentensteigung

$$m_t = \frac{b^2x_p)}{a^2y_p}$$

und in die Zweipunktformel eingesetzt

$$t_H : \qquad y - y_p = \frac{b^2x_p}{a^2y_p}(x - x_p)$$

Diese Formel lässt sich natürlich umformen

Formel 25.31. Tangente an Hyperbel

$$t_H : \qquad \frac{(x - x_p)x_p}{a^2} - \frac{(y - y_p)y_p}{b^2} = 0$$

25.32 Übung Wir suchen die Schnittpunkte S der Hyperbel mit Hauptachsen a und b und Mittelpunkt im Ursprung mit der Geraden $y = mx$. Wir schreiben

$$\frac{x_s^2}{a^2} - \frac{(mx_s)^2}{b^2} = 1 = x_s^2(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}) = x_s^2(\frac{b^2 - m^2a^2}{a^2b^2})$$

Damit folgt

$$x_s = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - m^2a^2}} \quad \text{und} \quad y_s = mx_s = \pm\frac{abm}{\sqrt{b^2 - m^2a^2}}$$

Da der Wurzelterm keine negativen Argumente zulässt, d.h. ein Schnitt überhaupt möglich ist, muss gelten $b^2 - m^2a^2 > 0$ oder $b^2 > m^2a^2$ oder $b^2/a^2 > m^2$. Nun sehen wir einen Zusammenhang mit der Steigung der Asymptoten b/a. Ist m nämlich grösser oder gleich der Asymptotensteigung, so kann die Gerade die Hyperbel nicht schneiden. ◁

25.33 Übung Eine Hyperbel wird von der Gerade $g : 3x + 5y = 125$ im Punkt $P = (x_P, 16)$ rechtwinklig geschnitten. Wir suchen die Gleichungen der Hyperbel und der Tangente t an die Hyperbel in P. Wir bestimmen x_P, indem wir in der Geradengleichung für $y_P = 16$ einsetzen $3x + 80 = 125$, daraus $x_P = 15$. Die Gerade g ist die Normale mit $\vec{n} = (3, 5)$, so dass sich die Steigung der Tangente den Richtungsvektor $\vec{v} = (-5, 3)$ besitzt. Wir schreiben

$t : 5x - 3y = q$, setzen $(15, 16)$ ein und erhalten $q = 75 - 48 = 27$ also $t : 5x - 3y = 27$. Mit der Tangentengleichung und $(15, 16)$ folgt:

$$15xb^2 - 16ya^2 = a^2b^2 + p$$

Mit den Koeffizientevergleichen erhalten wir $15b^2 = 5$, $16a^2 = 3$, also $b^2 = 1/3$ und $a^2 = 3/16$. Und $p = 27 - \frac{1}{16}$.

◁

25.5.8 Flächen zweiter Ordnung**

Dieser Abschnitt dient nur dem Interesse, er enthält keinen prüfungsrelevanten Stoff.
Die allgemeine Form von Flächen zweiter Ordnung ist

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Behandelte Beispiele sind die Kugel und der Zylinder. Hinzu kommen noch andere Flächen, wie z.B. Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide. Man beachte die Verwandtschaft mit den Kegelschnitten Ellipse, Hyperbel und Parabel. Es gibt aber auch gemischte Flächen, wie z.B. elliptische Kegel oder hyperbolische Paraboloide etc.

Ellipsoid

Die beschreibung eines Ellipsoids, einer geschlossenen Fläche, die in den zwei Hauptschnitten jeweils eine Ellipse aufweist.

Das Ellipsoid gehorcht der folgenden Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (25.8)$$

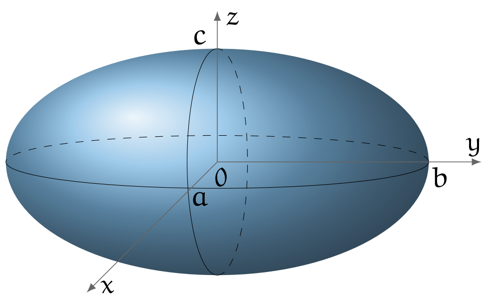


Abbildung 25.1

Man erkennt die drei Ellipsenhauptachsen a, b und c. Falls $a = b = c$ resultiert die Kugel. Damit ist das Ellipsoid eine Verallgemeinerungs der Kugel. Das Ellipsoid wird als verbessertes Modell für die Erde verwendet. So nimmt das Modell "WGS 1984" an, $a = c = 6356752\text{m}$ und $b = 6378137\text{m}$, ein Unterschied von rund 22km oder 0.035%.

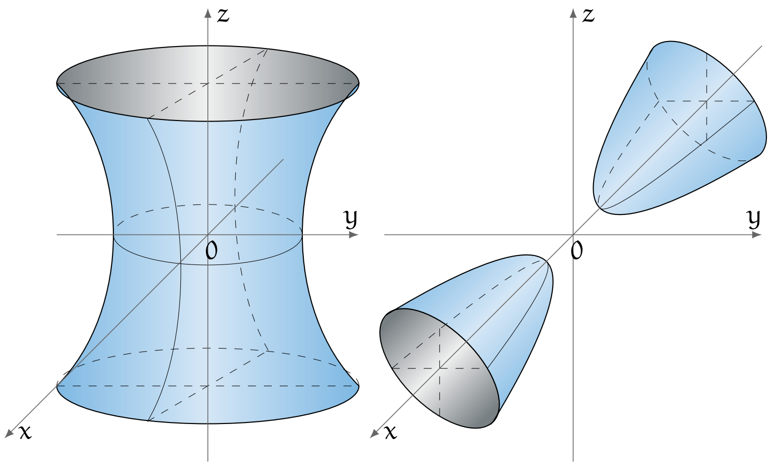
Hyperboloid

Das Hyperboloid kommt in zwei Ausprägungen daher, nämlich in der ein- und der zweischaligen Ausführung. Das einschalige Hyperboloid folgt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

das zweischalige:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

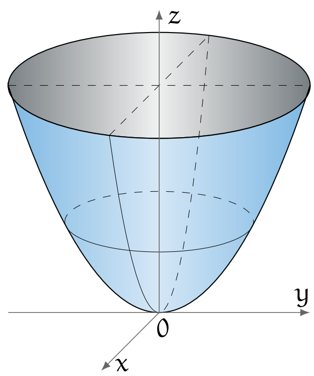


Für einschalige Hyperboloide ist die Schnittkurve aller Ebenen, die zur xy-Ebene parallel sind, Ellipsen. Schnittkurven, die parallel zur xz- oder yz-Ebene sind, bilden Hyperbeln, mit Ausnahme der Flächen, für die $x = \pm a$ und $y = \pm b$ gilt. Hier sind es dann sich schneidende Geraden.
Die Schnittkurven des zweischalige Hyperbolid mit der xy- und xz-Ebene sind Hyperbeln. In der yz-Ebene gibt es keinen Schnitt, aber in dazu parallelen Ebenen, für die $|x| > |a|$ ist, kommen Ellipsen hervor.

Paraboloid

Das elliptische Paraboloid besitzt die Bestimmungsgleichung

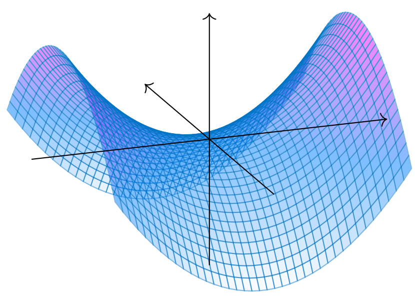
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$



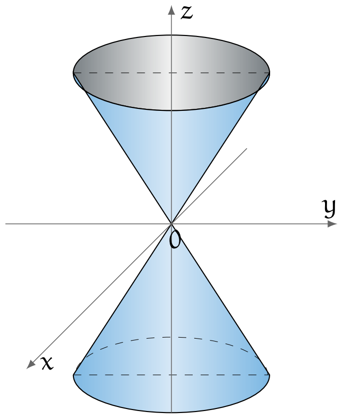
Wie der Name schon andeutet, sind Schnitte je nach Schnittebene Ellipsen, xy-Ebene, oder dann Parablen, Schnittebene parallel zu den xz- und yz-Ebenen. Die Abbildung zeigt ein Paraboloid, dessen Parameter c grösser als null ist. Für $c < 0$ liegt die Spitze ebenfalls bei $(0, 0, 0)$ folgt aber der

negative z-Achse.
Im Spezialfall $a = b$ ist das Paraboloid rotationssymmetrisch, was früher für Leuchten am Fahrzeug verwendet wurde.
Das andere Paraboloid ist das hyperbolische (siehe Abbildung). Es weist die typische Sattelform auf und umschliesst nicht etwas Körperähnliches. Seine Bestimmungsgleichung lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$



In der Abbildung sind die Kurven sichtbar, die aus dem Schnitt mit xz- und yz-Ebenen erzeugt werden. In beiden Fällen sind es Scharen von Parabeln, die entweder noch oben oder nach unten offen sind. Die Schnitte allerdings in der xy-Ebene erzeugen Paare von Hyperbeln.

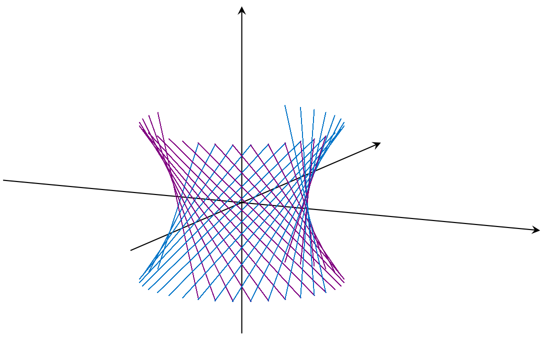


Elliptischer Kegel

Wir haben in Abschnitt 25.5.3 dem Kreiskegel schon besprochen. Nun erweitern wir den Kegel, so dass seine Schnittkurve mit zur Kegelachse senkrechten Ebenen als eine Ellipse erscheint, ausser in einem Punkt. Die Ellipse ist ja ein verallgemeinerter Kreis. Die Formel ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Im Ursprung ist die Schnittkurve zu einem Punkt geschrumpft.

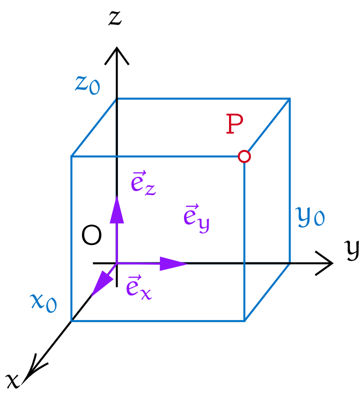


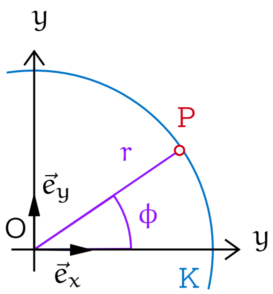
Der Kegel ist mit dem Zylinder sowie einschaligem Hyperboloid und hyperbolischem Paraboloide, nebst der Ebene, eine sogenannte *Regelfläche*. Eine Fläche heisst Regelfläche, wenn gilt: durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade, die ganz in der Fläche enthalten ist. Hier bedeutet Regel sovie wie Lineal. Bei den beiden letztgenannten gehen durch jeden Punkt sogar zwei Geraden. Diese sind aber nicht sofort einsichtig. In der Abbildung links sind die Geraden für den Hyperboloiden eingezeichnet. Es erinnert an altmodische Lampenschirme.

25.6 Krummlinige Koordinaten

25.6.1 Polarkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten in drei Dimensionen gehen von einem Ursprung $(0, 0, 0)$ aus. Auf drei zueinander senkrechten Geraden werden dann Abstände festgelegt, die Zusammen jeden Punkt des Raumes festlegen. Diese sind Mehrfache des Einheitsvektors in die betreffende Richtung: $(x_0, y_0, z_0) = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_o\vec{e}_z$. Der Punkt (x_0, y_0, z_0) und der Nullpunkt $(0, 0, 0)$ kann man sich als Eckpunkte eines Quaders vorstellen. Nun ist dies nicht die einzige Art, um jeden Punkt im Raum zu verorten.

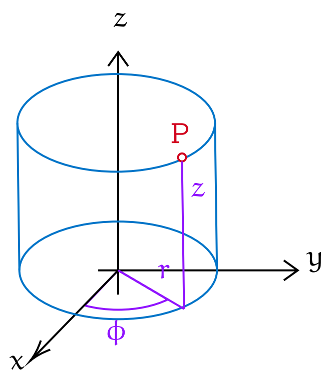




Alternative sind uns schon bekannt, denn die Parameter von Kurven, Ebenen und Körper kann man auch als Koordinaten verstehen. Wir erinnern uns, dass ein Kreis in der Ebene als $K : \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$ dargestellt wurde. Das Koodinatensystem, das aus der Länge r und dem Winkel ϕ mit $0 \leqslant \phi < 2\pi$ bilden die *Polarkoordinaten*. Ein Punkt P wird also durch (r, ϕ) in der Ebene festgelegt. Nun könnte man annehmen, dieser Punkt sei die Projektion eines Punktes im Raum mit $(r, \phi, 0)$. Polarkoordinaten sind sinnvoll, wenn eine Figur symmetrisch in Bezug zum Ursprung ist.

25.6.2 Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten kann man sich als Polarkoordinaten plus die z-Koordinate des kartesischen Systems vorstellen. Ein Punkt $P = (x, y, z)$ im kartesischen System wird ersetzt durch (r, ϕ, z) Auf Seite 25-41 haben wir den Zylinder in Parameterform schon als:



$$Z: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

kennengelernt.

Für die Transformation zwischen Kartesisch und Zylinderkoordinaten gelten folgende Regel.

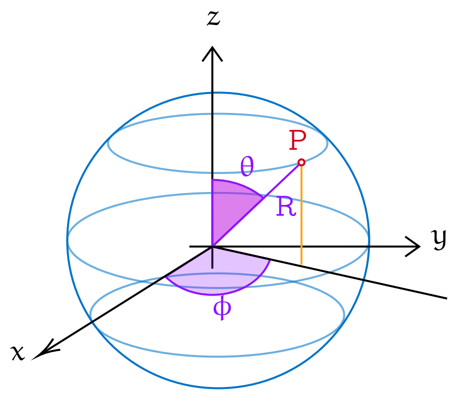
Eigenschaften 25.1. Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi & \qquad r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r\sin\phi & \qquad \phi &= \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \\ z &= z & \qquad z &= z \end{aligned}$$

wobei $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ für $y \geqslant 0$ und $\pi < \phi < 2\pi$ für $y < 0$

25.6.3 Kugelkoodinaten

Kugelkoordinaten sind aus der Geographie bestens bekannt, kann doch jeder Ort auf der Erdkugel mit Länge (östlich, westlich) und Breite (nördlich, südlich) mit zwei Winkelmassen angegeben werden. Z.B. Zürich 47.369° und 8.524°. In der Mathematik wird der Winkel der Breite allerdings vom Nordpol zur Aequatorialebene gemessen und nicht von der Aequatorialebene in Richtung Nordpol. Die Ortschaft Greenwich nahe London hat die Länge Null $(y = 0)$, liegt auf dem Nullmeridian. Anstatt mit Vorzeichen wird mit Himmelsrichtungen operiert.



Eigenschaften 25.2. Kugelkoordinaten (R, ϕ, θ):

$$x = R\sin\theta\,\cos\phi \qquad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = R\sin\theta\,\sin\phi \qquad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = R\cos\theta \qquad \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

wobei $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ für $y \geqslant 0$ und $\pi < \phi < 2\pi$ für $y < 0$

Die Winkel θ und ϕ sind im Bogenmass gegeben.

Anmerkung 25.3. Die Koordinaten unterliegen folgenden Bedingungen: $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$, $\rho \geqslant 0$ and $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
Zudem ist ϕ unbestimmt, wenn $(x, y) = (0, 0)$. Zudem ist θ unbestimmt, wenn $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Der Ursprung kann nicht dargestellt werden.

25.4 Übung Wir transformieren den Punkt $P = (-2, -2, 1)$ von kartesischen zu Zylinder- und zu Kugelkoordinaten. Dazu verwenden wir die obigen Eigenschaften.
Es folgt für Zylinderkoordinaten: $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\phi = \arctan\left(\frac{-2}{-2}\right) = \arctan(1) = \frac{5\pi}{4}$, weil $y = -2 < 0$. Deshalb $(r, \theta, z) = \left(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, 1\right)$.
Für Kugelkoordinaten: $R = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$, $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1.23$. Somit $(R, \phi, \theta) = \left(3, \frac{5\pi}{4}, 1.23\right)$. $\triangleleft$

Aufgaben

3.5 Gegeben sind die Punkte A(p/0/0), B(0/3p/0) und C(0/0/2p), p>0 konstant. Berechnen Sie den Winkel BAC. [50‰]

5 Wir bestimmen die zwei Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -p \\ 3p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -p \\ 0 \\ 2p \end{pmatrix}$$

Wir setzen $p = 1$, da für den Winkel nur die Richtung massgeblich ist. Wir rechnen das Skalarprodukt aus zu $(-1)(-1) = 2$. Die Längen sind $a = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ und $b = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Der Kosinus des Zwischenwinkels ist $\cos(\phi) = 2/\sqrt{10 \cdot 5}$. Daraus der $\arccos(2/\sqrt{10 \cdot 5}) = \arccos(0.2828) = 73.57°$.

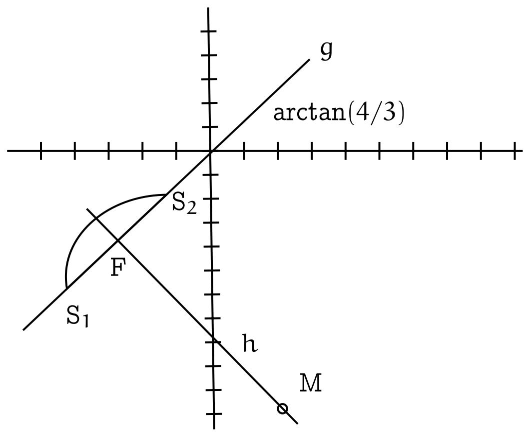
3.6 Gegeben sind die Punkte A(0/0) und C(8/6).

(a) Ein Kreis k um M(2/-11) schneidet aus der Geraden AC eine Sehne der Länge 4 heraus. Bestimmen Sie eine Gleichung für k. [67‰]

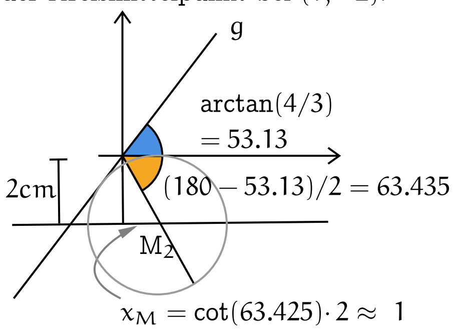
(b) Ein Kreis mit Radius 2 berührt die Gerade AC und die positive x-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten seines Mittelpunktes. [50‰]

6 **(a)** Nenne wir die Gerade durch die zwei Punkte g. Der Mittelpunkt des Kreises durch zwei Punkte liegt auf der Senkrechten der Geraden g. Diese ist $g : y = mx + b$ mit $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 8/6 = 4/3$ und $b = 0$ aus $y = 0 = m \cdot 0 + b$. Die zu dieser Geraden senkrechte h hat die Steigung $m_h = -1/m$ also $-3/4$.

Aus dem Punkt $M = (2, -11)$ folgt $y_h = -3/4x + c$ und $-11 = -3/4 \cdot 2 + c$, daraus $c = -9.5$. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist $-3/4x - 9.5 = 4/3x$. Daher $-9/12 - 16/9x = 9.5$ und $-25/12x = 9.5$ und $-9.5 \cdot 12/25 = -4.56 = x_F$ für den Fusspunkt. $y_F = 4/3x_F = -6.08$, also $F = (-4.56, -6.08)$. Gemäss Aufgaben ist $\overline{FS_1} = \overline{FS_2} = 2$. Daraus ergibt sich $\delta x = 3/2.5$ (weil die Seiten des Tangentendreiecks sich verhalten wie 5:4:3) oder mit den trigonometrischen Funktionen $\delta x = \cos(53.13) \cdot 2 = 1.2$ und $\delta y = 4/2.5 = 1.6 = \sin(53.13) \cdot 2$. Damit ergibt sich für die Schnittpunkte $S = (-4.56 \pm 1.2, -6.08 \pm 1.6)$ oder $S_1 = (-5.76, -7.68)$ und $S_2 = (-3.36, -4.48)$.



(b) Wir kennen die Winkel und wissen, dass der Kreismittelpunkt auf der Winkelhalbierenden von x-Achse und Gerade g liegt und, dass der y-Abstand gleich -2. Es ist $x = \mathrm{ctg}(63.435°) = 1$. Also ist der Kreismittelpunkt bei $(1, -2)$.



3.7 Gegeben sei in einem dreidimensionalen Koordinatensystem die beiden Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, sowie h, welche durch die beiden Punkte A(6/4/1) und B(2/-4/4) geht.

(a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden h sowie den Punkt auf g, der in der yz-Ebene liegt. [74‰]

(b) Stellen Sie die beiden Geraden in einem Schrägbild dar und weisen Sie mittels Konstruktion nach, dass sich die beiden Geraden in S schneiden. [74‰]

(c) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden g und h und wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes S? [74‰]

7 **(a)** Für die Parametergleichung braucht es den Stützvektor, z.B. $\vec{p} = (6, 4, 1)$ plus einen Richtungvektor, z.B. aus der Differenz $(4, 8, -3)$. Damit schreiben wir $h : (6, 4, 1) + s \cdot (4, 8, -3)$. "In der Ebene yz liegen" heisst, hier ist $x = 0$ von g. Für dieses x gilt $x = 5 + t \cdot 1 = 0$. Damit $t = -5$. Diesen Wert für $\vec{r}$ bedeutet $D = (0, 3 - 25, 2) = (0, -22, 2)$

(b)

(c) Der Zwischenwinkel ergibt sich aus den Richtungsvektoren alleine; es gilt mit $\vec{u} = (1, 5, 0)$ und $vecv = (4, 8, -3)$, dass $\cos(\phi) = \vec{u} \bullet \vec{u}/uv$. Der Zähler wird zur $4 + 40 = 44$, $u = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$ und $v = \sqrt{16 + 64 + 9} = \sqrt{89}$. Damit $\cos(\phi) = \frac{44}{\sqrt{26}\sqrt{89}} = 0.91468$ und $\arccos(0.91468) = 23.84°$ Die Koordinaten ergeben sich aus den möglichen Gleichungssystemen. Mit der z-Komponenten, wo eine Komponenten null ist:

$$5 + t = 6 + 4s$$
$$2 = 1 - 3s$$

Daraus $s = -1/3$ und $t = 1 + 4s = 1 - 4/3 = -1/3$. Damit folgt für S. $S = (5 - 1/3, 3 - 5/3, 2) = (14/3, 4/3, 2)$.

3.8 Gegeben sind die zwei Punkte P(14/10) und Q(5/-2).

(a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade g mit der Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ durch die beiden Punkte verläuft. [27‰]

(b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden g, die doppelt so weit von Q entfernt liegen wie von P. [54‰]

(c) Leiten Sie rechnerisch her, dass die Menge aller Punkte, die von Q doppelt so weit entfernt sind wie von P, den Umfang des Kreises k mit Mittelpunkt M(17/14) und Radius $r = 10$ bildet. [81‰]

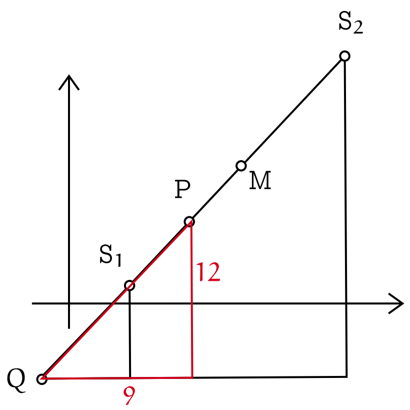
(d) Wie viele Kreise gibt es, die beide Koordinatenachsen und den Kreis k aus Teilaufgabe c berühren? Erstellen Sie dazu eine Skizze. [27‰]

(e) Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius des kleinsten dieser Kreise. [54‰]

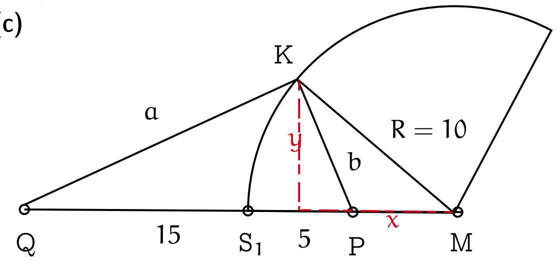
8 **(a)** Wir setzen zweimal ein und vergleichen die λ-Werte. Sind sie gleich, dann liegt der Punkt auf der Geraden. Also für P: $14 = 11 + \lambda 3$ daraus $\lambda = 1$. Für die y-Koordinate folgt $y = 6 + 1 \cdot 4 = 10$, stimmt! Und $5 = 11 + \lambda 3$, daraus $\lambda = -2$. Für y: $y = 6 - 2 \cdot 4 = -2$, stimmt auch!

(b) Es gibt zwei Punkte $S_{1,2}$, welche diese Bedingung erfüllen.

Ein Punkt ist zwischen P und Q, und zwar die Strecke im Verhältnis 2:1 teilend, und der zweite liegt jenseits von P auf der Geraden, sodass $2\overline{QS_2} = \overline{PS_2}$ In der Skizze sind die horizontalen und vertikalen Abstände von 9 und 12 eingezeichnet. Den Punkt S_1 erhält man aus Q, indem man 2/3 der Abstände addiert, also $S_1 = (5,-2)+(6,8) = (11,6)$ (Strahlensatz). Für x_{S_2} gilt: $2(x_{S_2} - x_P) = (x_{S_2} - x_Q)$, somit $2x_{S_2} - 2 \cdot 14 = x_{S_2} - 5$. Damit $x_{S_2} = 23$. Analog für $y_{S_2} = 2y_P - y_Q = 20 + 2 = 22$. Somit $S_2 = (23, 22)$. Rechnen wir den Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_1S_2}$ als Mittelwert der Koordinaten, resultiert $(11 + 23)/2, (6 + 22)/2) = (17, 14)$.

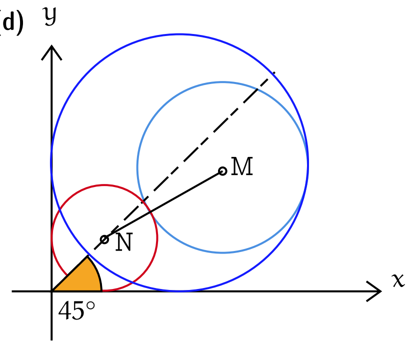


(c)



Das ist der Mittelpunkt des Kreises. Die Aussage stimmt für die zwei Punkte. Wir machen eine Skizze, wobei wir die Figur drehen und nur noch mit den Abständen arbeiten. Diese sind $\overline{QM} = 20$, $\overline{PM} = 5$. Der Vektor auf den Kreispunkt sei (x, y). Die Behauptung ist mit der Figur: $a = 2b$. Für $a^2 = y^2+(20-x)^2 = y^2+x^2+400-40x$ und mit $x^2+y^2 = 100$, der Kreisgleichung, folgt: $a^2 = -40x+500$. Für $b^2 = y^2 + (x-5)^2 = y^2 + x^2 - 10x + 25 = -10x + 125$. Nun ist hier $a^2 = 4b^2$ und damit $a = 2b$. Das ist eine schwierige Frage.

(d)



Es gibt 2 Kreise gemäss Skizze. Der kleinere habe den Radius f, dann sind die Koordinaten des Mittelpunkts $N = (f, f)$. Der Abstand zu M ist $f + 10$ und gleichzeitig die Länge des Vektors $\overrightarrow{MN}$, also $(17 - f, 14 - f)$ und daraus $(17 - f)^2 + (14 - f)^2 = (f + 10)^2$. Rechnerisch $289 - 34f + f^2 + 196 - 28f + f^2 = f^2 + 20f + 100$ oder $f^2 + 82f - 585 = 0$ und weiter $(f-41)^2 = 41^2 - 585 = 1096$ und $f = 41 \pm 33.1$. Der kleinere Radius ist 7.89.

3.9 * Von welchen Punkten der z–Achse aus gesehen erscheinen die Punkte A (16/6/10) und B (–8/0/2) unter einem rechten Winkel? [40‰]

9 Der Punkt auf der z-Achse sei $C = (0, 0, z)$. Wir bilden die zwei Vektoren $\vec{u} = (16, 6, 10) - (0, 0, z) = (16, 6, 10 - z)$ und $\vec{v} = (-8, 0, 2) - (0, 0, z) = (-8, 0, 2 - z)$. Rechtwinklig heisst $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. Also $-16 \cdot 8 + ((10 - z)(2 - z) = 0$. Daraus $20 - 10z - 2z + z^2 = 128$ und $z^2 - 12z = 108$. Weiter entweder mit der Mitternachtsformel oder mit quadratischem Ergänzen. Letzteres ergibt $(z - 6)^2 - 36 = 108$ oder $(z - 6)^2 = 144$. Damit $z - 6 = \pm 12$ und $z_{1,2} = 6 \pm 12$ oder $z_{1,2} = \{18, -6\}$.

3.10 * Die Gerade $g: \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ durchstösst die Ebene $E: 2x + 5y + 14z = 450$ in einem Punkt D.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten von D. [40‰]

(b) Welchen Winkel (auf Zehntel Grade gerundet) schliesst die Gerade g mit dem Normalenvektor n der Ebene E ein? [40‰]

(c) Wie gross ist der Abstand des Ursprungs O (0/0/0) von der Ebene E ? [40‰]

(d) Eine Kugel mit dem Mittelpunkt M (2/5/14) und dem Radius $a = 39$ schneidet die Ebene E in einem Kreis k. Wie gross ist dessen Radius r? [40‰]

(e) Eine zur z–Achse parallele Ebene V durch die Gerade g schneidet die xy–Ebene in einer Geraden $h: y(x) = mx + q$. Berechnen Sie m und q. [40‰]

10 **(a)** Wir haben die Formel hergeleitet (Formelsammlumg):

$$\vec{q} = \vec{s}_g + \frac{\vec{n} \bullet (\vec{s}_E - \vec{s}_g)}{\vec{n} \bullet \vec{v}} \vec{v}.$$

Alle Grössen sind bekannt ausser ein Stützvektor $\vec{s}_E$ auf die Ebene. Wir brauchen nur einen Punkt zu bestimmen, der auf E liegt. Wir setzen an $\vec{s}_E = (0, y, 0)$ und finden $y = 450/5 = 90$. Wir berechnen das erste Skalarprodukt $(2, 5, 14) \bullet \big((0, 90, 0) - (-2, -2, 1)\big) = (2, 5, 14) \bullet (2, 92, -1) = 4 + 460 - 14 = 450$. Das andere $(2, 5, 14) \bullet (4, 7, 13) = 8 + 35 + 182 = 225$. Damit erhalten wir den Ortsvektor zum Durchstosspunkt:

$$\vec{q} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{450}{225} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+8 \\ -2+14 \\ 1+26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 27 \end{pmatrix}$$

(b) Wir suchen den Zwischenwinkel von $\vec{n}$ und dem Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, dass $\cos(\phi) nv = \vec{n} \bullet \vec{v}$. Also $\vec{n} \bullet \vec{v} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 13 = 8 + 25 + (130 + 52) = 215$. Weiter $v = \sqrt{36 + 49 + 169} = \sqrt{254}$ und $n = \sqrt{4 + 25 + 196} = \sqrt{225} = 15$. Daraus $\cos(\phi) = 215/15/\sqrt{254} = 0.89935$. Daraus $\arccos(\phi) = 25.9°$.

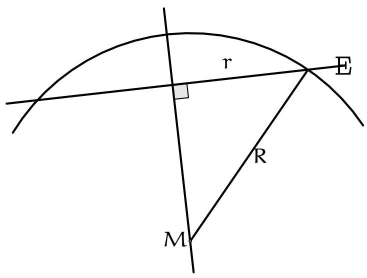
(c) Aus der Formelsammlung wissen wir, dass gilt

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Der Nullpunkt hat die Koordinaten $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)0$. Die Koeffizienten der Ebene sind $(a, b, c) = (2, 5, 14)$. Seine Länge ist $\sqrt{4 + 25 + 196} = \sqrt{225} = 15$. Also folgt

$$D = \frac{450}{15} = 30.$$

(d) Wir könnten die Kugel mit der Ebene schneiden und den Kreis bestimmen. Dies ist recht aufwendig. Es wird nach dem Radius gefragt. Deshalb könnte man den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Ebene ausrechnen.



Der Abstand, nennen wir ihn q, ist analog zu oben $q = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} - 450|}{15}$. Rechnerisch $(2, 5, 14) \bullet (2, 5, 14) = 4 + 25 + 196 = 225$. Daraus $q = \frac{|225 - 450|}{15} = 15$. Mit der Skizze und dem Pythagoras folgt $r^2 = R^2 - 15^2 = 39^2 - 15^2 = 1521 - 225 = 1296$ und radiziert $r = 36$.

(e) Die Vorschrift, dass die Gerade parallel zur z-Achse sei, bedeutet, dass wenn man von der z-Achse auf die Ebene schaut, man nur die Projektion der Geraden g sieht. Deshalb kann man in der xy-Ebene einfach die x und y-Koordinaten von g betrachten. Damit wird h:

$$h: \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zwei Punkte aus $t = 0$ und $t = 1$ und erhalten $(-2, -2)$ und $(2, 5)$. Die Gerade durch diese zwei Punkte hat die Steigung $m = 7/4$. Und einsetzten eines Punktes ergibt aus $y = (7/4)x + q$ dann $5 = (7/4)2 + q$ und somit $q = 5 - 7/2 = 1.5$. Das Resultat ust $h: y(x) = (7/4)x + 1.5$.

3.11 * Gegeben sind die beiden Geraden : $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
sowie die Punkte M(7/-3/11), A(5/-7/7) und Z(-5/-12/-10).

(a) Zeigen Sie, dass g und h rechtwinklig zu einander stehen. [12.5‰]

(b) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf h liegt und bestimmen Sie diejenige Gerade k, welche A enthält und senkrecht zu beiden Geraden g und h steht. [25‰]

(c) Zeigen Sie, dass die Gerade k die Gerade g schneidet und geben Sie den Schnittpunkt P an. [25‰]

(d) Es gibt 9 Würfel, welche je zwei Eckpunkte auf g und h besitzen. Beschreiben Sie die Lage dieser Würfel zu den Geraden g und h mithilfe von Skizzen und geben Sie ihre Kantenlängen an. (Beachten Sie, dass es auch Würfel gibt, bei denen die beiden Würfelpunkte auf g oder h keine Kante bilden.) [50‰]

(e) Wir betrachten nun die Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius $\sqrt{117}$. Zeigen Sie, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt (-1 / -1 / 4) berührt. [25‰]

(f) Die Gerade g wird nun von Z aus beleuchtet und wirft dabei einen Schatten auf die Kugel K, welcher Teil eines Kreises ist. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises. [62.5‰]

11 (a) Das Skalarprodukt der zwei Richtungsvektoren muss null sein: Kontrolle: $(2, 1. -2) \bullet (1, 2, 2) = 2 + 2 - 4 = 0$

(b) Gibt es ein s, das für die drei Koordinaten des Punktes gilt? Aus $5 = 7 + s$, daraus $s = -2$. Für y eingesetzt: $y = -3 - 2 \cdot 2 = -7$, ok! $z = 11 - 2 \cdot 2 = 7$, ok! “Senkrecht zu beiden” $\Leftrightarrow \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{w} = (6, -6, 3)$$

Daraus $k : (5, -7, 7) + q(6, -6, 3)$.

(c) “Sich schneiden” ⇒ Geradengleichung gleichsetzen. Die ersten zwei Komponenten:

$$5 + 6q = -1 + 2t$$
$$-7 - 6q = -1 + t$$

Addition der Gleichungen: $5 - 7 + 6q - 6q = -1 + 2t - 1 + t$ oder $-2 = -2 + 3t$, $t = 0$. Daraus $-7 - 6q = -1$ oder $-6 = 6q$ und $q = -1$. Testen an der z-Koordinate $4 = 7 - 3 = 4$, ok! Schnittpunkt $P = (-1, -1, 4)$

(d) Grundsätzlich gibt es drei konstelltionen von vier Punkten Würfel. Ist

(e) Die Gleichung der Kugel K lautet $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 + (z - 11)^2 = 117$. Wir setzten die Koordinaten von g in Parameterform ein, also $x = -1 + 2t$ etc. und erhalten

$$(-1 + 2t - 7)^2 + (-1 + t + 3)^2 + (4 - 2t - 11)^2 = 117$$

und nun berechnet

$$\begin{aligned} (2t - 8)^2 + (t + 2)^2 + (-2t - 7)^2 &= 117 \\ (4t^2 - 32t + 64) + (t^2 + 4t + 4) + (4t^2 + 28t + 49) &= 117 \\ 9t^2 - 4t + 117 &= 117 \\ t(9t - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Lösungen für diese Gleichung, entweder $t = 0$ oder $t = 4/9$. Für $t = 0$ ergibt g: $(-1, -1, 4)$. ok!

(f) Der Schattenwurf ist gleichbedeutend dem Schnitt der Kugel mit der Ebene, die von g und dem Punkt Z gebildet wird. Wenn wir den Abstand des Kugelmittelpunktes von dieser Ebene kennen, dann gilt der Pythagoras in der Form $r^2 = R^2 - a^2$ mit R Radius der Kugel, a Abstand und r Radius des gesuchten Kreises. Der Abstand eines Punktes von der Ebene ist 8Formelsammlung)

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Wir brauchen den Normalenvektor auf die Ebene. Dazu brauchen wir drei Punkte, Z und P sind schon vorhanden, ein dritter B ist mit $t = 1$ z.B. $(1, 0, 2)$. Zwei Vektoren in der Ebene sind $\overrightarrow{ZP} = (-5+1, -12+1, -10-4) = (-4, -11, -14)$ und $\overrightarrow{ZB} = (-5-1, -12, -6-2) = (-6, -12, -8)$, gestaucht $(-3, -6, -4)$

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -11 & -6 \\ -14 & -4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 64-44 \\ 42-16 \\ 33-24 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w} = (20, 26, 9)$$

Die Ebene ist beschrieben durch Normale und eine Punkt, hier B, als $\vec{w}(x, y, z) = \vec{w}(1, 0, 2)$. Oder $d = -\vec{w}(1, 0, 2) = -(20, 26, 9) \bullet (1, 0, 2) = -20 - 18 = -38$.

3.12 * Betrachten Sie die Gleichung des folgenden Kegelschnitts:

$$25x^2 + 19y^2 + 100x - 54y - 44 = 0$$

Bestimmen Sie im Fall einer Ellipse den Mittelpunkt, grosse und kleine Halbachse, die vier Endpunkte der Halbachsen und die Brennpunkte. Im Fall einer Hyperbel den Mittelpunkt, die Scheitelpunkte, die Brennpunkte und die Asymptoten. Im Fall einer Parabel den Scheitelpunkt, den Brennpunkt und die Leitlinie. Skizzieren Sie die Kurve in einem x-y Koordinatensystem. [62.5‰]

12 Wir müssen den Ausdruck in eine Normalform bringen, d.h. umformen mit quadratischem Ergänzen

$$\begin{aligned} 25x^2 + 9y^2 + 100x - 54y - 44 &= 0 \\ 25(x^2 + 4) + 9(y^2 - 6) - 44 &= 0 \\ 25[(x+2)^2 - 4] + 9[(y-3)^2 - 9] - 44 &= 0 \\ 25(x+2)^2 + 9(y-3)^2 - 100 - 81 - 44 &= 0 \\ 25(x+2)^2 + 9(y-3)^2 &= 225 \quad | : 25 : 9 \\ \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} &= 1 \end{aligned}$$

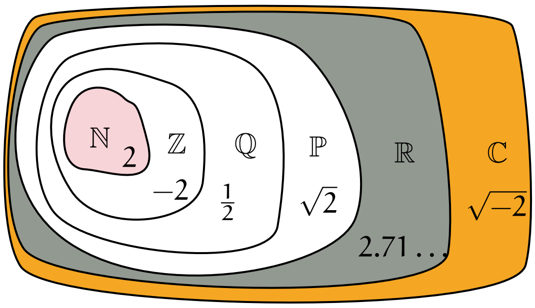
Das ist eine Ellipse mit Hauptachsen $a = 3$ und $b = 5$, Mittelpunkt $M = (-2, 3)$: Die Endpunkte $S_{1,2} = (-2 \pm 3, 3)$ und $S_{3,4} = (-2, 3 \pm 5)$. Die Brennpunkte sind mit $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16} = 4$, damit $F_{1,2} = (-2, 3 \pm 4)$

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

– den Begriff der komplexen Zahl und ihrer verschiedenen Formen (algebraische und trigonometrische Form) darstellen
– die Operationen unter all ihren obengenannten Formen definieren, ihre Eigenschaften und die Formel von Moivre darstellen
– eine komplexe Zahl in der Gauss'schen Ebene darstellen, ihre Teile identifizieren (Real- und Imaginärteil, Modul und Argument)
– Gleichungen in der Menge $\mathbb{C}$ lösen (2. Grades und solche, welche auf eine 2. Grades zurückgeführt werden können wie $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$
– Operationen in der Menge $\mathbb{C}$ geometrisch interpretieren.
– Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach C vom Typ $z \mapsto az + b$ anwenden und geometrisch interpretieren

Kapitel 26

Komplexe Zahlen*



Wir führen, zum letzten Mal, noch eine Zahlenmenge ein. Diese soll dem Ausdruck $\sqrt{-1}$ eine Bedeutung geben. Wenn man der Auffassung ist, Mathematik ist eine Erfindung des Menschen, dann kann man problemlos eine neue Zahlenmenge erfinden. Die Zahlenmenge schliesst eine Lücke der reellen Zahlen, die eben nicht mit *geraden* Wurzeln von negativen Zahlen umgehen kann. Wie schon oft sind Carl Friedrich Gauss und Leonhard Euler bei der Einführung dabei.

Wir fragen wieder man nach den Eigenschaften der Zahlen, ihrem Verhalten bezüglich der Operationen und nach neuen Operationen und Zusammenhängen.

Die Basis ist die *imaginäre Einheit*. Ob der Name gut gewählt ist, wollen wir beiseite lassen.

26.1 Begriffe

Der zentrale Begriff ist die imaginäre Einheit i, deren Quadrat i^2 festgelegt wird.

Definition 52. Die imaginäre Einheit i weist die zwei folgenden Eigenschaft auf:

(1) $\mathrm{i}^2 = -1$

(2) Mit c einer reellen Zahl $c \geqslant 0$ gilt $\sqrt{-c} = \mathrm{i}\sqrt{c}$

Wenn man genau hinschaut gibt es zwei Ausprägungen der imaginären Einheit, denn mit $\mathrm{i}^2 = -1$ folgen zwei Wurzeln $\pm\sqrt{-1} = \{\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$.

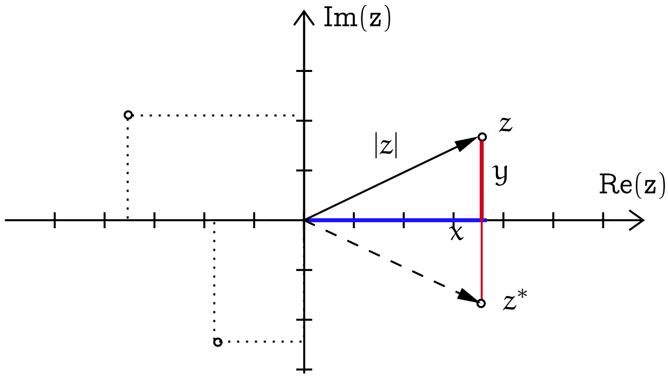
Wichtig 6. Beachte Eigenschaft 2: $\sqrt{-4} = \mathrm{i}\sqrt{4} = \mathrm{i}(2) = 2\mathrm{i}$ ist in Ordnung, aber $\sqrt{-(-4)} \neq \mathrm{i}\sqrt{-4}$! $\dashv$

Definition 53. Eine *komplexe Zahl* z ist eine Zahl der Form

$$z = a + bi$$

wobei a und b reelle Zahlen sind und i die imaginäre Einheit. Man nennt a den Realteil von z, $a = \text{Re}(z)$ und b den Imaginärteil $b = \text{Im}(z)$

Die Menge komplexer Zahlen nennt man $\mathbb{C}$.



Der Imaginärteil bildet eine neue Dimension, denn er kann nicht Teil der reellen Zahlen sein und deshalb nicht auf dem Zahlenstrahl liegen. Real- und Imaginärteil spannen die *Gauss'sche Ebene* auf. Eine komplexe Zahl ist ein Punkt dieser Ebene und deshalb ein Tupel (x, y) in $\mathbb{C}$. Dies ist die kartesische Darstellung. Wir haben in der Vektoranalysis die Koordinaten mit den Vektoren in Zusammenhang gebracht. Man könnte eine komplexe Zahl auch als Vektor auffassen. Allerdings benutzt man einen anderen Sprachgebrauch.

Definition 54. Die Länge oder Betrag von z nennt man *Modul* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Den Richtungswinkel φ nennt man *Argument* von z, auch $\varphi = \arg(z) = \arctan(b/a)$

Anmerkung 26.1. Die trigonometrisch Funktion hat unendlich viele periodisch Lösungen. Deshalb meint man mit $\arg(z)$ den kleinsten Wert, den man *Hauptwert* nennt.

26.2 Übung Gesucht wird Modul und Argument der komplexen Zahl $3 - 2i$. Aus dem Pythagoras (und der Definition) folgt $|3 - 2i| = \sqrt{9 + 4)} = \sqrt{13}$. Das Argument ist $\varphi = \arg(-2/3) = -33.69°$. $\triangleleft$

Wie man der Abbildung leicht entnehmen kann, gibt es auch eine Darstellung in Polarkoordinaten, d.h. mit Radius und Winkel.

Definition 55. Die komplexe Zahl z^*

$$z^* = a - bi$$

heisst die zu $z = a + bi$ *konjugierte* komplexe Zahl.

Wichtig 7. Die Schreibweise ist nicht einheitlich. Es wird auch $\bar{z}$ für z^* geschrieben. $\dashv$

Wie wir der obigen Abbildung entnehmen, ist die Konjugierte die an der x-Achse gespiegelte komplexe Zahl z. z und z^* haben denselben Betrag oder Länge.

Die Konjugierte hat wichtige Eigenschaften. Folgendes gilt:

Eigenschaften 26.3. Konjugierte Komplexe Zahl Es sind z und w zwei komplexe Zahlen. Es gilt

- $(z^*)^* = z$
- $(z+w)^* = z^* + w^*$
- $(zw)^* = z^* \cdot w^*$
- $(z^n)^* = (z^*)^n$, für eine natürliche Zahl n
- z ist eine reelle Zahl, nur dann wenn $z = z^*$.

Die Gleichheit $(z+w)^* = z^* + w^*$ leitet sich wie folgt her. Wir setzen $z = a + ib$ und $w = c + id$. Daraus folgt die Summe $z + w = (a+c) + i(b+d)$. Die Konjugiert dieser Summe ist $(a+c) - i(b+d)$. Die Konjugierten von w und z sind $z^* = a - ib$ und $w^* = c - id$. Ihre Summe ergibt $(a+c) - i(b+d)$. Die zwei Ausrücke sind gleich.
Die vierte Eigenschaft beweist man am einfachsten mit der vollständigen Induktion.

26.4 Beispiel Bestimme die Konjugierte von 6. Da $6 = 6 + i \cdot 0$ ist, folgt $6^* = 6 - i \cdot 0 = 6$. Also ist $6^* = 6$. $\triangleleft$

26.2 Grundoperationen in kartesischer Form

26.2.1 Addition und Subtraktion

Satz 26.1. Komplexe Zahlen werden addiert, indem man die Realteile und die Imaginärteile separat addiert. Komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem man die Realteile und die Imaginärteile separat subtrahiert.

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

Die Addition von $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ ist einfach

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Die Subtraktion analog:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

26.2 Übung Wir addieren $(1-2i) + (3+4i)$ und bekommen $(4+2i)$, und für die Differenz gilt $(1-2i) - (3+4i) = (-2-6i)$. $\triangleleft$

26.2.2 Multiplikation und Division

Zwei Zahlen werden multipliziert wie man Summen ausmultipliziert. Mit $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ folgt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - 1(b_1 b_2 b) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Multiplikation in kartesischen Koordinaten nicht ganz einfach zu merken.

Satz 26.3. Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen gilt:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Anmerkung 26.4. Das Produkt $z \cdot z^*$ ergibt $a^2 + b^2$ oder $|z|^2$.

26.5 Übung Wir multiplizieren $z_1 = 3 - 2i$ mit $z_2 = -5 + 4i$. Die Formel haben wir ja hergeleitet und können sie direkt verwenden, also.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (-15) - (-8) + i(3 \cdot 4 + (-5) \cdot (-2)) \\ &= -7 + 22i \end{aligned}$$

◁

Wir wollen nun $z = a + bi$ mit $z^* = a - bi$ multiplizieren. Wir sehen, dass folgendes, wie schon oben bemerkt, gilt:

$$z \cdot z^* = a^2 + b^2.$$

Die Division $\frac{z_1}{z_2}$ kann man so deuten: Womit muss ich z_2 multiplizieren, dass das Produkt gleich z_1 ist? Wir gehen von der Gleichung

$$z_1 = a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + yi).$$

Die Multiplikation mit Koeffizientenvergleich ergibt:

$$z_1 = \underbrace{a_2 x - b_2 y}_{a_1} + \underbrace{(a_2 y - b_2 x) i}_{b_1}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir mit der Determinantenmethode. Die Koeffizientendeterminante ist:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2 + b_2^2$$

Damit folgt:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}}{a_2^2 + b_2^2}$$

und weiter

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Damit folgt also

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Die Division ist noch anspruchsvoller als die Multiplikation.

26.6 Übung Wie nehmen die schon bekannten zwei Zahlen $(3 - 2i)$ und $(-5 + 4i)$ und berechnen $\frac{3-2i}{-5+4i}$. Mit der gefundenen Formel folgt der Nenner $25 + 16 = 41$ und die Zähler $-15 - 8$ und $10 - 12 = -2$. Somit folgt

$$\frac{3 - 2i}{-5 + 4i} = \frac{-23}{41} + \frac{-2}{41} i$$

◁

Eine Alternative zu dieser Berechnung ist das Erweitern des Bruchs. Hier wird es besonders einfach, weil man ja mit der Konjugierten des Nenners erweitern kann, z.B.

$$\begin{aligned}\frac{3-2i}{-5+4i} &= \frac{(3-2i)(-5-4i)}{(-5+4i)(-5-4i)} \\ &= \frac{-15-12i+10i+8i^2}{25-4i^2} \\ &= \frac{-15-8-2i}{25+16} \\ &= \frac{-23-2i}{41}\end{aligned}$$

Dies ist definitiv die einfachste Methode, ohne sich eine Formel merken zu müssen.

Satz 26.7. Division komplexer Zahlen Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man mit der Konjugierten des Nenners erweitert:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot b^*}{b^2}$$

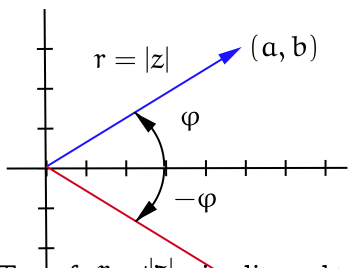
Nun berechnen wir $\frac{z}{z^*}$. Es folgt:

$$\frac{z}{z^*} = 1.$$

Das gleiche Resultat wie $\frac{z}{z}$.

26.3 Grundoperationen mit Polarkoordinaten

Wir betrachten das Zahlenpaar (a, b) als Vektor aus dem Ursprung und chrakterisieren diesen durch Richtung und Betrag.



Die Länge ist

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und der Winkel φ ergibt sich als

$$\varphi = \arctan(\frac{b}{a}).$$

Die Punkte der Gauss'schen Ebene sind also jetzt (r, φ). Die Transformation in die andere Richtung, von polar zu kartesisch, erfolgt mit den trigonometrischen Funktionen, d.h. $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $z^* = r \cdot (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. Mit den bekannten Beziehungen gilt auch:

$$z^* = r \cdot (\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$$

Eigenschaften 26.1. Transformationen

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) \qquad b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Anmerkung 26.2. Die Winkelkoordinate φ ist unendlich vieldeutig, denn jede weitere volle Umdrehung führt zum gleichen Bildpunkt $(\varphi = \varphi + n \cdot 2\pi)$. Man beschränkt sich daher bei der Winkelangabe meist auf den im Intervall $0 \geqslant \varphi < 2\pi$ gelegenen *Hauptwert*.

26.3.1 Addition und Subtraktion

Die Addition und die Subtraktion führen nur über die kartesische Darstellung. Deshalb rechnet man:

$$z_1 + z_2 = \big(r_1\cos(\varphi_1) + r_2\cos(\varphi_2)\big) + i \cdot \big(r_1\sin(\varphi_1) + r_2\sin(\varphi_2)\big).$$

Und für die Subtraktion analog.

26.3.2 Multiplikation und Division

Wir führen die Multiplikation aus für $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$. Wir erhalten als erste Form:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \big(& \overbrace{\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)}^{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} \\ & + i\underbrace{(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\big) \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

Satz 26.3. Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

Analog erhält man für die Division unter Verwendung der Additionstheoreme der Trigonometrie:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$$

Satz 26.4. Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Winkel subtrahiert.

Mit Polarkoordinaten ist die Multiplikation und die Division besser zu memorisieren.

26.4 Exponentialdarstellung**

Von Leonhard Euler stammt die Formel, die Exponential und trigonometriesche Funktionen verbindet:

Formel 26.1.

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Damit lässt sich eine komplexe Zahl mit Betrag und Winkel noch knapper darstellen als

Formel 26.2.

$$z = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Damit wird die Multiplikation einfach zu

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

und die Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Anmerkung 26.3. Anstatt $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ wird auch die Schreibweise $\operatorname{cis}(\varphi)$ verwendet. Die Buchstaben cis stehen für $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Damit wird $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Definition 56. Die Funktion $\operatorname{cis}(x)$ sei:

$$\operatorname{cis}(x) := \cos(x) + i\sin(x)$$

26.5 Potenzen und Wurzeln

26.5.1 Potenzen

Das Potenzieren geht auf die Multiplikation zurück, indem man n Mal dieselbe Zahl mit sich multipliziert. Also der Spezialfall $z_1 = z_2 = z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ wird quadriert also

$$\begin{aligned}
[r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))]^2 &= r \cdot r(\cos(\varphi + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi)) \\
&= r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))
\end{aligned}$$

und zur 3. Potenz

$$\begin{aligned}
[r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))]^3 &= [r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))]^2 \cdot r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\
&= r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) \cdot r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\
&= r^3(\cos(2\varphi + \varphi) + i\sin(2\varphi + \varphi)) \\
&= r^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) \ ,
\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion kann man beweisen, dass die Formel analog für n anstelle von 2 oder 3 gilt.

Satz 26.1. Satz von De Moivre Für jede ganze Zahl n,

$$[r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \ .$$

oder

$$[re^{i\varphi}]^n = r^n e^{i\varphi n}$$

oder

$$[r \operatorname{cis}(\varphi)]^n = r^n \operatorname{cis}(n\varphi)$$

26.2 Übung Bestimmen wir $(1+i)^{10}$. Weil $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ oder $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$ ist, folgt mit dem Satz von De Moivre:

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos(450^\circ) + i\sin(450^\circ)) = 2^{10/2}(0 + i(1)) = 2^5 \cdot i = 32i.$$

◁

Wir haben behauptet, dies gelte für alle ganzen Zahlen, also auch for $n = -3$. Definitionsgemäss ist $z^0 = 1$ und $z^{-n} = 1/z^n$. Für $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
z^{-n} &= \frac{1}{z^n} \\
&= \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))} \\
&= \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)\cdot(\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi))}{r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))\cdot(\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi))} \\
&= \frac{1}{r^n}(\cos(0^\circ - n\varphi) + i\sin(0^\circ - n\varphi)) \\
&= r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) \ ,
\end{aligned}$$

Das Beispiel belegt die Behauptung, dass n eine ganze Zahl sein darf.

26.5.2 Wurzeln

Wir können den Ansatz versuchen, anstatt n den Bruch $1/n$ anzuwenden. Man erinnere $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Wir haben oben die dritte Potenz einer komplexen Zahl bestimmt. Ausgehend vom Resultat kennt man dann auch die dritte Wurzel. Bekannt ist

$$r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = [r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))]^n$$

Wir substituieren $r^n = s$ und $n\varphi = \vartheta$ und schreiben

$$s(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) = \left[s^{1/n}(\cos(\vartheta/n) + i\sin(\vartheta/n))\right]^n$$

Jetzt potenzieren wir mit $()^{1/n}$

$$[s(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))]^{1/n} = s^{1/n}(\cos(\vartheta/n) + i\sin(\vartheta/n))$$

Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch mit der Periode 2π. Deshalb ist

$$s(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) = s(\cos(\vartheta + k\cdot 2\pi) + i\sin(\vartheta + k\cdot 2\pi))$$

Satz 26.3. Für eine komplexe Zahl, die nicht Null ist $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ und positiver ganzer Zahl n, sind die n-ten Wurzeln von z

$$r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Wichtig 8. ☠ Eine n-te Wurzel einer komplexen Zahl hat insgesamt genau n Wurzeln. ⊣

Anmerkung 26.4. Für $k = n$ resultiert dieselbe Wurzel wie für $k = 0$.

26.5 Übung Wir bestimmen die 3 kubischen Wurzeln von i. Weil $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, ergeben sich die drei Wurzel zu:

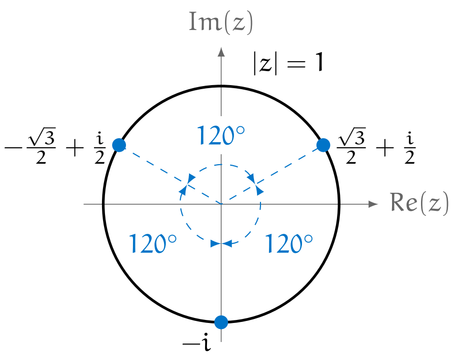
$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi(0)}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi(0)}{3}\right)\right] \\
&= \cos(\frac{1\pi}{2\cdot 3}) + i\sin(\frac{1\pi}{2\cdot 3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi(1)}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi(1)}{3}\right)\right]$$
$$= \cos(\frac{5\pi}{2\cdot 3})+i\sin(\frac{5\pi}{2\cdot 3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi(2)}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi(2)}{3}\right)\right]$$
$$= \cos(\frac{9\pi}{2\cdot 3})+i\sin(\frac{9\pi}{2\cdot 3}) = -i$$

Die drei Winkel sind in Grad 30°, 150° und 270, je 120° auseinander. ◁

Die drei Wurzeln sind auf dem Einheitskreis der Gauss'sche Ebene in der Abbildung dargestellt.
Im Allgemeinen sind die n Wurzeln einer komplexen Zahl in regelmässigen Bögen der Länge $\frac{2\pi}{n}$ auseinander, respektive der Winkel $360°/n$.
Eine relle Zahl a hat n mehrfache Wurzeln, denn $(a^{1/n})^n = a$. Wir multiplizieren die drei gefundenen Wurzeln. Das erste Produkte $z_1 z_2$ ist



$$\frac{1}{4}(i+\sqrt{3})(i-\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(i^2-3) = \frac{1}{4}(-1-3) = -1$$

Nun $z_1 z_2 z_3 = -1(-i) = i$. Das stimmt mit der Aufgabenstellung überein.
Nun sind wir neugierig und fragen uns, ob $z_1^3 = i$ ist. Wir rechnen

$$\left[\frac{1}{2}\right]^3 (i-\sqrt{3})^3 = \frac{1}{8}(i^3+3i^2\sqrt{3}+3i\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^3)$$
$$= \frac{1}{8}(-i-\cancel{3\sqrt{3}}+9i+\cancel{3\sqrt{3}})$$
$$= 8i/8 = i$$

Und $z_3^3 = (-i)^3 = -(i^2 i) = -(-i) = i$. Also?

26.6 Komplexe Funktionen

Definition 57. Eine *komplexe Funktion* ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Punktmengen der komplexen Ebene sind.

26.6.1 Lineare Funktion

Definition 58. Eine *lineare Funktion* besitzt die Form

$$w(z) = a\cdot z+b = |a|\cdot\exp(i\alpha)+b$$

mit $a \neq 0$, b und $z \in \mathbb{C}$.

Definition 59. Ein *Fixpunkt* der ganzen linearen Funktion erfüllt die Gleichung

$$z = a\cdot z+b.$$

26.1 Übung Es ist $f(z) = a \cdot z + b$ mit $a \neq 1$. Der Fixpunkt ist z aus der Gleichung $z = az + b$. Damit folgt für $z = \frac{b}{1-a}$. Nehmen wir $f(z) = (2+i)z + (2-3i)$, dann ist $z_0 = \frac{2-3i}{1-2-i} = \frac{2-3i}{-1-i}$ oder umgeformt (erweitert) $z_0 = \frac{(2-3i)(-1+i)}{2} = \frac{-2+2i+3i+3}{2} = \frac{1}{2}(1+5i)$. ◁

Satz 26.2. Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, lässt sich jede lineare Funktion

$$w(z) = a \cdot z + b = |a| \cdot \exp(i\alpha) + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

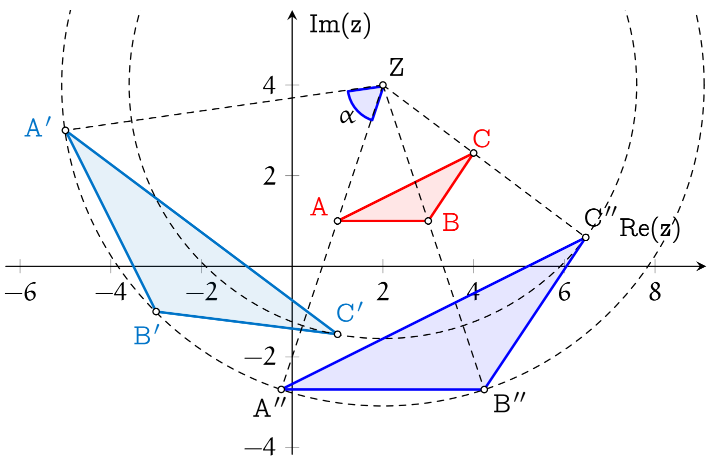
von drei Abbildungen schreiben:

- $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$ eine *Drehung* um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- $f_2(z) = |a|z$ eine *Streckung* um den Skalierungsfaktor $|a| > 0$;
- $f_3(z) = z + b$ eine *Verschiebung* um den Vektor b.

Anmerkung 26.3. Drehung und Streckung sind vertauschbar, also $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 = f_2 \circ f_1 \circ f_3$, die Verschiebung allerdings nicht.

26.4 Übung Wir betrachten drei komplexe Zahlen, die in der Gauss'schen Eben ein Dreieck bilden, und die lineare Funktion $f(z) = (1-2i)z + (-8+4i)$. Die Punkte sind: $z_A = (1+i)$, $z_B = (3+i)$ und $z_C = (4+2.5i)$. Damit rechnen wir $f(z_A) = (1+i)(1-2i) + (8-4i) = 1-2i+i+2-8+4i = -5+3i$, $f(z_B) = (3+i)(1-2i)-8+4i = 3-6i+i+2-8+4i = -3-i$ und $f(z_C) = (4+2.5i)(1-2i) - 8 + 4i = 4 - 8i + 2.5i + 5 - 8 + 4i = 1 - 1.5i$.
In der folgenden Abbildung sind die Bildpunkte abgebildet. Der zur Drehung gehörige Winkel ist $\alpha = \arctan(-2) = 63.43°$. Die Streckung erfolgt mit einem Faktor $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ und das Zentrum der Drehsteckung ist $Z = \frac{-8+4i}{1-1+2i} = \frac{(-8+4i)i}{-2i} = 2+4i$.

26.5 Anmerkung. Eine als lineare Funktion bekannte Gleichung $f(z) = az + b$ führt streng genommen nicht zu einer linearen Abbildung, falls $b \neq 0$ ist. Gibt es eine Translation, dann ist die Abbildung *affin* (oder auch *linear-affin*). Eine lineare Abbildung ist von der Form $f(z) = az$.



◁

26.6.2 Quadratische Funktion

Definition 60. Eine komplexe Funktion f heisst *quadratisch*, falls f für feste Konstanten a, b, $c \in \mathbb{C}$ und a, $b \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

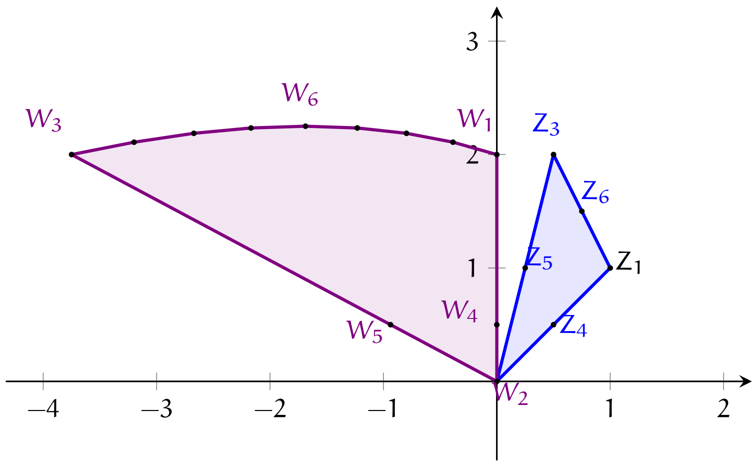
$$f(z) = az^2 + bz + c$$

für $z \in \mathbb{C}$.

Mit quadratischem Ergänzen kann man die Funktion umschreiben als:

$$f(z) = a([z + \frac{b}{2a}]^2 - \frac{b^2}{4a^2}) + c$$

26.6 Übung Wir betrachten die quadratische Funktion $f(z) = z^2$ als Abbildung. Wir wählen drei Punkte (oder abhängige komplexe Variablen): $z_1 = (1 + i)$, $z_2 = 0$ und $z_3 = 0.5 + 2i$. Die Bildpunkte sind $w_1 = 4i$, $w_2 = 0$ und $w_3 = -3.75 + 2i$. Wir möchten wissen, wie sich Geraden verhalten. Deshalb nehme wir noch zwei Punkte hinzu, die Mittelpunkte von z_1 und z_2, d.h. $z_4 = 0.5(z_1 + z_2) = 0.5 + 0.5i$ und analog $z_5 = 0.25 + i$ sowie $z_6 = 0.75 + 1.5i$. Hier sind die Bildpunkte $w_4 = 0.5i$ und $w_5 = -15/16 + 0.5i$ und $w_6 = -1.6875 + 2.25i$.



Wie man der Abbildung entnehmen kann, bleiben Punkte auf Strahlen aus dem Ursprung auf Strahlen, andere Geraden werden gekrümmt. ◁

26.6.3 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion haben wir schon kennengelernt, nämlich als Darstellungsform. Es gilt, wie bekannt

Formel 26.7.

$$e^{a+bi} = e^{a}(\cos(b) - i\sin(b)) = e^{a}\operatorname{cis}(b)$$

Nun wissen wir, dass die trigonometrische Funktionen mit 2π periodisch sind. Damit folgt die im reellen nicht vorhandene Eigenschaft, wonach gilt:

$$e^{z} = e^{z+k\cdot 2\pi i} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

26.6.4 Logarithmusfunktion**

Die Ausgangsfrage ist, wie sieht die komplexe Zahl $w = u + vi$ aus, wenn $z = a + bi$ ist und $e^w = z$ gilt? Die Zahl w kann als Logarithmus verstanden werden. Nun gilt für Modul (Betrag) und Argument (Winkel) folgendes:

$$|e^w| = |e^u| = |z| \quad \rightarrow \quad u = \ln(|z|)$$

und für den Winkel

$$\arg(e^w) = \arg(e^u \cdot e^{vi}) = v = \arg(z)$$

Nun zusammen:

Formel 26.8.

$$\mathrm{Log}(z) = w = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

Anmerkung 26.9. Man beachte, dass der sogenannten Log() eine neue Funktion ist und nicht mit dem reellen Logarithmus übereinstimmt. Das gilt auch für gewisse Rechenregeln. Die Formel zeigt den *Hauptwert*, allgemein gilt anstatt $\arg(z)$ dann $\arg(z + k \cdot 2\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

26.6.5 Grenzwertfunktion

Grenzwerte komplexer Folgen oder Funktionen sind analog zum Reellen. Zudem gilt der Satz

Satz 26.10. Eine Folge (z_n) mit $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $(\mathrm{Re}(z_n))$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegen $\mathrm{Re}(z)$ und die Folge $(\mathrm{Im}(z_n))$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegen $\mathrm{Im}(z)$ konvergieren.

26.7 Fundamentalsatz der Algebra, Nullstellen**

Wir kehren zurück zu den Anfängen, wo wir für quadratische Gleichungen keine reellen Nullstellen finden konnten, z.B. für

$$x^2 = -5$$

Komplexe Zahlen sind die Erweiterung der Zahlen mit solchen, die Lösungen derartiger Gleichungen sind. Erinnere: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ beinhalten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, formell $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

26.7.1 Quadratische Gleichungen

Wir betrachten eine quadratische Gleichung wie $x^2 - 2x + 5 = 0$. Die Diskriminante ist $b^2 - 4ac = -16$, die darüber entscheidet, ob reelle Lösungen vorliegen. Sie ist negativ, d.h. es gibt keine reellen Lösungen. Wir wenden nun die Mitternachtsformel für die Lösungen an und erhalten:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Wir erhalten zwei Lösungen.

26.1 Übung Wir lösen $x^2 + 2x + 3 = 0$ mit der pq-Formel. Also

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{2}{2})^2 - 3} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

◁

Wir können nun die Aussage der Diskriminante für komplexe Zahlen erweitern.

Satz 26.2. Diskriminantensatz Die *Diskriminante* D einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten $ax^2 + bx + c = 0$ ist $D = b^2 - 4ac$. Es gilt:

- Für $D > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen,
- für $D = 0$ gibt es eine (zweifache) reelle Lösung,
- für $D < 0$ gibt es ein Paar konjugiert komplexer Lösungen.

26.3 Übung ** Wir untersuchen jetzt eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten. Beispielsweise

$$z^2 - z + (\alpha + i\beta) = 0$$

Mit der pq-Formel folgt

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (\alpha + i\beta)} = \frac{1}{2} \pm \left[(\frac{1}{4} - \alpha) - i\beta)\right]^{1/2}$$

Wir brauchen also die Wurzel einer komplexen Zahl. Wir vereinfache den Wurzelausdruck mit

$$\left[(\frac{1}{4} - \alpha) - i\beta)\right]^{1/2} = i \cdot \left[(\frac{3}{4}) + i)\right]^{1/2} = i \cdot \sqrt{q}$$

Um weiter rechnen zu können nehmen wir an $\alpha = 1$ und $\beta = 1$. Mit dem Satz von Moivre (Satz 26.1 auf Seite 26-6), wenn man die komplexe Zahl mit Polarkoordinaten schreibt, kann man dies bewerkstelligen. Die Polardarstellung von $3/4 + 1i$ ist $r = \sqrt{9/16 + 1} = \sqrt{25/16} = 5/4$ und $\varphi = \arctan(4/3)$. Damit folgt $q = r\exp(i\varphi)$ und die Wurzel $q^{1/2} = \sqrt{5}/2\exp(i\varphi/2) = \sqrt{5}/2(\cos(\varphi/2) + i\sin(\varphi/2))$. Aufgrund der schön gewählten Zahlen kann man schreiben $\cos(\varphi/2) = \sqrt{4/5}$ und $\sin(\varphi/2) = \sqrt{1/5}$ und somit:

$$q^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\sqrt{\frac{4}{5}} + i\sqrt{\frac{1}{5}}\right] = \frac{1}{2}[2 + i]$$

Damit

$$i \cdot q^{1/2} = i \cdot \frac{1}{2}[2 + i] = \frac{1}{2}[-1 + 2i]$$

und damit die zwei Wurzeln

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}[-1 + 2i]$$

oder

$$z_{1,2} = \{(1 - i), (i)\}.$$

Man beachte: bei quadratischen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten müssen die Konjugierten keine Lösungen sein.
Wir überprüfen die Lösungen, indem wir $z_1 = 1 - i$ einsetzen, also

$$(1 - i)^2 - 1 + i + 1 + i = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - 2i - 1 - 1 + i + 1 + i = 0$$

und für $z_2 = i$

$$i^2 - i + 1 + i = -1 - i + 1 + i = 0$$

Die Lösungen stimmen. ◁

26.7.2 Polynomgleichungen

Was bedeutet die komplexe Lösung für Gleichung höheren Grades? Wir betrachten $z^3+1=0$. Wir erwarten höchstens drei Lösungen. Im Rahmen dieser Publikation gehen wir fast nie über den Grad 3 hinaus und versuchen meist, eine Lösung zu erraten, denn die Formeln für Gleichungen 3. Grades sind sehr kompliziert. Also erraten wir $z_1 = -1$. Damit und dem Faktorisierungssatz folgt $(z^3) \div (z+1) = Q(z)$. Durch Rechnen oder Formelsammlung ergibt der Quotient $Q(z) = z^2 - z + 1$. Mit der pq-Formel folgt

$$z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Die Gleichung faktorisiert sieht dann wie folgt aus

$$z^3 - 1 = \frac{1}{4}(z+1)\left[z - (1 + i\sqrt{3})\right]\left[z - (1 - i\sqrt{3})\right]$$

Nachrechnen macht schlau. Das wichtige Resultat hier ist: Wäre z eine reelle Zahl, dann gäbe es *eine* Lösung, nämlich $z = -1$. Durch die Annahme, z sei eine komplexe Zahl, tauchen noch zwei weitere Lösungen auf!

Satz 26.4. Konjugierte Wurzel Hat eine algebraische Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ mit *reellen* Koeffizienten a_i eine komplexe Lösung der Form $\alpha + i\beta$, dann ist ihre Konjugierte $\alpha - i\beta$ notwendigerweise auch eine Lösung.

Die Begründung ist einfach: Ist $\alpha + i\beta$ eine Lösung, so gibt es einen Faktor $(x - \alpha - i\beta)$ in der Faktorisierung. Da aber die Koeffizienten reell sein sollen, muss sich unter den restlichen $n-1$ Faktoren einer der Form $(x - \alpha + i\beta)$ befinden, denn nur dann verschwinden die Imaginärteile gemäss

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$$

26.5 Übung Wir bestimmen die Lösungen von $2y^4 = 9y^2 + 5$. Es ist eine sogenannt biquadratische Gleichung. Mit etwas raten finden wir:

$$\begin{aligned} 2y^4 &= 9y^2 + 5 \\ 2y^4 - 9y^2 - 5 &= 0 \\ (2y^2 + 1)(y^2 - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgen die zwei Gleichungen aufgrund des Nullproduktsatzes

$$2y^2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad y^2 = 5$$

Wir lösen zuerst die zweite Gleichung und erhalten $y_{1,2} = \pm\sqrt{5}$. Die erste lautet auch $y^2 = -1/2 = -2/4$. Daraus folgt $y_{3,4} = \pm i\sqrt{2}/2$. $\triangleleft$

Was bei den Polynomgleichungen besonders interessiert ist die Faktorisierung. Was ändert sich, wenn man nun auch komplexe Lösungen zulässt für Polynome mit reellen Koeffizienten? Kann es Polynomgleichungen geben, die gar keine Nullstelle besitzen? Die Antwort ist “nein”, denn es gilt der Fundamentalsatz:

Satz 26.6. Fundamentalsatz der Algebra Ist $P(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \geqslant 1$ mit *komplexen* Koeffizienten, dann hat $P(x)$ mindestens eine komplexe Nullstelle.

Anmerkung 26.7. Im Gegensatz zu reellen Koeffizienten ist mit komplexen Koeffizienten die Konjugierte nicht zwingend auch eine Lösung.

Aus dem Fundamentalsatz folgt die Faktorisierung. Wenn für eine Polynom vom Grad $n > 1$ $P(x)$ eine Lösung existieren muss, dann folgt $P(x) = (x - x_1)Q(x)$. Nun ist $Q(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$. Somit muss es eine Lösung haben, sagen wir x_2. Damit folgt $Q(x) = (x - x_2)R(x)$ etc. bis $n = 1$. Es ist also $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots$. Darunter können auch Mehrfachlösungen sein, höchstens eine n-fache Nullstelle. Deshalb die Aussage von "mindestens".

Satz 26.8. Komplexe Faktorisierung Eine Polynom $P(x)$ mit komplexen Koeffizienten vom Grad $n \geqslant 1$ hat genau n komplexe Nullstellen.

Anmerkung 26.9. Wir erinnern die Faktorisierung von Polynomen mit reellen Koeffizienten. Ein solches Polynom $P(x)$ lässt sich durch Produkte von Linearfaktoren, d.h. $(x - x_0)$, und irreduzible quadratische Ausdrücke darstellen. Beispiel $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 - x + 5)$.

Aufgaben

2.10 Rechne aus

(a) $(1-2i)-(3+4i)$ (b) $(1-2i)(3+4i)$ (c) $\frac{1-2i}{3-4i}$ (d) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$ (e) $\sqrt{(-3)(-12)}$

(f) $(x-[1+2i])(x-[1-2i])$

10 (a) $(1-2i)-(3+4i)$, je Realteile und Imaginärteile addieren: $-2-6i$.

(b) Verteilungsgesetz anwenden: $(1-2i)(3+4i) = 1\cdot 3+4i-6i-8i^2$ und $i^2=-1$, also $3+4i-6i+8 = 11-2i$.

(c) Mit Konjugierten erweitern $\frac{1-2i}{3-4i} = \frac{(1-2i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{3+4i-6i+8)}{25} = \frac{11-2i)}{25}$

(d) $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = i\sqrt{3}i\sqrt{12} = i^2\sqrt{3\cdot 12} = -6$

(e) $\sqrt{(-3)(-12)} = \sqrt{(3)(12)} = \sqrt{36} = 6$.

(f) $(x-[1+2i])(x-[1-2i]) = ([x-1]+2i)([x-1]-2i) = (x-1)^2-4i^2 = (x-1)^2+4$ und $x^2-2x+1+4 = x^2-2x+5$.

2.11 Vereinfache den Term $\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$ mit den Winkelfunktionen.

11

Wir schreiben in Polarform $\frac{1}{2i}\Big(\operatorname{cis}(\phi)-\operatorname{cis}(-\phi)\Big)$ und dann $\frac{1}{2i}\Big([\cos(\phi)-i\sin(\phi)]-[\cos(-\phi)-i\sin(-\phi)]\Big)$. Wir erinnern: Der Kosinus ist symmetrisch bezüglich $x=0$, d.h. $\cos(x)=\cos(-x)$ und der Sinus ist antisymmetrisch, d.h. $\sin(x)=-\sin(-x)$. Damit folgt $\frac{1}{2i}\Big(\cancel{\cos(\phi)}-i\sin(\phi)-\cancel{\cos(\phi)}-i\sin(\phi)]\Big) = \frac{1}{2i}(-2i\sin(\phi)) = -\sin(\phi)$.

2.12 * Zwei Teilaufgaben

(a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 8i$ in Normalform und zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in der komplexen Zahlenebene. [37.5‰]

(b) Die Figur, welche die Punkte in Aufgabe a) bilden, wird nun um 60° um den Nullpunkt gedreht. Bestimmen Sie die Bildpunkte in Normalform. Geben Sie die Gleichung an, die diese Bildpunkte als Lösungen besitzt. [37.5‰]

12 (a) Aus $z^3 = 8i$ folgt $z = 2\sqrt[3]{i}$ und $i = 0+i\sin(\pi/2)$. Also $\sqrt[3]{i} = \cos(\frac{\pi/2+k\cdot 2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi/2+k\cdot 2\pi}{3})$ mit $k=\{0,1,2\}$. Damit

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{90°}{3}\right)+i\sin\left(\frac{90°}{3}\right)\right] = 2(\cos(30°)+i\sin(30°)) = \boxed{\sqrt{3}+i}$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{90+360}{3}\right)+i\sin\left(\frac{90+360}{3}\right)\right] = 2(\cos(150°)+i\sin(150°)) = \boxed{-\sqrt{3}+i}$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{90+720}{3}\right)+i\sin\left(\frac{90+720}{3}\right)\right] = 2(\cos(270°)+i\sin(270°) = \boxed{-2i}$$

(b) Addiere 60° zum Argument:

$$z_1 = 2\cos(90°)+i2\sin(90°) = \boxed{2i}$$

$$z_2 = 2\cos(210°)+i2\sin(210°) = \boxed{-\sqrt{3}-i}$$

$$z_3 = 2\cos(150°)+i2\sin(150°) = \boxed{-\sqrt{3}+i}$$

Zum ursprünglichen i muss man das 3-fache von 60 addieren, also 180. Damit wäre die Gleichung $z^3 = -8i$. Man könnte auch die drei Terme multiplizieren unter Anwendung der binomischen Formel, also $-(i+\sqrt{3})(i-\sqrt{3})(2i) = -(i^2-3)2i = -(-1-3)2i = -8i$.

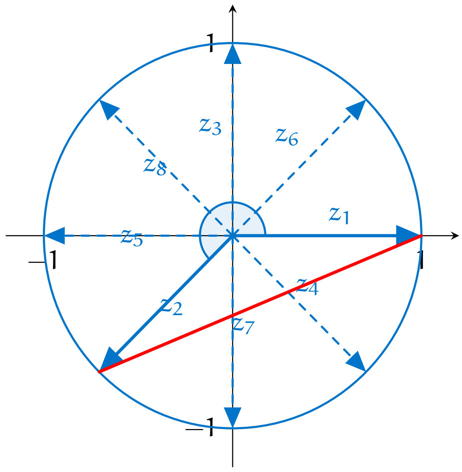
2.13 * Betrachten Sie die Folge $z_{n+1} = z_n \cdot \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big)$ mit $z_1 = 1$ [100‰]

(a) Berechnen Sie z_2 , z_3 und z_4 in Normal- und Polarform und zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in der Gaussschen Zahlenebene.

(b) Welches ist die kleinste natürliche Zahl n, für die $z_1 = z_n$ gilt?

(c) Zeichnen Sie die Figur, welche durch den Streckenzug $z_1 z_2 z_3 \dots z_n$ entsteht. Berechnen Sie die Länge dieses Streckenzugs.

13 **(a)** Das Argument (Winkel) ist wegen der beiden Minuszeichen im 3. Quadranten. $\arctan(-\sqrt{2}/2 \div (-\sqrt{2}/2)) = \arctan(1) = 45°$ also $\arg z_2 = 180 + 45 = 225°$. Man kann den Klammerterm als $\cos(225) + i\sin(225)$ schreiben. Damit wird $z_2 = 1(\cos(225) + i\sin(225))$, und $z_3 = (\cos(450) + i\sin(450))^2 = \cos(90) + i\sin(90)$ und $z_4 = \cos(315) + i\sin(315)$. Oder $z_2 = \exp(i \cdot 225/360)$,



$z_3 = \exp(i \cdot 90/360)$ und $z_4 = \exp(315/360)$.

(b) Aus der Zeichnung sieht man, dass $z_9 = z_1$ wird. Wenn man 360/45 berechnet, so findet man 8. Das ist die Periode.

(c) Ein Streckenzug ist die Vereinigung der Verbindungsstrecken einer Folge von Punkten, also bestimmen n Punkte $n-1$ Strecken. Eine Strecke ist, wie in der Abbildung gezeigt, der Länge $d = \sqrt{(1+\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Also hat der Streckenzug bis zum Punkt z_n die Länge $(n-1) \cdot d = (n-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2.14 * Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = a + ib$ und $z_2 = c + id$ (mit reellen Zahlen a, b, c und d). [200‰]

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige z_1, z_2 die “Parallelogramm–Gleichung” gilt:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 6i$ in Polarform.

(c) Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Funktion $w = f(z) = (3+4i) \cdot z + 2–6i$ in kartesischer Form.

(d) Bestimmen Sie den Real– und den Imaginärteil von e^{3-2i}, je gerundet auf 3 wesentliche Stellen ($e = 2.718\dots$).

(e) Sei $p(z)$ ein in z quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass aus $p(z) = 0$ folgt, dass auch $p(\bar{z}) = 0$ ist.

14 **(a)** Wir setzen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$. Wir rechnen die linke und die rechte Seite separat aus und vergleichen. $L = [(a-c)^2 + (b-d)^2] + [(a+c)^2 + (b+d)^2] = [a^2 - \cancel{2ac} + c^2 + b^2 - \cancel{2bd} + b^2] + [a^2 + \cancel{2ac} + c^2 + b^2 + \cancel{2bd} + d^2] = 2[a^2 + b^2 + c^2 + d^2]$. Und nun rechts $R = 2[(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)]$. Es gilt $L = R$.

(b) Wir schreiben die rechte Seite $(0 + 6i)$ in Exponentialform. Modul (Länge) ist 6 und $\arg(6i) = \pi/2 = 90°$. Die Zahl liegt auf der imaginären Achse (y-Achse). Damit folgt $6i = 6\exp(i\pi/2 + ik \cdot 2\pi)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$. Damit ist die Gleichung $z^3 = 6\exp(i\pi/2 + ik \cdot 2\pi)$ und $z_1 = \sqrt[3]{6}\exp(i\pi/(2 \cdot 3))$, $z_2 = \sqrt[3]{6}\exp((i\pi + i4\pi)/(2 \cdot 3)) = \sqrt[3]{6}\exp(5i\pi/6)$, $z_3 = \sqrt[3]{6}\exp((i\pi + i8\pi)/(2 \cdot 3)) = \sqrt[3]{6}\exp(9i\pi/6)$.

(c) Fixpunkte bedeutet $f(z) = z$, also $z = (3+4i)z + 2 - 6i$. Wir setzen $z = a + bi$. Damit wird $a + bi = (3+4i)(a+bi) + 2 - 6i$, ausmultipliziert $a + bi = 3a + 3bi + 4ai - 4b + 2 - 6i$. Nun müssen Realteil und Imaginärteil übereinstimmten. Es gibt also zwei Gleichungen. $a = 3a - 4b + 2$ und $b = 3b + 4a - 6$. Schöner $4b = 4a + 2$ und $2b = 2a + 1$ sowie $4a = -2b + 6$. Eingesetzt

$4a = -[2a+1]+6$ oder $4a = -2a-1+6$ und $6a = 5$ sowie $a = 5/6$. Damit $2b = 10/6+1 = 16/6$ oder $b = 8/6 = 4/3$. Somit ist $z_f = 5/6 + i4/3$.

(d) Die Zahl lässt sich umformen zu $\exp(3-2i) = \exp(3)\exp(-2i) = \exp(3)[\cos(-2) + i\sin(-2)]$, wobei die 2 eine Länge in Bogenmass bedeutet. Mit dem Taschenrechner $e^3 = 20.09$, $\cos(-2) = \cos(360°/\text{pi}) = -0.4161$, $\sin(-2) = -0.9093$ ausgerechnet: $-8.26 - 18.3i$ oder $\mathrm{Re}(\exp(3-2i)) = -8.26$ und $\mathrm{Im}(\exp(3-2i)) = -18.3$.

(e) $p(z) = (z-a-ib)(z-a+ib)$: beim Ausmultiplizieren müssen die Koeffiziente reell sein. Schön gebündelt kann man schreiben $([z-a]-ib)([z-a]+ib) = [z-a]^2 - i^2b^2 = [z-a]^2+b^2 = z^2-2az+b^2$, alle Koeffizienten sind reell.

2.15 * [200‰]

(a) Zeichnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16i$ in einer Gaussschen Zahlenebene ein.

(b) Durch vier weitere Zahlen lassen sich die gefundenen Lösungen zu einem regelmässigen Achteck ergänzen. Gesucht ist eine möglichst einfache Gleichung mit genau diesen acht Lösungen.

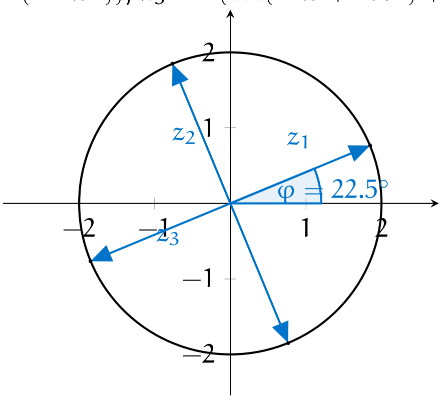
(c) Seien nun $a = 4+i$, $b = 1+4i$, $c = \frac{a+b}{2}$, $d = 5$ und $e = 5i$.
Zeichnen Sie die Zahlen a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 in einer (neuen) Gaussschen Zahlenebene ein.

(d) Fassen Sie dies fünf Zahlen a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 als Punkte in eine Kartesischen Koordinatensystem auf. Diese fünf Punkte liegen auf einer Parabel p. Gesucht ist die Gleichung $y(x) = \ldots$ dieser Parabel p.

(e) Betrachten Sie die Zahle $f = x + (-x+5)i$, mit $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Punkt, der zur Zahl f^2 gehört, für jedes reelle x auf dieser Parabel p liegt.

---

15 **(a)** Wir suchen 4 Wurzeln. $16i = 0 + 16i$ hat das Modul (Länge) 16 und das Argument $\arg(16i)$ aus $\sin(\varphi) = 16/16 = 1$ ist 90°. Somit $z_1 = 16^{1/4}(\cos(\frac{90}{4}) + i\sin(22.5°))$, mit $16^{1/4} = 2$ $z_2 = 2(\cos(22.5+90°) + i\sin(112.5°))$, $z_3 = 2(\cos(22.5+180°) + i\sin(202.5°))$ und $z_4 = 2(\cos(22.5+$



$270°) + i\sin(292.5°))$.

(b) Die Lösung muss 8 Wurzel haben und je die Länge 2. Somit folgt also $r = 16^2 = 196$. Der Winkel $\varphi' = 2\varphi = 2\cdot 90 = 180$. Somit liegt der gesuchte Punkt auf der negativen Zahlenachse. Somit folgt $z^8 = -196$.

(c) $a^2 = (4+i)^2 = 16+8i-1 = 15+8i$, $b^2 = (1+4i)^2 = 1+8i-16$, $c = 1/4(5+5i)^2 = 1/4(25+50i-25) = 1/4(-50i) = 12.5i$, $d^2 = 25$, $e = (5i)^2 = -25$. Als Wertetabelle

y	8	8	12.5	0	0
x	15	-15	0	25	-25

Nach x geordnet

y	0	8	12.5	8	0
x	-25	-15	0	15	25

Die Parabel ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, hat also die Form $y = ax^2 + b$. Es folgt sofort für $x = 0$ $12.5 = b$ und aus $x = 25$: $0 = a625 + 12.5$ und $a = -12.5/625 = -1/50$. Somit p: $y(x) = -1/50x^2 + 12.5$.

(d) Als erstes berechnen wir f^2: $(x+(-x+5)i)^2 = x^2+2x(-x+5)i-(-x+5)^2 = x^2-(x^2-10x+25)+(-2x^2+10x)i = [10x-25]+[-2x^2+10x]$. Es stellt sich die Frage, ob $y([10x-25]) = [-2x^2+10x]$.

Wir setzen in die gefundene Formel für p ein: $y = -1/50(10x - 25)^2 + 12.5 = -1/50(100x^2 - 500x + 625) + 12.5 = -2x^2 - 10x - 12.5 + 12.5 = -2x^2 - 10x$. Es stimmt.

2.16 * Gegeben ist die Gleichung $z^6 = 64i$.

(a) Berechnen Sie – ohne Verwendung des TR – eine erste Lösung dieser Gleichung.

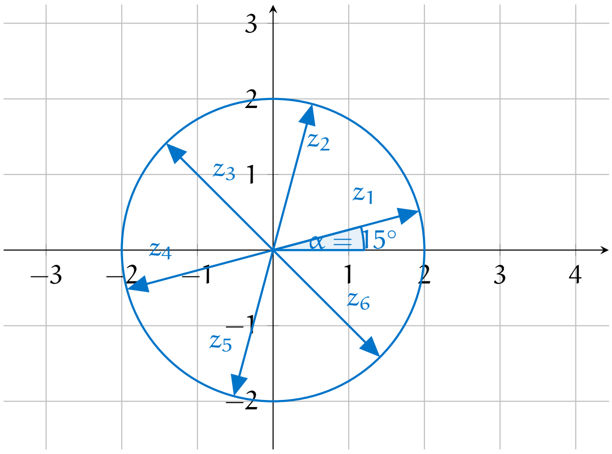
(b) Zeichnen Sie alle Lösungen dieser Gleichung in einer Gauss'schen Zahlenebene ein.

(c) Berechnen Sie die Summe aller Lösungen.

(d) Berechnen Sie das Produkt aller Lösungen.

(e) Betrachten Sie weiter die Menge M aller komplexen Zahlen z , für die gilt: $2 \leqslant |z| \leqslant 4$ und $|z - (3 + 4i)| \leqslant 5$. Schraffieren Sie diese Menge M in einer Gauss'schen Zahlenebene.

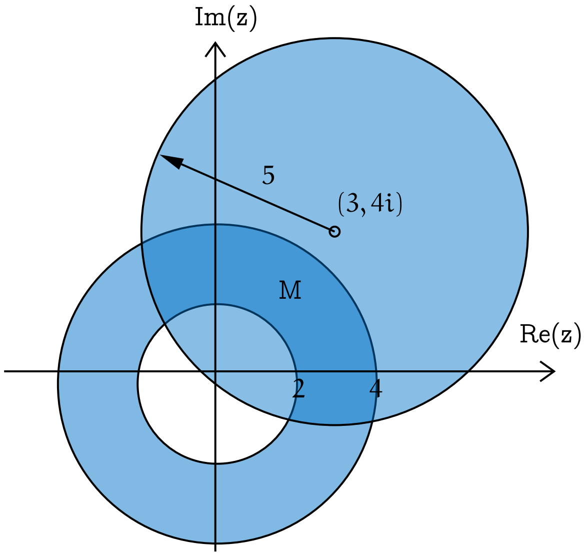
16 **(a)** $64i$ hat nur Imaginärteil, also $\varphi = 90$, und 6.Wurzel führt zu $\arg(z_1) = 90/6 = 15° = \pi/12$ und $|z_1| = 64^{1/6} = 2$, also $z_1 = 2\exp(i15°) = 2\,\mathrm{cis}(\pi/12)$.



(b)

(c) Die Summe von $z_1 + z_2 + \ldots + z_6 = 0$, denn je zwei Vektoren heben sich auf.

(d) Das Produkt ist das Produkt der Module mit der Addition der Argumente. Also $r = 2 \cdot 2 \cdot \ldots = 2^6$ und $\phi = 6 \cdot 15 + 60 + 120 + 180 + 240 + 300 = 990°$ und damit $\varphi = 270°$ Also $p = 2^6 \exp(i \cdot 3\pi/4)$.



(e)

Die schraffierte Fläche liegt zwischen den zwei Ringen mit Radius 2 und 4, die auch innerhalb des Kreises mit Radius 5 und Mittelpunkt $(3, 4i)$ liegt.

2.17 * Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $u = 3 + 4i$ und $v = 216 \cdot \mathrm{cis}(30°)$ [200‰].

(a) Berechnen Sie u statt in Normal- in Polarform und v statt in Polar- in Normalform.

(b) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = v$ in Polarform an.

(c) Berechnen Sie die unendliche Summe $1 + (\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i) + (\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i)^2 + (\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i)^3 + \ldots$ in Normalform. Tipp: Für$|z| < 1$ gilt: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$.

(d) Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene, für $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, den Graphen der vom Polarwinkelwinkel φ abhängigen Funktion $z(\varphi) = 2^{\varphi/2\pi} \cdot \text{cis}(\varphi)$.

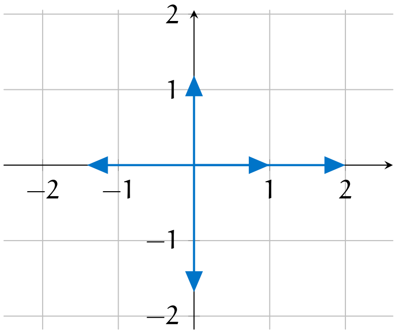
(e) Binomischer Lehrsatz: Verwenden Sie das Pascal-Dreieck, um die 4. Potenz von $z = \overline{1+2i}$ ohne Taschenrechnerhilfe zu berechnen.

17 **(a)** Aus $u = 3 + 4i$ folgt $u = 5 \cdot \text{cis}(\arctan(4/3)) = 5 \cdot \text{cis}(53.13°)5 \cdot \text{cis}(0.9273)$. Anderseits $v = 216 \cdot \text{cis}(30°)$ und daraus $v = 216(\cos(30°) + i\sin(30°) = 216(0.866 + i0.5) = 216(\sqrt{3} + i)/2 = 108(\sqrt{3} + i)$

(b) $z^3 = 3 + 4i$ Daraus die drei Wurzeln $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{5}\exp(i(53.13 + k360)/3$ für $k = 0, 1, 2$ oder $z_1 = \sqrt[3]{5}\,\text{cis}(17.71°)$, $z_2 = \sqrt[3]{5}\,\text{cis}(137.71°)$ und $z_2 = \sqrt[3]{5}\,\text{cis}(257.71°)$.

(c) $|z| = |2/3 + 1/4i| = \sqrt{73/144} < 1$. Mit dem Tipp: $s = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}i} = \frac{12}{4-3i}$. Mit Konjugierter erweitern $s = 12\frac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{12}{25}(4 + 3i)$

(d) Zur Einfachheit stellen wir uns die Gauss'sche Ebene als xy-Ebene vor und die Kurve in Parameterform gegeben $r(t) = 2^{\varphi/2\pi}(\cos(\varphi), \sin(\varphi)$. Wir berechnen $2^{\varphi/2\pi}$ für $0, 90, 180, 270 und 360°$ zu $1, 1.189, 1.4142, 1.682, 2$ und damit $1(1, 0)$, $1.189(0, 1)$, $1.4142(-1, 0)$, $1.682(0, -1)$ und $2(1, 0)$



(e) Wir schreiben $z = 1 - 2i$. Das Pascal'sche Dreieck liefert, ausgehend von $1 - 2 - 1$, $1 - 3 - 3 - 1$ und $1 - 4 - 6 - 4 - 1$ folgende Summe:

$$\begin{aligned} s = (1 - 2i)^4 &= 1^4 - 4 \cdot 1^3(-2i) + 6 \cdot 1^2 \cdot (-2i)^2 - 4 \cdot (-2i)^3 + (-2i)^4 \\ &= 1 - 4(-2)i + 6(4i^2) - 4(-8)i^3 + 16i^4 \\ &= 1 + 8i - 24 - 32i + 16 \\ &= -7 + 24i \end{aligned}$$

(Eine kleine Kontrolle ist $|1 - 2i| = \sqrt{5}$, damit $\sqrt{5}^4 = 25$ und $|-7 + 24i| = \sqrt{625} = 25$.)

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

– eine lineare Abbildung erkennen und deren Kern und Bildraum bestimmen
– den Matrixbegriff zur Beschreibung der linearen Abbildung relativ zu einer Basis anwenden
– die Summe von zwei linearen Abbildungen, das Produkt einer linearen Abbildung mit einer reellen Zahl, die Zusammensetzung zweier linearer Abbildungen mit Hilfe von Operationen mit Matrizen beschreiben
– den Begriff der Determinante einer 2x2 Matrix definieren
– die Umkehrung einer bijektiven linearen Abbildung mit Hilfe der inversen Matrix beschreiben
– die Eigenwerte und Eigenvektoren einer linearen Abbildung definieren, geometrisch interpretieren und berechnen
– obige Begriffe anhand von Symmetrien, Rotationen, Ähnlichkeiten, Projektionen, Affinitäten und Zusammensetzungen im $\mathbb{R}^2$ illustrieren

Kapitel 27

Lineare Algebra*

Ein Grundgedanken der Mathematik ist die Vereinfachung und Verallgemeinerung. Ein Teil der lineare Algebra ist eine Erweiterung der Vektorrechnung und eine einfachere Darstellung von Gleichungssystemen.

27.1 Matrizenrechnung

27.1.1 Matrizen

Definition 61. Eine $m \times n$ *Matrix* (Plural Matrizen) ist eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

Definition 62. Der *Ordnung einer Matrix* ist die Angabe der Zeilen- und Spalten-Zahl, die in dieser Reihenfolge (!) mit einem "Multiplikations-Kreuz" $\times$ verbunden werden.

Anmerkung 27.1. Wir schreiben für die Element einer Matrix A a_{ij}, also Kleinbuchstaben mit zwei Indizes. Für die Matrizen verwendet man Grossbuchstaben A oder mit den Elemente auch $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ oder noch einfacher $[a_{ij}]$.

Wichtig 9. Matrizen sind Verallgemeinerungen von Vektoren. Diese haben wir mit einem Pfeil gekennzeichnet, d.h. $\vec{v}$. Hier lassen wir den Pfeil weg, denn aus dem Zusammenhang wird klar, dass Vektoren gemeint sind. ⊣

der zweite index j benennt die Spalten
von links nach rechts

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\Bigg\downarrow$$

der erste Index i benennt Reihen
von oben nach unten

Definition 63. Die *Transponierte* einer $m \times n$-Matrix $[a_{ij}]$ ist die $n \times m$-Matrix $[a_{ji}]$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ist transponiert} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Für die Transponierte wird das Hochzeichen T verwendet.

Definition 64. Eine *quadratische Matrix* besitzt gleich viele Spalten und Reihen, $n \times n$. Also $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.

Definition 65. Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix, die ausserhalb der Diagonale nur Elemente gleich Null besitzt.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist eine *Diagonalmatrix*. Diagonalmatrizen können nur quadratisch sein.

Definition 66. Eine *symmetrische Matrix* der Ordnung $n \times n$ besitzt die Eigenschaft $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant n$.

Beispiel: A ist symmetrisch (und deshalb auch quadratisch):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -7 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass die k-te Spalte mit der k-ten Reihe übereinstimmt.

Definition 67. Eine Matrix mit Ordnung $n \times 1$ heisst auch *Spaltenvektor*, und eine $1 \times n$-Matrix heisst *Zeilenvektor*. Wir wollen den Spaltenvektor einer Matrix $[a_{ij}]$ mit $a_{\bullet j}$ und den Zeilenvektor mit $a_{i\bullet}$ bezeichnen.

Anmerkung 27.2. Transponiert man einen Spaltenvektor, so resultiert ein Zeilenvektor et vice versa.

Definition 68. Die $n \times n$-*Einheitsmatrix* I_n ist eine Diagonalmatrix mit n 1.

Beispiel:

$$\underset{I_1}{(1)} \quad \underset{I_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{I_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{I_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Definition 69. Die $m \times n$-*Nullmatrix* ist eine Matrix mit allen Elementen gleich Null, $[0_{ij}]_{m \times n}$.

Definition 70. Gleichheit Zwei Matrizen $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ und $B = [b_{ij}]_{p \times r}$ sind gleich, wenn sie die gleiche Ordnung haben, $m = p$ und $n = r$, und die entsprechenden Elemente gleich sind, $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ und all $1 \leqslant j \leqslant n$.

Folgende Gleichheit gilt, wobei absichtlich die Werte durch verschiedene Ausdrücke dargestellt sind:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 9 \\ 25 & 117 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(1) & \sqrt[3]{-8} & e^{2\ln(3)} \\ 125^{2/3} & 3^2 \cdot 13 & \lg(0.001) \end{pmatrix}$$

27.1.2 Determinante

Wir kennen diesen Begriff bereits von den linearen Gleichungssystemen. Zur Erinnerung, die Determinante entscheidet über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen. Die Determinante existiert nur für quadratische Matrizen. Für die 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist sie definiert als $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ gemäss

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Für 3×3-Matrizen haben wir das Schema von Sarrus gezeigt:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Es existiert eine rekursive Formulierung mit Unterdeterminanten, wobei Plus- und Minuszeichen schachbrettartig alternieren:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

27.3 Übung Wir bestimmen die Determinante der Matrix $Q = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zu $(-7)4 - 1 \cdot 3 = -28 - 3 = -31$. ◁

Die Determinante einer 2×2-Matrix hat auch eine geometrische Bedeutung.

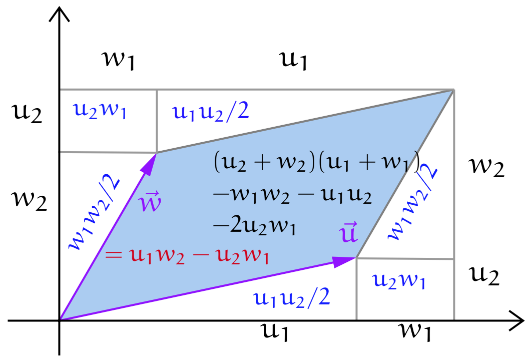
Satz 27.4. Ist A eine 2×2-Matrix, dann ist der Betrag der Determinante von A gleich dem Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Parallelogramms.

Die Matrix A habe die Spaltenvektoren u und w. Die Fläche des Parallelogramms ist $F = uw \cdot \sin(\varphi)$ oder quadriert $F^2 = u^2 w^2 \sin^2(\varphi)$. Bekanntlich ist $\sin^2() = 1 - \cos^2()$ und $\cos(\varphi) = \frac{\vec{u}\vec{w}}{uw}$. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
F^2 &= u^2 w^2 \Big(1 - \frac{(u_1 w_1 + u_2 w_2)^2}{u^2 w^2}\Big) \\
&= u^2 w^2 - (u_1 w_1 + u_2 w_2)^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (u_1^2 w_1^2 + 2u_1 u_2 w_1 w_2 + u_2^2 w_2^2) \\
&= \cancel{u_1^2 w_1^2} + u_1^2 w_2^2 + u_2^2 w_1^2 + \cancel{u_2^2 w_2^2} - \cancel{u_1^2 w_1^2} - 2u_1 u_2 w_1 w_2 - \cancel{u_2^2 w_2^2} \\
&= (u_1 w_2 - u_2 w_1)^2
\end{aligned}
$$

und damit $F = |u_1 w_2 - u_2 w_1| = |\det(A)|$.

Die Fläche kann man auch geometrisch motivieren. Man zeichnet die zwei Vektoren ein und bestimmt die Teilflächen um das Parallelogramm herum. Die grosse Rechtecksfläche ist $(u_2 + w_2)(u_1 + w_1) = u_2 u_1 + u_2 w_1 + w_2 u_1 + w_2 w_1$. Ds Resultat kennen wir aus der Vektormultiplikation.



27.1.3 Matrixoperationen

Wir beschreiben, wie immer, zuerst Addition und Subtraktion. Wie bei den Vektoren ist dies sehr einsichtig. Sodann gibt es wie bei den Vektoren verschieden Ausprägungen der Multiplikation.

Addition und Subtraktion

Definition 71. Matrix Addition Die Addition oder Subtraktion zweier Matrizen gleicher Ordnung bedeutet die Addition oder Subtraktion der entsprechenden Elemente. Formell

$$A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = \big(a_{ij} \pm b_{ij}\big)$$

27.5 Übung Wir addieren zwei 3×2-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & 3 + 4 \\ 4 + (-5) & (-1) + (-3) \\ 0 + 8 & (-7) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

◁

Hätten wir die Reihenfolge der Addition vertauscht, so wären wir zum selben Resultat gekommen. Diese *kommutative* Eigenschaft ist schnell einsichtig, denn, mit $A = [a_{ij}]$ und $B = [b_{ij}]$,

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A.$$

Die Matrixaddition ist kommutative, weil die Addition von reellen Zahlen es ist. Die gleiche Überlegung gilt für die Assoziativität. Für Matrizen A, B und C gleicher Ordnung gilt $(A + B) + C = A + (B + C)$. Die Reihenfolge bei der Addition mehrerer Matrizen ist beliebig.

Eigenschaften 27.6. Matrix-Addition Für $m \times n$-Matrizen A, B, C und der Nullmatrix $0_{m\times n}$

- **Kommutativ:** $A + B = B + A$
- **Assoziativ:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Identität:** $A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$
- **Inverse** $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$

Wie die Null 0 für die reellen Zahlen das additive neutrale Element darstellt, so muss die Matrix mit lauter Null-Elementen diese Eigenschaft für Matrizen besitzen. Denn die Addition ist ja komponentenweise auszuführen.
Die additive Inverse einer Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, ist die Matrix $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, mit der $A + B = 0_{m\times n}$ wird. Nach der Definition muss $a_{ij} + b_{ij} = 0$ für alle i und j sein. Nach b_{ij} aufgelöst bekommen wir $b_{ij} = -a_{ij}$. Deshalb ist $B = -A = \left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$.
Die Subtraktion ist definiert als die Addition der Inversen, und auch hier gilt deshalb für Matrizen A und B: $A - B = A + (-B)$ oder elementenweise

$$A - B = A + (-B) = \left[a_{ij}\right] + \left[-b_{ij}\right] = \left[a_{ij} + \left(-b_{ij}\right)\right] = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]$$

Multiplikation mit Skalar

Definition 72. Die Multiplikation einer Matrix $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ ist die Multiplikation aller Element a_{ij} mit dem Skalar, formell

$$kA = k\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$$

27.7 Übung Wir multiplizieren die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $k = 1/3$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1 & -3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

. ◁

Wie bei der Matrix-Addition erbt auch die Multiplikation ähnliche Eigenschaften vom Umgang mit reellen Zahlen.

Eigenschaften 27.8. Multiplikation mit Skalar Es ist $[a]$ eine $m \times n$-Matrix und k und r Skalare $\in \mathbb{R}$.

- **Identität:** $1A = A$
- **Additive Inverse:** $-A = (-1)A$
- **Distributiv I** $(k + r)A = kA + rA$
- **Distributiv II** $k(A + B) = kA + kB$
- **Null-Produkt:** $kA = 0_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad (k = 0 \quad \vee \quad A = 0_{m\times n})$

Wir wollen nicht alle Behauptungen beweisen. Dies ist mit den Definitionen möglich. Nur beispielhaft zeigen wir, dass $k(A+B) = kA + kB$ für einen Skalar k und $m \times n$-Matrizen A und B gilt. Zum einen

$$k(A+B) = k\left(\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]\right) = k\left[a_{ij} + b_{ij}\right] = \left[k\left(a_{ij} + b_{ij}\right)\right] = \left[ka_{ij} + kb_{ij}\right]$$

Für $kA + kB$ folgt zum anderen:

$$kA + kB = k\left[a_{ij}\right] + k\left[b_{ij}\right] = \left[ka_{ij}\right] + \left[kb_{ij}\right] = \left[ka_{ij} + kb_{ij}\right]$$

Wie erwartet, sind die beiden Ausdrücke gleich.

Matrixmultiplikation

Definition 73. Das Produkt einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{m\times n}$ und einer $n \times l$-Matrix $B = (b_{ij})_{n\times l}$ ist eine $m \times l$-Matrix $C = (c_{ij})_{m\times l}$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Wichtig 10. Zwei Matrizen können nur multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. ⊣

Anmerkung 27.9. Die Einträge c_{ij} werden berechnet, indem die Produktsummenformel auf Paare aus einem Zeilenvektor der ersten und einem Spaltenvektor der zweiten Matrix angewandt wird. Mit unserer Schreibweise für Zeilen- und Spaltenvektoren ergibt sich das Skalarprodukt

$$c_{ij} = a_{i\bullet} \bullet b_{\bullet j}$$

27.10 Übung Wir multiplizieren die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. A hat 2 Spalten und B 2 Zeilen, damit ist die Multiplikation durchführbar. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ Das erste Element c_{11} folgt aus $1(-1)+2\cdot 3 = 5$, $c_{1,2} = 1\cdot 2+2(-4) = -6$, $c_{21} = 3(-1)+4\cdot 3 = 9$ und $c_{22} = 3\cdot 2 + 4(-4) = -9$. Zusammen

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$$

◁

27.11 Übung Wir zeigen, dass $AB \neq BA$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ ◁

27.12 Übung ** Wir betrachten zwei Matrizen A und B. A hat die Ordnung 2×3 und B 3×4. Eine Multiplikation ist also definiert.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 8 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

Wir beginnen mit c_{11}, das das Skalarprodukt von $a_{1\bullet} = (2, 0, -1)$ und $b_{\bullet j} = (3, 4, 5)$ ist. $a_{1\bullet} \bullet b_{\bullet 1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (2)(3) + (0)(4) + (-1)(5) = 6 + 0 + (-5) = 1$. Das kann man wie folgt visualisieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 8 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

Für c_{23} gehen wir analog vor: wir bestimmen $a_{2\bullet} \cdot b_{\bullet 3}$ als $(-10, 3, 5) \cdot (2, -5, 2)$ und finden $c_{23} = (-10)(2) + (3)(-5) + (5)(-2) = -45$. Schematisch,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 8 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

Wie man unschwer erkennt, ist ein Haufen Rechnerei mit der Multiplikation verbunden. Das Resultat ist:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -4 \\ 7 & 14 & -45 & 47 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

Eigenschaften 27.13. (**Matrix-Multiplikation**) Es sind A, B und C $m \times n$-Matrizen und k ein reeller Skalar.

- **Nicht kommtativ:** $AB \neq BA$ im Allgemeinen
- **Assoziativ I:** $(AB)C = A(BC)$
- **Assoziativ II:** $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- **Identität:** $I_m A = A I_n = A$.
- **Distributiv:** $A(B \pm C) = AB \pm AC$ and $(A \pm B)C = AC \pm BC$

Wichtig 11. Weil $AB \neq BA$ gilt (nicht kommutativ) auch wenn A und B quadratisch sind, muss man bei Aequivalenzunformungen von Gleichungen link und rechts von der gleichen Seite multiplizieren, z.B. $Ax = b \Leftrightarrow LAx = Lb$ oder $AxR = bR$. $\dashv$

Anmerkung 27.14. Die Identitätsmatrix ist unterschiedlich, je nach dem ob man von links multipliziert oder von rechts, wenn die Matrix A nicht quadratisch ist.
Wir verifizieren die Multiplikation mit den Einheitsmatrizen an der 2×3-Matrix von oben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -10 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

27.1.4 Matrix mal Vektor

Mit der Matrixmultiplikation ist das Produkt einer Matrix mit einem Vektor auch schon definiert, weil ein Vektor eine Matrix mit nur einer Spalte ist.

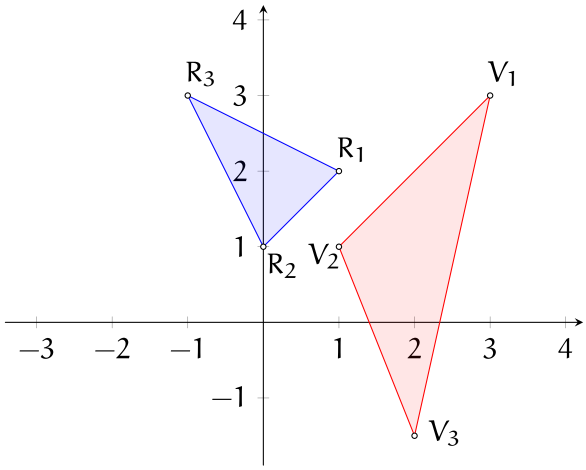
27.15 Übung Wir nehmen drei Vektoren (oder Punkte) $r_1 = (1, 1, 2)$, $r_2 = (0, 1, 1)$ und $r_3 = (-1, 1/2, 3)$ und multiplizieren diese mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Es ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

Wir zeichnen die Projektion dieser sechs Punkte auf die $x - z$-Ebene, um einen Eindruck zu bekommen, was die Multiplikation der drei Punkte bewirkt. Wir sehen, dass die Punkte wieder eine Dreieck bilden. Das ist unser Ansporn, die Sache genauer zu untersuchen.



Wir halten aber fest, dass die Matrix-Multiplikation Punkte auf Punkte abbildet, also eine Abbildung oder wie man in der Geometrie auch sagt, eine *Transformation*, darstellt.

Wir betrachten eine Gleichung mit einer Matrix, z.B. $A\vec{x} = \vec{b}$. Ausgeschrieben lautet die Gleichung in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Also ist $Ax = b$ ein Gleichungssystem und die Matrix A ist die bekannte *Koeffizientenmatrix*. An diesen zwei Beispielen erkannt man, dass die Matrixmultiplikation mit einem Vektor sowohl eine *Abbildung* darstellen kann als auch ein *Gleichungssystem*.

27.1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Im folgenden beschränken wir uns auf $\mathbb{R}^2$, wobei höhere Dimensionen ganz analog sind.

Definition 74. Sei A eine $n \times n$ Matrix und sei λ ein Skalar. Wenn es einen vom Nullvektor verschiedenen Spaltenvektor v gibt, sodass

$$Av = \lambda v,$$

dann heisst λ ein *Eigenwert* der Matrix A. So ein Vektor v heisst ein zum Eigenwert λ gehöriger *Eigenvektor*.

Anmerkung 27.16. Der Eigenvektor v wird durch die zugehörige Matrixmultiplikation nur gestreckt oder gestaucht, seine Richtung bleibt aber bestehen.

Satz 27.17. Ein Skalar λ ist ein Eigenwert der Matrix A genau dann, wenn

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

27.18 Übung Wir nehme die Matrix $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ und bilden $A-\lambda I=\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ -3 & -2-\lambda\end{pmatrix}$ und daraus die Determinante $\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)(-2-\lambda)-1(-3)=0$ und $-4+\lambda^2+3=0$ oder $\lambda=\pm1$.

Die Eigenvektoren ergeben sich aus der Gleichung $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\nu=\lambda\nu$ oder spezifisch $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\nu_1=1\nu_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ und

$$2x_1+y_1=x_1 \quad \text{und} \quad -3x_1-2y_1=y_1$$

Die zwei Gleichungen sind äquivalent, nämlich $x_1+y_1=0$ oder $x_1=-y_1$, so dass man eine Gleichung für zwei Unbekannte erhält. Die Lösung ist mit einem Parameter $a\neq0$ deshalb:

$$\nu_1=\begin{pmatrix}a\\ -a\end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Eigenwert $\lambda=-1$ folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}3x_1+y_1&=0\\ -3x_1-y_1&=0\end{aligned}$$

d.h. $3x_1=-y_1$ und deshalb

$$\nu_2=\begin{pmatrix}-b/3\\ b\end{pmatrix}$$

für jeden reellen Wert $b\neq0$. Es ist üblich, den entsprechenden Einheitsvektor hervorzuheben, also

$$e_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \qquad e_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$$

. ◁

Definition 75. Das Polynom $\det(A-\lambda I)=0$ vom Grad n in der Variablen λ heisst *charakteristisches Polynom* der Matrix A.

27.19 Übung Die Matrix $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ besitzt das charakteristische Polynom $(4-\lambda)(3-\lambda)-6=0$ und daher $12-7\lambda+\lambda^2=6$. Mit quadratischem Ergänzen folgt $(\lambda-3.5)^2-3.5^2=-6$ und $(\lambda-3.5)^2=6.25$ und $\lambda-3.5=\pm2.5$, $\lambda=3.5\pm2.5$, also $\lambda=\{1,6\}$. ◁

Wichtig 12. Eine wichtige Eigenschaft ist die sogenannte *Spur* einer Matrix, der Summe der Diagonalelemente. Sie ist der Summe der Eigenwerte gleich. Kennt man im Falle einer 2×2-Matrix den einen Eigenwert, so folgt der zweite einfach. Es dient auch der schnellen Kontrolle. ⊣

27.1.6 Inverser Matrix

Definition 76. Eine quadratische $n \times n$-Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ besitzt eine *Inverse* A^{-1}, so dass gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

27.20 Übung Es sind $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrixmultiplikation ergibt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

◁

Die Bestimmung der Inversen einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erfolgt nach

Formel 27.21. Inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = ad - bc$$

Anmerkung 27.22. Aus der obigen Formel sieht man, wieso gefordert wird, dass $\det(A) = ad - bc$ nicht null sein darf.

27.23 Übung Wir bestimmen die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Determinante ist $\det(A) = 4 - 3 = 1$. Somit folgt

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Das ist genau das B von oben. ◁

Wir stellen wieder einen Zusammenhang mit den Gleichungssystemen her. Ein lineares Gleichungssystem hat mit Matrizen folgendes Aussehen $Ax = b$. Wenn man von links beide Terme mit der existierenden Inversen multipliziert so gilt

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b$$

27.2 Linear-affine Abbildungen

27.2.1 Begriff

Wir kennen die lineare *Funktion* $y(x) = a \cdot x + b$. Eine lineare Abbildung ist aber definiert als $u = Ax$, d.h. ohne den additiven Term b, der bei Abbildungen eine Verschiebung oder Translation bedeutet. Eine Abbildung $u = Ax + b$ nennt man affine Abbildung.

Definition 77. Eine Abbildung $f : V \mapsto W$ ist linear, falls für zwei Vektoren $u, v \in V$ und einen Skalar c gilt:

(1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ (Additivität)

(2) $f(cu) = cf(u)$ (Homogenität)

Eine Matrixmultiplikation eines Vektors ist eine lineare Abbildung, denn es gilt $Au + Av = A(u+v)$ und $A(ku) = kAu$.

Satz 27.1. Falls A eine reelle $m \times n$-Matrix ist, dann beschreibt $f(x) = Ax$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definition 78. Eine Projektion in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine quadratische Matrix P mit der Eigenschaft $P^2 = P$. Ist die Projektion senkrecht, dann gilt zusätzlich $P^2 = P = P^T$.

Anmerkung 27.2. Die Eigenwerte der Projektionsmatrix P müssen 0 oder 1 sein.

27.2.2 Abbildungen

Rotation

Für die Rotation um 90° im Gegenuhrzeigersinn verwendet man die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Für einen beliebigen Winkel θ im Gegenuhrzeigersinn: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Spiegelung

An der x-Achse $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

An der y-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

An einer Geraden durch den Ursprung mit Steigung $m = \tan(\theta)$: $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

Streckung, Stauchung

Strecken in alle Richtungen um einen Faktor k: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kI$

Scherung

In x-Richtung:$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

In y-Richtung:$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$

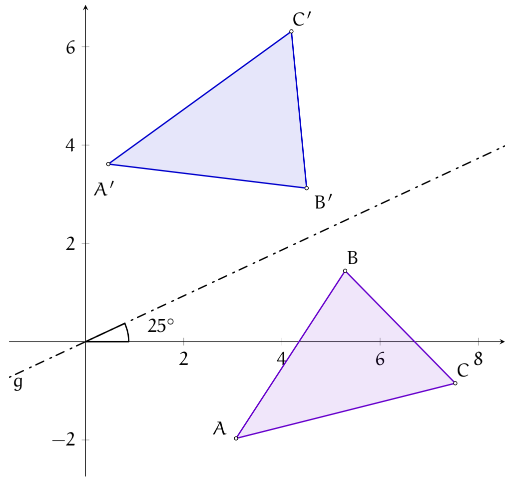
Schrumpfung

$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$

Projektion

Auf die x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Auf die y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Eine schiefe Projektion wird durch $P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Man beachte, dass $P = P^2$ gilt aber nicht $P = P^T$.

Wir spiegeln ein Dreieck an der Geraden durch den Ursprung mit einem Steigungswinkel von 25°. Dazu verwenden wir die Matrix mit den doppelten Winkeln 50° $M = \begin{pmatrix} \cos 50^\circ & \sin 50^\circ \\ \sin 50^\circ & -\cos 50^\circ \end{pmatrix}$.
Es ist $A = (3.07, -1.97)$



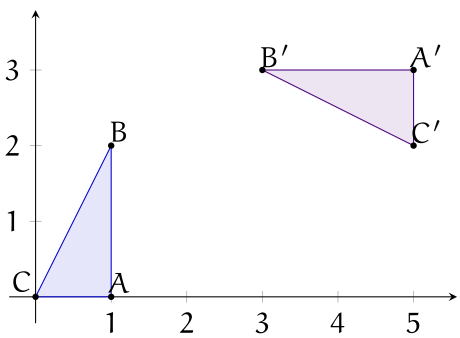
27.2.3 Translation

Die Translation ist die spezielle Abbildung, die dem Gebot der Homogenität für lineare Abbildungen widerspricht. Die affine Abbildung, welche die Translation um b beinhaltet, also $u = Ax + b$, kann durch sogenannte *homogene Koordinaten* in eine Matrixmultiplikation gefasst werden. Dazu wir eine dritte Koordinate eingeführt, die auf 1 gesetzt wird. Damit wir die affine Abbildung beschrieben mit

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_x \\ a_{21} & a_{22} & b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + b_x \\ a_{21}x + a_{22}y + b_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $(a_{ij}) = A$ die Matrix der linearen Abbildung und b der Translationsvektor.

27.3 Übung Eine Rotation um 90° mit anschliessender Translation um $b = (5, 2)$ kann mit der Matrix $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ angewendet auf die Koordinaten $(x, y, 1)$ bewerkstelligt werden. Wir nehmen drei , z.B. $A = (0, 1)$ und machen $A_h = (0, 1, 1)$ daraus, analog $B_h = (1, 2, 1)$ und $C - h = (0, 0, 1)$ und berechnen $A'_h = (4, 1, 1)$, $B'_h = (4, 2, 1)$ und $C'_h = (5, 1, 1)$. ◁

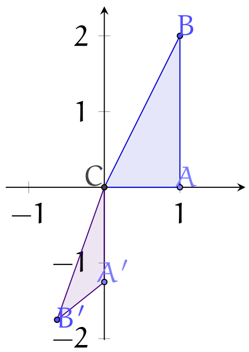


Wie man an der Abbildung erkennt, funktioniert der "Trick" mit der dritten Koordinate. Nun wollen wir uns der Verkettung von Abbildungen widmen. Die Translation lassen wir weg, weil wir wissen, dass dieser Teil nicht strikt linear ist. Man beachte, dass die Fläche von ursprünglicher Figur und Abbildung identisch sind. Das ist zu erwarten.

27.2.4 Verkettung von Abbildungen

Wir führen verschiedene Abbildungen aus, indem wir die entsprechenden Matrizen multiplizieren und dann auf eine Figur anwenden. Wir machen alles auf einmal. Konkret

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1.25 & 0\\ 0 & 1.25\end{pmatrix}}_{\text{Streckung}}\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\text{Rotation}}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung}}\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}}_{\text{Schrumpfung}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0.2\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{Scherung}}=\begin{pmatrix}0 & -0.3125\\ -1.25 & -0.25\end{pmatrix}$$



Wir nehmen dieselben Eckpunte des obigen Dreiecks und führen die drei Matrixmultplikationan aus. Es resultieren die Punkte $A' = (0, -1.25)$, $B' = (-0.625, -1.75)$ und $C' = C$. Der Nullpunkt bleibt fix.
Wenn wir nun die Reihenfolge der Matrixoperationen ändern, dann sehen wir, dass die resultierende Matrix sich jeweils ändert. Interessehalber schauen wir noch an, was mit der Fläche des Dreiecks geschieht. Das ursprüngliche Dreieck $\triangle ABC$ hat die Fläche 1. Das abgebildete die Fläche ist hingegen $0.625 \cdot 1.25/2 = 0.390625$. Wir bestimmen die Determinante der Matrix zu $0 \cdot (-0.25) - (0.3125)(-1.25) = 0.390625$. Das ist eine Bestätigung des Satzes, wonach die Fläche der mit der Matrix M abgebildeten Figur F' aus der ursprüngliche hervorgeht gemäss

$$F' = |\det(M)|F.$$

27.2.5 Fixpunk, Fixpunktgerade

Definition 79. Punkte, die bei einer Abbildung auf sich selbst abgebildet werden, nennt man *Fixpunkte* der Abbildung. Eine Gerade, die aus Fixpunkten einer Abbildung besteht, nennt man eine *Fixpunktgerade*.

Aus der Definition der linearen und affinen Abbildung folgt unverzüglich, dass für Fixpunkte gelten muss

$$x = Ax \qquad \text{respektive} \qquad x = Ax + b$$

Im Zweidimensionalen sind die Verhältnisse recht überschaubar. Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y &=& x \\ a_{21}x + a_{22}y &=& y \end{array}\right|$$

oder

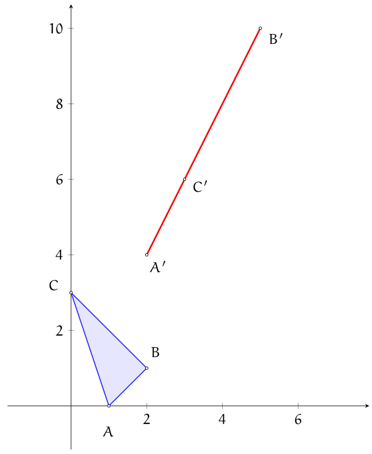
$$\left|\begin{array}{rcl} (a_{11}-1)x + \qquad a_{12}y &=& 0 \\ a_{21}x + (a_{22}-1)y &=& 0 \end{array}\right|$$

Definition 80. Lineare Gleichungssysteme werden, wenn alle konstanten Glieder b_i gleich 0 sind, *homogen* genannt.

Satz 27.4. Homogene Gleichungssysteme besitzen stets mindestens die sogenannte triviale Lösung, bei der alle Variablen gleich 0 sind.

Dies ist sofort klar, denn $A0_{n\times n} = 0_{n\times n}$ gilt immer.
Wenn die Determinante einer 2×2-Matrix nicht null ist, dann hat das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung.

27.2.6 Umkehrabbildung

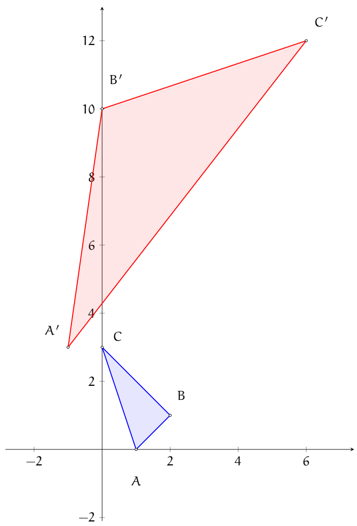


Eine Abbildung besitzt eine Inverse oder Umkehrabbildung, wenn sie ein-eindeutig ist. Man sagt auch *bijektiv*, von lateinisch "bis" zwei und "iactare" werfen, also hin- und zurückwerfen. Damit eine Abbildung bijektiv ist, muss die Abbildungsmatrix M gewisse Bedingungen erfüllen. Eine Matrix ist invertierbar, wenn die Determinante $\det(M) \neq 0$ ist. Wie kann man sich das vorstellen? Man betrachte die Abbildung. Das blaue Dreieck ist mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ transformiert worden. Daraus ist das rote "singuläre" Dreieck, eine Strecke geworden.
Die *Umkehrabbildung* von $u = Mx$ ist $M^{-1}u = x$ sofern A^{-1} existiert, d.h. $\det(M) \neq 0$ ist.

Satz 27.5. Die existierende Umkehrabbildung einer linearen Abbildung ist eine lineare Abbildung.

Für diese Matrix M ist $\det(M) = 0$, denn $1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$. Man beachte, dass die Spalten- und Zeilenvektoren Linearkombinationen sind, d.h. $m_{\bullet 1} = k \cdot m_{\bullet 2}$ oder $m_{1\bullet} = k \cdot m_{2\bullet}$. Hier sehen wir wieder, dass die Formel für die Fläche stimmt. Die Fläche der Abbildung ist $F' = |\det(M)|F = 0 \cdot F = 0$.

27.6 Übung Wir betrachten die Abbildungsmatrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Die Determinante ist $\det(M) = -4 - 6 = -10$, also nicht null. Mit der Formel 27.21 von Seite 27-9 bestimmen wir die Inverse $A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$. ◁



Mit dieser invertierbaren Abbildungsmatrix entsteht aus einem Dreieck wieder ein echtes Dreieck.

27.3 Gleichungssysteme

Der Name des Kapitels lineare Algebra enthält das Wort Algebra, mit dem wir bis anhin vor allem Gleichungen verbunden haben. Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Gleichungssystemen her.

27.3.1 Matrizenschreibweise

Wir betrachten eine Gleichungssystem der Art von

$$\left| \begin{array}{rcl} 3x - y + z & = & 8 \\ x + 2y - z & = & 4 \\ 2x + 3y - 4z & = & 10 \end{array} \right|$$

In Matrizenschreibweise sieht es wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{oder kurz} \qquad M \cdot x = b$$

Satz 27.1. Das lineare Gleichungssystem $M \cdot x = b$ mit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$ hat die Lösung $x = M^{-1}b$, falls M invertierbar ist.

Denn

$$\begin{aligned} M \cdot x &= b \\ M^{-1}M \cdot x &= M^{-1} \cdot b \\ I_{n \times n} \cdot x &= M^{-1} \cdot b \\ x &= M^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

Im Rahmen dieses Buches werden meist Systeme mit 2 oder ausnahmsweise 3 Unbekannten betrachtet. Wir haben in vorgehendem Kapitel schon Lösungsmethoden vorgeschlagen, nämlich Elimination, Substitution oder das Determinantenverfahren. Wir sind eigentlich genügend ausgerüstet. Was man aber erinnert ist, dass der Aufwand enorm zunimmt mit de Anzahl Unbekannten. Deshalb wurde schon früh nach Methoden gesucht, um die Rechnung zu mechanisieren. Ein solches Verfahren ist das *Gauss-Jordan-Verfahren* zur Inversion von Matrizen.

Für 2×2-Matrizen haben wir die einfache Lösung in Formel 27.21 auf Seite 27-9 angegeben. Somit betrachten wir den Fall für 3×3.

27.3.2 Gauss-Jordan-Verfahren**

Grundlegend sind folgende Voraussetzungen für lineare Gleichungssysteme, die leicht einsehbar sind;

- Zwei Gleichungen (Zeilen) dürfen miteinander vertauscht werden,
- jede Gleichung darf mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch eine solche Zahl dividiert werden,
- zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert werden.

Anstatt Gleichungen kann man die entsprechenden Terme, Summanden, verstehen.

Das Verfahren beginnt mit dem Schema bestehend aus der Koeffizientematrix M erweitert durch die Einheitsmatrix gleicher Dimension, also

$$(M|I) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Die Strategie besteht darin, Zeilen, bestehend aus $2n$ Elementen, so zu multiplizieren und addieren, dass am Schluss die folgende Darstellung erscheint:

$$(I|M^{-1}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]$$

Die Identitätsmatrix erscheint auf der linken Seite und rechts steht die Inverse.
Wir fahren am Beispiel fort. Als erstes vertauschen wir die erste mit der zweiten Zeile, weil in der zweiten schon eine 1 an erster Stelle steht:

$$(I|M^{-1}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} |Z_1 \Leftrightarrow Z_2 \\ -3Z_1 \\ -2Z_1 \end{array}$$

Nun subtrahieren wir von der neue Zeile 2 dreimal die Zeile 1, von der dritten 2 Mal die erste:

$$(I|M^{-1}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \qquad |Z_2 \Leftrightarrow Z_3$$

Jetzt vertauschen wir die Zeilen 2 und 3 und ändern die Vorzeichen der neuen zweiten Zeile:

$$(I|M^{-1}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} |-2Z_2 \\ \\ +7Z_2 \end{array}$$

Jetzt folgt

$$(I|M^{-1}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 18 & 1 & 11 & -7 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \div 18 \end{array}$$

Dritte Zeile durch 18 teilen:

$$(I|M^{-1}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/18 & 11/18 & -7/18 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} |+5Z_3 \\ -2Z_3 \end{array}$$

Letzte Zeile entsprechend in erster und zweiter addieren

$$(I|M^{-1}) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 5/18 & -3+55/18 & 2-35/18 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & 2-22/18 & -1+14/18 \\ 0 & 0 & 1 & 1/18 & 11/18 & -7/18 \end{array}\right]$$

Wir vereinfachen nun das Resultat, d.h.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 5/18 & 1/18 & 1/18 \\ -2/18 & 14/18 & -4/18 \\ 1/18 & 11/18 & -7/18 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 14 & -4 \\ 1 & 11 & -7 \end{pmatrix}$$

Hätten wir zuerst die Determinanten $\det(M)$ bestimmt, so hätten wir diese zu -18 erhalten.

Aufgaben

2.2 Lineare Abbildungen [113‰]

(a) Geben Sie die 2 mal 2 Matrix der Abbildung A an, welche die kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\vec{e}_1 = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\vec{e}_2 = -3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ abbildet.

(b) Bestimmen Sie die Fläche des von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannten Parallelogramms.

(c) Geben Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A an.

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

(e) Geben Sie die Gleichungen der Fixgeraden an.

2 **(a)** Aus der Fragestellung erkennen wir das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcrcr} e_1 & = & 2e_x & + & 1e_y \\ e_2 & = & -3e_x & + & -2e_y \end{array} \right|$$

und daraus $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} x$. Damit ist die Matrix A gefunden.

(b) Die Fläche entspricht dem Betrag der Determinante $F = |2(-2) - 1(-3)| = 1$ mit $\det(A) = -1$.

(c) Aus der Formelsammlung (Formel 27.21)

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) Die Eigenwerte folgen aus dem charakteristischen Polynom $\det\begin{pmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ -3 & (-2-\lambda) \end{pmatrix} = 0$ und somit $(2-\lambda)(-2-\lambda)+3 = 0$ und $-4+\lambda^2+3 = 0$ oder $\lambda^2 = 1$ und schliesslich $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Die Eigenvektoren, nennen wir sie u und w, folgen aus $Au = \lambda_1 u = 1u$ und $Aw = \lambda_2 w = -1w$

Als Gleichungssysteme geschrieben

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 0 & = & 1u_x & + & 1u_y \\ 0 & = & -3u_x & - & 3u_y \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{rcrcr} 0 & = & 3w_x & + & 1w_y \\ 0 & = & -3w_x & - & 1w_y \end{array} \right|$$

Aus dem ersten System folgt $u_x = -u_y$ für beliebige $u_x = p$. Damit ist ein Eigenvektor $u = p\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aus dem zweiten System folgt $w_x = -w_y/3$ und $w = q\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

(e) Die Gleichungen der Geraden sind einfach $f_1 : (0,0) + p(1,-1)$ und $f_2 : (0,0) + q(1,-1/3)$. (Bei einer lineare Abbildung ist $(0,0)$ immer Fixpunkt.

2.3 Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

3

Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom $(2-m)(1-m) - 30 = 0$. Die quadratische Gleichung ist $2 - 2m - m + m^2 - 30 = 0$ oder $m^2 - 3m - 28 = 0$. Mit quadratische Ergänzen $(m-1.5)^2 - 1.5^2 - 28 = 0$ und $(m-1.5)^2 = 30.25$ sowie $m - 1.5 = \pm\sqrt{30.25} = \pm 5.5$ und somit $m_{1,2} = 1.5 \pm 5.5 = \{7, -3\}$.

Die Gleichungssysteme sind mit den Eigenvektoren u und w

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 0 & = & (2-7)u_x & + & 5u_y \\ 0 & = & 6u_x & + & (1-7)u_y \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{rcrcr} 0 & = & (2+3)w_x & + & 5w_y \\ 0 & = & 6w_x & + & (1+3)w_y \end{array} \right|$$

Das erste System ist gleichbedeutend mit $u_X = u_y$, das zweite mit $w_X = -w_y$. Die Eigenvektoren sind also $u = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = q\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit p und q als Parameter.

2.4 Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$ ist für gewisse a gleich ihrer eigenen dritten Potenz, also A^3. Dies ist z.B. möglich für $a = 0$. Finden Sie alle anderen Lösungen für a. [50‰]

4

Wir schreiben $A = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und rechnen so $A^2 = a^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = a^2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2a^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 2a^3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2a^3\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4a^3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Dies führt auf die Gleichung $a = 4a^3$ oder $a^2 = 1/4$ und somit $a = \pm\frac{1}{2}$.

2.5 Zeigen Sie, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ ist, und finden Sie einen zweiten Eigenvektor $\vec{b}$ von M, der von $\vec{a}$ linear unabhängig ist. [50‰]

5

Für Eigenvektoren gilt $\lambda a = Ma$. Wir berechnen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1 \cdot 1 + 4) \\ (-6 + 12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Mit $\lambda_1 = 3$ stimmt die Aussage. Der zweite Eigenwert λ_2 ergibt sich aus der charakteristischen Gleichung oder viel einfacher aus der Spur der Matrix, die der Summe der Eigenwerten entspricht, also $\text{Spur}(A) = -1 + 6 = 5$ und somit $\lambda_2 = 5 - \lambda_1 = 5 - 3 = 2$. Aus $\lambda_2 b = Mb$ oder $Mb - \lambda_2 b$ folgt das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{rcrcl} (-1-2)b_x & + & 2b_y & = & 0 \\ -6b_x & + & (6-2)b_y & = & 0 \end{array}\right| \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{rcrcl} -3b_x & + & 2b_y & = & 0 \\ -6b_x & + & 4b_y & = & 0 \end{array}\right|$$

woraus $3b_x = 2b_y$ oder mit dem Parameter p als $b_x = p$ folgt $3p = 2b_y$ und $b_y = 3/2p$. Mit dem Parameter p ausgeklammert ist $\vec{b} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

– die Ableitbarkeit einer Funktion in einem Punkt und in einem Intervall definieren
– die Ableitung von Funktionen nach der Summenregel, Konstantenregel, Produktregel, Quotientenregel erklären
– Ableitungen unter Verwendung der Definition und der Ableitungsregeln (inklusive der Kettenregel) berechnen
– die Ableitung zur Lösung von Optimierungsproblemen anwenden
– eine vollständige Kurvendiskussion einer ableitbaren Funktion, die aus elementaren Funktionen zusammen gesetzt ist, (Definitionsbereich, Symmetrie, Periodizität, Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Wendepunkte) und den zugehörigen Graphen darstellen; den Wertebereich einer Funktion, eines Graphen bestimmen
– die Gleichung einer Tangente an einen Graphen bestimmen
–die Umkehrfunktion einer Funktion definieren und Zusammenhänge zwischen Funktion und Umkehrfunktion kennen
– die graphischen Elemente interpretieren, die in der Definition der Ableitung auftreten
–die Ableitung von Funktionen nach der Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, die Ableitung von zusammengesetzten Funktionen und die Ableitung der Umkehrung einer Bijektion erklären und beweisen
– Ableitungen unter Verwendung der Definition und von Ableitungsregeln berechnen
– die Regel von de l'Hospital darstellen und anwenden
– die Beziehung zwischen erster Ableitung und Kurvenverlauf erklären und anwenden
– die Beziehung zwischen zweiter Ableitung, Konkavität, Konvexität und Wendepunkt erklären und anwenden

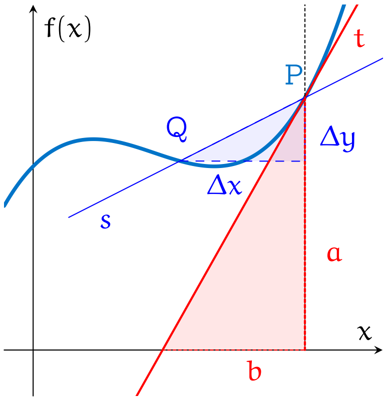
Kapitel 28

Ableitung

28.1 Ableitung als Grenzwert

28.1.1 Sekante und Tangente

Die Sekante heisst die *schneidende* Gerade und die Tangente ist die *berührende* Gerade. In der Abbildung sieht man die Tangente an die Kurve $f(x)$ im Punkt P und *eine* Sekante von vielen durch den Punkt P. Wie man leicht einsieht, wird die Sekante zur Tangente, wenn man den Punkt Q entlang der Kurve zu P hin schiebt bis $P = Q$. Die Steigung der Tangente ist in der Abbildung $\frac{a}{b}$. Die Steigung der Sekante ist hingegen



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$

und damit der Grenzwert, der die Sekantensteigung zur Tangentensteigung macht

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{x_q \to x_P} \frac{a}{b}$$

Damit wird das blaue Dreieck dem roten ähnlich. Nun machen wir ein paar Namensgebungen.

Definition 81. Eine reellwertige Funktion $f(x)$ mit x und $x_Q \in \mathbb{R}$ ist gegeben. Der *Differenzenquotient* ist

$$a(x, x_Q) = \frac{f(x) - f(x_Q)}{x - x_Q} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Die Gerade durch die Punkte $(x, f(x))$ und $Q = (x_Q, f(x_Q))$ ist die *Sekante*.

Definition 82. Eine reellwertige Funktion $f(x)$ mit x und $x_Q \in \mathbb{R}$ ist gegeben. Der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von $f(x)$ an der Stelle x_Q ist der Grenzwert, sofern er existiert

$$a = \lim_{x_Q \to x} \frac{f(x) - f(x_Q)}{x - x_Q} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Die Funktion $f(x)$ nennt man *differenzierbar* an der Stelle x.

Anmerkung 28.1. Die Ableitung ist ein Wert für die Stelle x oder besser die Abbildung von x auf a. Für beliebige, d.h. alle Werte x im Definitionsbereich, ist es eine Funktion $a(x)$.

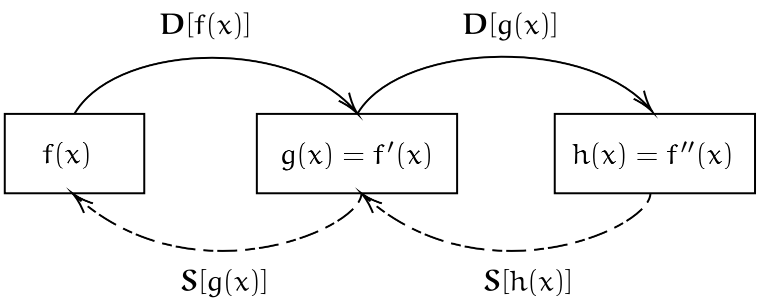
Die Ableitung und die gesamte Infinitesimalrechnung hat grosse Diskussionen und Streit unter den Mathematikern ausgelöst. Es gibt deshalb immer noch verschiedene Notationen. Wir werden uns hier mehr an Lagrange und Leibniz halten. Newtons sogenannten Fluxionen sind noch in der Mechanik üblich.

Definition 83. **Notation** Die Ableitung wird geschrieben:

- nach Lagrange $y'(x)$, y'', y''', $y(4)$,
- nach Newton $\dot{y}$, $\ddot{y}$,, $\dddot{y}$,
- nach Euler $Df(x)$, D^2f, D^3f und
- nach Leibniz $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

Anmerkung 28.2. In der obigen Notation sind sogenannte höhere Ableitungen auch schon notiert. Diese folgen aus der Anwendung des Grenzwertes auf höhere Differenzenquotienten. Wir werden später darauf eingehen.

Anmerkung 28.3. Die Ableitung ist eine Operation an einer Funktion, die zu einer neuen Funktion führt. Eine Funktion hingegen bildet eine Menge auf eine Menge ab.



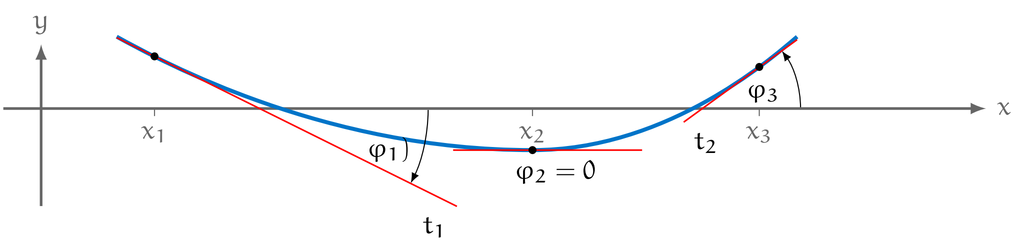
Die Formel für die Tangente kann man nun auch angeben.

Formel 28.4. **Tangente** Die Tangente durch den Punkt $(p, f(p))$ der differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist:

$$t: \quad g(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

28.1.2 Winkel und Normale

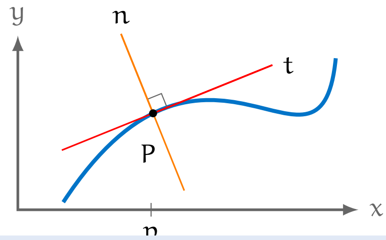
Alle Tangenten an die Kurve, die nicht die Steigung 0 besitzen, schneiden die x-Achse unter einem bestimmten Winkel. Wir nennen ihn $\varphi(x)$, eine Funktion von der Stelle x, an der die Tangente an die Kurve gelegt wird.



Formel 28.5. Die Tangente an eine Kurve $y = f(x)$ bildet mit der positiven $x_A$chse den Winkel $\varphi(x)$ gemäss

$$\varphi(x) = \arctan(f'(x)).$$

Zur Abrundung können wir noch die Normale in einem Punkt bestimmen, wenn wir die Tangente kennen. Bekanntlich steht die Normal senkrecht auf der Tangente. Sie hat, wenn die Tangente nicht horizontal liegt, eine Steigung, die dem negativen Kehrwert der Tangentensteigung entspricht.



Formel 28.6. Die Normale der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P = (p, f(p))$ ist

$$n: \qquad y - f(p) = -\frac{1}{f'(p)} \cdot (x - p) \quad \text{falls} \quad f'(p) \neq 0$$

und falls $f'(p) = 0$, dann ist die Normale eine Vertikale bei $x = p$.

28.1.3 Ableitungen einfacher elementarer Funktionen

Die Definition der Ableitung kann man verwenden, um einfache Ableitungen zu bestimmen. Wir beginnen ganz einfach.

28.7 Übung Wir suchen die Ableitung der Funktion $f(x) = 1$. Zur Verdeutlichung: die Funktion $f(x) = 1$ gilt für jedes x des Definitionsbereichs. Somit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hätten wir geometrisch argumentiert, so wäre aufgefallen, dass die Tangentensteigung der Konstanten 0 ist. ◁

Mit den Regeln der Grenzwerte folgt der folgende Satz:

Satz 28.8. Die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c$ ist Null.

Nun betrachen wir eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$. Geometrisch ist klar, dass die Tangensteigung a ist, das kennen wir von früher, Deshalb ist dies eine andere Rechtfertiung.

Potenzfunktionen

28.9 Übung Für $f(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= a \end{aligned}$$

◁

Satz 28.10. Die Ableitung einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ ist die Steigung a dieser Kurve für alle $x \in \mathbb{R}$.

28.11 Übung Nun gehen wir eine Potenz höher, also $f(x) = ax^2$. Es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(\cancel{x^2} + 2hx + h^2) - \cancel{ax^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(2hx + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} a2x + h \\ &= 2ax \end{aligned}$$

◁

28.12 Übung Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2x^3 - x + 1$ und suchen ihre Ableitungsfunktion $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^3 - (x+h) + 1 - (2x^3 - x + 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)^3 - h - \cancel{2x^3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 1 \\ &= 6x^2 - 1 \end{aligned}$$

◁

28.13 Übung Wir leiten die Funktion $g(x) = 6x^2 - 1$ ab. Es ist die Ableitung von der vorhergehenden Übung. Es ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h)^2 - \cancel{1} - 6x^2 + \cancel{1})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{6x^2} + 12xh + 6h^2 - \cancel{6x^2}}{h} \\ &= 12x + \lim_{h\to 0} \frac{6h^2}{h} \\ &= 12x \end{aligned}$$

Nun könnten wir die lineare Funktion $h(x) = 12x$ ableiten und würden gemäss obigem Satz $h'(x) = 12$ bekommen. ◁

$$\begin{tikzcd} \boxed{2x^3 - x + 1} \arrow[r, bend left, "{D[f(x)]}"] & \boxed{6x^2 - 1} \arrow[r, bend left, "{D[g(x)]}"] & \boxed{12x} \arrow[r, bend left, "{D[h(x)]}"] & \boxed{12} \end{tikzcd}$$

28.14 Übung Jetzt verallgemeinern wird zur Funktion $f(x) = ax^n$. Wir erinnern den binomischen Lehrsatz $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, den wir aber nicht weiter anwenden müssen. Alle Terme des Zählers werden durch h dividiert. Alle Terme mit h^2, h^3 etc. werden im Grenzwert $h \to 0$ dann null. Es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= a \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= a \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \ldots - \cancel{x^n}}{h} \\ &= a \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \ldots}{h} \\ &= a \lim_{h\to 0} nx^{n-1} \\ &= anx^{n-1} \end{aligned}$$

◁

Aus den vier letzten Übungen sieht man eine Regelmässigkeit für Polynome, dass nämlich die Ableitung Monome enthält, deren Ordnung um 1 reduziert und mit dem ursprünglichen Exponenten multipliziert ist.

Satz 28.15. Die Funktion x^n für $n \in \mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und besitzt die Ableitung:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Anmerkung 28.16. Man betrachte folgende Zuordnung von Funktion und Ableitung

$$\begin{aligned} f(x) &\ldots, x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2}, \ldots \\ f'(x) &\ldots, 3x^2, 2x^1, 1x^0, 0, -1x^{-2}, -2x^{-3} \ldots \end{aligned}$$

Wieso tritt keine Ableitung x^{-1} auf sondern die Null? Das hat die besten Mathematiker der Zeit beschäftigt.

28.17 Übung Nun untersuchen wir eine Potenz mit negativem Exponenten und fragen uns, ob obiger Satz auch für negative n gilt. Wir suchen für $f(x) = \frac{1}{x}$ die Ableitungsfunktion.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h)x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \frac{-1}{(x+0)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Wenn wir unsere obige Formel ansetzten, dann folgt für $f(x) = x^{-1}$ oder $n = -1$ auch $f'(x) = (-1)x^{n-1} = -1x^{-2}$. ◁

Kreisfunktionen

Etwas aufwendiger ist die Herleitung der Ableitung für Kreisfunktionen. Dabei muss man die Additionstheoreme und die graphische Anschauung bemühen.

28.18 Übung Was ist die Ableitung der Sinus-Funktion? Die Definition fordert

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Mit $\sin(x+a) = \sin(x)\cdot\cos(a) + \cos(x)\cdot\sin(a)$ folgt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(h) + \cos(x)\cdot\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

umgeformt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cdot(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cdot\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x)\cdot\lim_{h\to 0} \frac{(\cos(h)-1)}{h} + \cos(x)\cdot\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

Nun müssen wir die beiden Ausdrücke mit h verstehen und bestimmen. Der erste ist Term kann man interpretieren als die Ableitung des $\cos(x)$ an der Stelle h, also Geometrisch ist die Tangentensteigung am Kosinus bei $x = 0$ null. Zum anderen könnten wir die Potenzreihenentwicklung aus dem Kapital 24 hervornehmen, wonach $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$ ist. Damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\cos(h)-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(0+h) - \cos(0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1 - \frac{h^2}{2} - 1)}{h} = 0$$

Für den Sinus ist $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} \ldots$. Also

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - \frac{h^3}{6}}{h} = 1$$

Setzen wir die gefundenen Beziehunge ein, so folgt sehr schön

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Ganz analog kann man mit der Ableitung des Kosinus verfahren. ◁

Satz 28.19. Die Ableitungen der Kreisfunktionen sind:

$$\begin{aligned} (\sin(x))' &= \cos(x) \\ (\cos(x))' &= -\sin(x) \end{aligned}$$

Exponentialfunktion

Die einfachste Art, die Ableitungen dieser Funktionen herzuleiten ist die Benutzung der Potenzreihenentwicklung, die wir aus Kapitel 24 kennen. So gilt etwa für exp():

$$\exp(cx) = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} + \ldots$$

Mit der Definition folgt

$$(e^{cx})' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{c(x+h)} - e^{cx}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ch}e^{cx} - e^{cx}}{h} = e^{cx} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ch} - 1}{h}$$

Ersetzen wir e^{ch} mit $1 + ch + \ldots$, so folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{ch} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + ch - 1}{h} = c$$

Damit folgt: $(e^{cx})' = ce^{cx}$

Nun ist $(b^x)'$ gesucht. Mit $b^x = e^y$ folgt $y = \ln(b)x$ oder $e^{\ln(b)x} = e^{ax}$. Somit $(e^{ax})' = ae^{ax} = ab^x = \ln(b)b^x$.

Satz 28.20. Die Ableitung von e^x, resp. e^{cx} ist:

$$(e^x)' = e^x \qquad \text{und} \qquad (e^{cx})' = ce^{cx}$$

Für b^x gilt

$$(b^x)' = \ln(b) \cdot b^x \qquad \text{und} \qquad (b^{cx})' = c\ln(b)b^{cx}$$

28.1.4 Alternative Grenzwerte, Differenzierbarkeit

Wir wissen aus dem Kapitel 23??, dass es zwei Grenzwerte in einem Punkt gibt, nämlich den *linksseitigen* und den *rechtsseitigen* Limes. Damit kann man natürlich auch die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung darstellen, also

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad \text{und} \qquad f'_+(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

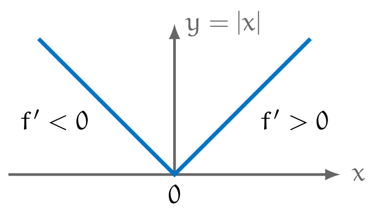
Satz 28.21. Gilt $f'_-(x) = f'_+(x)$, dann ist f in x *differenzierbar.*

Anmerkung 28.22. Wenn man die beiden Grenzwerte addiert, entsteht die alternative Darstellung für die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Satz 28.23. Jede an einer Stelle x differenzierbare Funktion f ist dort auch stetig. Jede auf ihrem Definitionsbereich D differenzierbare Funktion ist stetig. (Die Umkehrung gilt nicht.)

Das Paradebeispiel einer stetigen aber nicht überall differenzierbaren Funktion ist die Betragsfunktkion von x, also $f(x) = |x|$. Für $x < 0$ ist $f(x) = -x$ und für $x > 0$ dann $f(x) = x$. Die linksseitige Ableitung im Punkt $x = 0$ ist



$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0) - f(0-h)}{h} = \frac{0 - (0+h)}{h} = -1$$

und

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h - 0)}{h} = 1$$

Da linksseitige und rechtsseitige Ableitung nicht gleich sind, ist die Funktion in $x = 0$ nicht differenzierbar.

28.2 Rechenmethoden

28.2.1 Das Leibniz'sche Differential-Kalkül

Ein Kalkül ist wie ein Spiel mit Regeln, mit denen sich aus gegebenen Aussagen weitere Aussagen ableiten lassen. Das Spiel bezweckt richtige Aussagen zu machen aber nicht, eine Theorie zu begründen oder zu beweisen. Wenn wir an die Algebra denken, so wissen wir z.B., dass keine Klammer alleine stehen kann sondern nur paarweise auftreten, oder dass rechts von einem Divisionszeichen ein Term stehen muss. Eine Grammatik ist auch ein Kalkül, das z.B. besagt, dass ein Satz ein Verb enthalten muss.
Leibniz hat das Operator-Symbol d verwendet, um vereinfacht gesagt, den linearen Anteil einer abhängigen Variablen oder Funktion y, u, v oder unabhängigen Variablen x zu bezeichnen. Einen Ausdruck dv nennt man Differential. Seine Regeln lauten:

Eigenschaften 28.1. Leibniz Regeln

- Für eine Konstante a gilt $d(ax) = a dx$ und $da = 0$
- $(u = v) \qquad \Leftrightarrow \qquad (du = dv)$
- Summe, Differenz $d(u + w - z) = du + dw - dz$
- Produkt $d(uv) = udv + vdu$ oder $\dfrac{d(uv)}{uv} = \dfrac{dv}{v} + \dfrac{du}{u}$
- Quotient $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \left(\dfrac{u}{v}\right)\left(\dfrac{du}{u} - \dfrac{dv}{v}\right)$
- Kettenregel für $f(g(h(x)))$ gilt $df = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dh}\dfrac{dh}{dx}dx$
- Logarithmisches Differential $d\ln(|u|) = \dfrac{du}{u}$
- Mehrfachanwendung $d(du) = d^2u$

Mit den Differentialen kann man operieren wie mit normalen Variablen.

Anmerkung 28.2. Wenn man die Differentiale von oben jeweils durch dx (oder ein anderes Differential) dividiert, dann entstehen Ausdrücke mit Ableitungen, denn $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ etc.

28.3 Übung Aus der Definition gilt $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Es ist $y = x^2$ gegeben, $f' = 2x$ und $dy = f'\,dx$. Damit gilt $dy = 2x\,dx$. Weiter formen wir um und schreiben

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x} \qquad \Leftrightarrow \qquad dx = \frac{1}{2x}dy$$

In anderer Notation sollte dies die Ableitung der Umkehrfunktion sein, also $(f^{-1})'$. Aus $y = x^2$ folgt $x = \sqrt{y} = y^{1/2} = f^{-1}(y) = g(y)$. Wir leiten ab und setzen wieder ein

$$g'(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{y^{1/2}} = \frac{1}{2x}$$

Dasselbe Resultat aber komplizierter gerechnet. $\triangleleft$

28.4 Übung Wir analysieren eine sogenannte Differentialgleichung, d.h eine Gleichung, in der sowohl die Funktion als auch ihre Ableitung vorkommt. Hier $y' = y$. Wir schreiben mit Differentialen

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = dx$$

Mit der Regel für logarithmische Differentiale folgt

$$d(\ln(y)) = dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = e^x.$$

Die Kontrolle ergibt $(e^x)' = e^x$ und somit $y' = y$. ◁

28.2.2 Ableitung von Summen

Bis hierhin haben wir für einfache elementare Funktionen die Ableitungen anhand der Definition als Grenzwert bestimmt. Weiterhin aus der Definition bestimmen wir Regeln, die uns dann die Sache vereinfachen.
Wir nehmen $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ und setzen die Summe zweier Funktionen $f(x) = g(x)+r(x)$ ein und vereinfachen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x) + r(x+h) - r(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{r(x+h) - r(x)}{h}\right]$$

Nun kennen wir die Summenregel für Grenzwerte, weshalb gilt

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{r(x+h) - r(x)}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{r(x+h) - r(x)}{h}$$

Daraus erkennen wir die zweimalige Definition der Ableitung. Deshalb

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{r(x+h) - r(x)}{h} = g'(x) + r'(x)$$

Analog für $f(x) = g(x) - s(x)$. Wir erweitern die Fragestellung auf die Linearkombination $f(x) = ag(x) + br(x)$ mit a und b Konstanten. Wiederum mit der Limesregel, wonach $\lim a \cdot g(x) = a \lim g(x)$ ist, folgt:

Formel 28.5. Summenregel Es gilt

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(a \cdot f \pm b \cdot g)' = a \cdot f' \pm b \cdot g'$$

Anmerkung 28.6. Wir Vergleichen mit Leibniz, der sagt: $d(f + g) = df + dg$. Mit dx geteilt $\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$. Weil $df/dx = f'$ etc. handelt es sich um dieselbe Aussage. Genauso für die Linearkombination mit Regel Punkt 1.

Wir haben diese Regel schon intuitiv verwendet, nämlich bei der Ableitung von Polynomen, die ja Summen von Monomen sind.

28.2.3 Ableitung von Produkten

Nach dem gleichen Rezept betrachten wir das Produkt $u(x) \cdot v(x)$ und setzen ein

$$(uv)' = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Allgemein gilt das Nullelement der Addtion, also $x = x + 0$ und $0 = a - a$. Nach dieser Logik addieren wir 0 in der Form $a - a$, wobei wir $a = u(x+h)v(x)$ wählen, dem Produkt aus eine Faktor des ersten Terms und eines anderen des zweiten Terms, also

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x+h)v(x)}{h}$$

umgruppiert und ausgeklammert

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)] - [v(x)[u(x+h) - u(x)]}{h}$$

oder

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)]}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{[v(x)u(x+h) - u(x)]}{h}$$

aequivalent

$$\lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{[v(x+h) - v(x)]}{h} - v(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]}{h}$$

und mit der Definition der Ableitung

$$(uv)' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

Leibniz behauptete, $d(uv) = udv + vdu$ oder mit dx dividiert: $d(uv)/dx = u\,dv/dx + v\,du/dx = uv' + vu'$.

Formel 28.7. Produktregel Es gilt:

$$(fg)' = fg' + f'g$$

und

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

28.2.4 Ableitung von Quotienten

Die Ableitung von Quotienten $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ist eigentlich gleich der Produkteregel, wobei ein Faktor eben ein Quotient $\frac{1}{v}$ ist. Setzt man $f(x) \cdot v(x) = u(x)$ und leitet ab, so folgt

$$f'(x) \cdot v(x) + f(x) \cdot v'(x) = u'(x)$$

aufgelöst nach f':

$$f'(x) = [u'(x) - f(x) \cdot v'(x)]\frac{1}{v(x)}$$

rechts dann f eingesetzt, folgt

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

gleichnamig dann

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Und Leibniz? Er sagte $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$. Wiederum durch dx dividiert ergibt die Quotientenregel.

Formel 28.8. Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

28.2.5 Kettenregel

Dies ist die wichtigste Ableitungsregel, denn sie verallgemeinert alle anderen Regeln. Wir erinnern: eine Verkettung von Funktionen hat die Form $f(x) = u(v(x))$. Man spricht von verketteter oder mittelbarer Funktion. Mit zwei Funktionen spricht man weiters von innerer und äusserer Funktion.
Nach Leibniz ist die Ableitung einfach, nämlich $df = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}dx$ oder

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \qquad \Leftrightarrow \qquad f' = u'v'$$

Mit der Definition der Ableitung als Grenzwert schreiben wir mit einer Varianten für die Ableitung im Punkt P

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{u(v(x)) - u(v(p))}{x - p}$$

Mit einer geschickten Erweiterung folgt

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{u(v(x)) - u(v(p))}{x - p} \cdot \frac{v(x) - v(p)}{v(x) - v(p)}$$

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{u(v(x)) - u(v(p))}{v(x) - v(p)} \cdot \frac{v(x) - v(p)}{x - p}$$

Mit der Limes-Regel für Produkte

$$f'(p) = \underbrace{\lim_{x\to p} \frac{u(v(x)) - u(v(p))}{v(x) - v(p)}}_{=\frac{du}{dv}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to p} \frac{v(x) - v(p)}{x - p}}_{=\frac{dv}{dx}}$$

Hier sieht man den Vorteil der Notation von Leibniz, denn $\frac{du}{dv}$ ist die Ableitung von u nach v. Nach Lagrange schreibt man aber u' und erkennt daran nicht, dass nach v und nicht nach x abgeleitet wird.

Wichtig 13. Man sollte sich die Kettenregel als $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dx}$ merken, weil $f' = f'g'$ verwirrend ist. ⊣

Formel 28.9. Kettenregel Für $f(x) = f(g(x))$ gilt

$$f'(g(x)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

und für $f(x) = f(g(h(x)))$

$$f'(g(h(x))) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx}$$

Anmerkung 28.10. Voraussetzung für die Gültigkeit der Kettenregel ist, dass der Definitionsbereich der inneren Funktion dem Wertebereich der äusseren entspricht.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, verkettete Funktionen praktisch abzuleiten. Zum einen kann man schön nach den substituierten Variablen nach gehen.

28.11 Übung Wir bestimmen die Ableitung von $f(x) = \exp(\sin(2x))$. Wir setzen $u = 2x$ und $v = \sin(u)$ und $f(x) = \exp(v)$. Mit $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}\frac{dv}{du}$ und $\frac{du}{dx}$ rechnen wir:

$$\frac{df}{dv} = \exp(v), \quad \frac{dv}{du} = \cos(u), \quad \frac{du}{dx} = 2$$

und somit

$$\frac{df}{dx} = \exp(v) \cdot \cos(u) \cdot 2 = \exp(\sin(u)) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \exp(\sin(2x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

◁

Eine andere Vorgehensweise ist mehr grafisch, von innen, also bei x beginnend nach aussen.

28.12 Übung Wir suchen die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{4+\cos(x)}$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] & \cos(x) = u \arrow[r] \arrow[d, "D_x"] & 4 + u = v \arrow[r] \arrow[d, "D_u"] & \frac{1}{v} = f(x) \arrow[d, "D_v"] \\
 & -\sin(x) & 1 & \dfrac{-1}{v^2}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(x) \cdot 1 \cdot \frac{-1}{v^2} \\
&= -\sin(x) \frac{-1}{(4+u)^2} \\
&= \sin(x) \frac{1}{(4+\cos(x))^2}
\end{aligned}$$

◁

28.13 Übung Wir bestimmen die Ableitung von $\sqrt{1+\sqrt{x+\sin(x)}}$. Schematisch

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] & x + \sin(x) = u \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{u} = v \arrow[r] \arrow[d] & 1 + v = w \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{w} = f(x) \arrow[d] \\
 & 1 + \cos(x) & \dfrac{1}{2\sqrt{u}} & 1 & \dfrac{1}{2\sqrt{w}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+\cos(x)) \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{1}{2\sqrt{w}} \\
&= (1+\cos(x)) \frac{1}{2\sqrt{x+\sin(x)}} \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\sin(x)}}}
\end{aligned}$$

◁

28.2.6 Ableitung der Umkehrfunktion

Wir haben schon eine heuritstische Rechnung mit dem Leibniz-Kalkül gemacht. Wir wollen hier diese Formel nicht herleiten.

Formel 28.14. Umkehrfunktion Es ist $g(y)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$

$$(f(x))' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))}$$

28.15 Übung Wir haben die Exponentialfunktion schon hergeleitet aber ihre Inverse, die Logarithmusfunktion noch nicht. Deshalb bestimmen wir mit $\ln^{-1}(x) = \exp(x)$:

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Man beachte, das war das fehlende Glied in der Ableitungsreihe in Anmerkung 28.16! Also

$$\begin{aligned} f(x) & \ldots, x^3, x^2, x^1, x^0, \ln(x)\ , x^{-1},\ x^{-2}, \ldots \\ f'(x) & \ldots, 3x^2, 2x^1, 1x^0, 0, x^{-1},\ -1x^{-2}, -2x^{-3} \ldots \end{aligned}$$

◁

Die Logarithmen können beliebige Basen neben e haben. Da gilt ja der Zusammenhang $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = c\ln(x)$ mit einer Konstanten $c = \frac{1}{\ln(a)}$. Deshalb ist $(a\ln|x|)' = a(\ln|x|)'$. Somit muss die Ableitung von $(\log_a(x))' = (c\ln(x))' = \frac{c}{x} = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}$ sein.

Satz 28.16. Die Ableitung von $\ln|x|$, resp. $\log_a|x|$ ist:

$$\begin{aligned} (\ln|x|)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a(x))' &= \frac{1}{x\cdot\ln(a)} \end{aligned}$$

28.2.7 Logarithmische Ableitung**

Definition 84. Man nennt folgenden Ausdruck *logarithmische Ableitung*:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{f'}{f} = \frac{d(\ln(f))}{dx}$$

Dass diese Beziehung stimmt sieht man sofort mit Anwendung der Kettenregel mit $u = \ln(f)$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{df}\frac{df}{dx} = \frac{1}{f}\cdot f'$$

Leibniz hatte schon behauptet (Eigenschaften 28.1): $d\ln(|u|) = \dfrac{du}{u}$. Nun kann man für die Produktregel schreiben:

$$\mathcal{L}(uv) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$$

und die Quotientenregel

$$\mathcal{L}(\frac{u}{v}) = \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v)$$

28.17 Übung Leiten wir die Funktion $y = x^x$ ab. Wir nehmen an, dass gilt $x > 0$. Die Produktregel hilft hier nicht. Der Ansatz, beide Seiten zu logarithmieren, bringt:

$$\ln(y) = x\ln(x)$$

Abgeleitet folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln(y)) &= \frac{d}{dx}(x \cdot \ln x) \\ \frac{y'}{y} &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1) \end{aligned}$$

◁

28.18 Übung Wir leiten den folgenden Ausdruck ab: $y = \dfrac{(2x+1)^7(3x^3-7x+6)^4}{(1+\sin x)^5}$. Wir logarithmieren beidseits und wenden auf der rechten Seite die Rechenregeln der Logarithmen an.

$$\begin{aligned}
\ln(y) &= \ln\left(\frac{(2x+1)^7(3x^3-7x+6)^4}{(1+\sin(x))^5}\right)\\
&= \ln\left((2x+1)^7(3x^3-7x+6)^4\right) - \ln\left((1+\sin(x))^5\right)\\
&= \ln\left((2x+1)^7\right) + \ln\left((3x^3-7x+6)^4\right) - \ln\left((1+\sin(x))^5\right)
\end{aligned}$$

Nun leiten wir ab:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ln(y)) &= \frac{d}{dx}\left(7\ln(2x+1) + 4\ln(3x^3-7x+6) - 5\ln(1+\sin(x))\right)\\
\frac{y'}{y} &= 7\cdot\frac{2}{2x+1} + 4\cdot\frac{9x^2-7}{3x^3-7x+6} - 5\cdot\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\\
y' &= y\cdot\left(\frac{14}{2x+1} + \frac{36x^2-28}{3x^3-7x+6} - \frac{5\cos(x)}{1+\sin(x)}\right)\\
&= \frac{(2x+1)^7(3x^3-7x+6)^4}{(1+\sin x)^5}\cdot\left(\frac{14}{2x+1} + \frac{36x^2-28}{3x^3-7x+6} - \frac{5\cos(x)}{1+\sin(x)}\right)
\end{aligned}$$

Mit Produkt- und Quotientenregel wäre man auch ans Ziel gekommen, allerdings mit ein bisschen mehr Aufwand. ◁

28.2.8 Implizite Ableitung**

Ist eine Funktion durch eine Gleichung definiert und kann oder will man nicht diese Gleichung nach $f(x)$ auflösen, so gibt es eine Möglichkeit, dennoch die Ableitung $f'(x)$ zu berechnen. Ein gutes Beispiel ist die Kreisgleichung $x^2+y^2=r^2$. Nun sind je ein Halbkreis eine Funktion. Wir schreiben die implizite Funktion $F(x) = x^2 + f(x)^2 - r^2 = 0$. Leiten wir $F(x)$ nach x ab, so folgt $F'(x) = 2x + 2f(x)f'(x) = 0$. Da $F(x) = 0$ ist seine Ableitung auch 0. Daraus kann man schliessen: $f' = \dfrac{-x}{f(x)} = \dfrac{-x}{y}$. Das ist die Tangentensteigung an den Kreis.
Es gilt für $F(x,y) = 0$:

$$f'(x) = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Nochmals: $F(x,y) = x^2+y^2-r^2 = 0$, $\dfrac{dF}{dx} = 2x$, $\dfrac{dF}{dy} = 2y$ uns somit $f'(x) = -\dfrac{x}{y}$. Wir haben diesen Kniff schon im Vorgriff bei der Bestimmung der Tangente an die Hyperbel benutzt.

28.19 Übung Wir suchen die Ableitung von $f(x) = x^x$. Zuerst müssen wir umformen und den Exponenten eliminieren und zwar durch Logarithmieren: $\ln(f(x)) = x\ln(x)$. Sodann $F(x,y) = \ln(y) - x\ln(x) = 0$. $\dfrac{dF}{dx} = -x\cdot\frac{1}{x} - \ln(x)\cdot 1$, $\dfrac{dF}{dy} = \frac{1}{y}$ und $f'(x) = -\dfrac{-1-\ln(x)}{1/y} = (1+\ln(x))y$ und $f'(x) = (1+\ln(x))x^x$. ◁

28.3 Ableitungen weiterer Elementarfunktionen

28.3.1 Weitere Kreisfunktionen

Die Ableitungen von Sinus und Kosinus haben wir schon in Satz 28.19 bestimmt. Offen sind die Ableitungen von Tangens und Kotangens. Mit der Kettenregel können wir nun dies hier nachholen. Es gilt ja

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{und} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Mit der Quotientenregel $d(u/v) = (du \cdot v - dv \cdot u)/(v^2)$ folgt:

$$(\tan(x))' = \frac{(\sin(x))' \cos(x) - (\cos(x))' \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Analog für den Kotangens:

$$(\cot(x))' = \frac{(\cos(x))' \sin(x) - (\sin(x))' \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

Anmerkung 28.1. Man beachte, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ die Periode 2π aufweisen, wogegen $\tan(x)$ und $\cot(x)$ die Periode π besitzen. Somit sind an den Stellen, bei denen $\cos(x) = 0$ und $\sin(x) = 0$ die entsprechenden Ableitungen nicht definiert.

Satz 28.2. Die Ableitungen der Kreisfunktionen sind:

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$(\cot(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

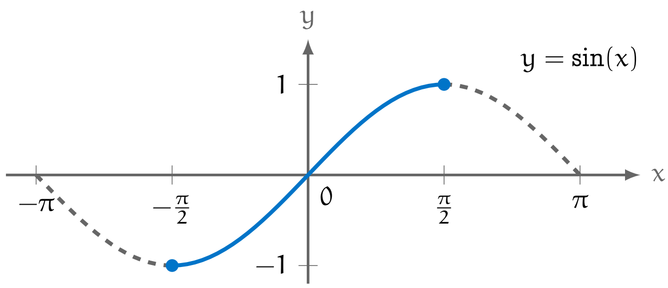
28.3 Übung Wir suche die Ableitung von $y = 3\tan(\pi - 2x)$. Wir substituieren mit $u = \pi - 2x$, bestimmen $\frac{du}{dx} = -2$ und verwenden die Kettenregel $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{3}{\cos^2(u)} \cdot (-2)$. Nun eingesetzt folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6}{\cos^2(\pi - 2x)}$$

◁

28.3.2 Arcus-Funktionen

Die Arcus-Funktionen sind die Inversen oder Umkehrfunktionen, der Kreisfunktionen (trigonometrischen Funktionen). Da die Kreisfunktionen sich über den ganzen reellen Zahlenbereich als Definitionsbereich ausstrecken, und sie periodisch sind, sind die y-Werte unendlich viele Male wiederkehrend. Deshalb gibt es keine eindeutige Umkehrfunktion. Wenn man sich aber auf ein bestimmtes Intervall für x beschränkt, so dass $f(x)$ monoton ist, dann kann man eine eindeutige Umkehrfunktion festlegen. Die Abbildung zeigt den Sinus und einen monotonen Abschnitt, der mit dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ zusammenfällt.



Definitions- und Wertebreiche sind für die Arcus-Funktionen:

Funktion	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$	$\text{arccot}(x)$
Definitionsbereich	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
Wertebereiche	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$(0,\pi)$

Die Herleitung der Ableitungen ist mit der Wunderwaffe "Ableitung der Umkehrfunktion" ganz einfach. Beispielsweise betrachten wir den Arcus-Tangens $f(x) = y = \arctan(x)$ und seine Inverse $g(y) = x = \tan(y)$. Die Ableitung von $x(y)$ kennen wir, sie ist: $\dfrac{1}{\cos^2(y)}$. Mit $(f(x))' = \dfrac{1}{g'(y)}$ folgt:

$$(\tan(y))' = \frac{1}{\cos^2(y)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(y)} = 1 + \tan^2(y) = 1 + x^2 = \frac{1}{(\arctan(x))'}$$

28.4 Übung Wir nehmen $y = f(x) = \arcsin(x)$ und $g(y) = x = \sin(y)$. Mit $\dfrac{dg(y)}{dy} = \cos(y)$. Damit

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\arcsin^2(\sin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin(x))'$$

◁

Für die zwei anderen Funktionen, d.h. $\text{arccot}(x)$ und $\arccos(x)$, sind die Herleitungen auch nicht schwer. Wir verzichten und überlassen dies der oder dem Lesenden.

Satz 28.5. Ableitung Arcusfunktionen

$$\begin{aligned}
(\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für} \quad |x| < 1 \\
(\arccos(x))' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für} \quad |x| < 1 \\
(\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2} \\
(\text{arccot}(x))' &= \frac{-1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

28.6 Übung Wir suchen die Ableitung von $y = \arcsin(x/4)$. Mit Substitution $u = x/4$ folgt mit der Kettenregel $y' = df/du \cdot du/dx$ und

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{1-(x^2/16)}} = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$$

◁

28.4 Ableitungen höherer Ordnung

Wir haben bereits beginnen mit der Übung 28.12 und dann mit 28.13 gezeigt, wie man mehrfach ableiten kann. Die Ableitung ist eine Operation, die eine Funktion in eine andere

Funktion transformiert. Diese Operation kann man mehrmals hintereinenader ausführen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D[f(x)] \\
f''(x) = (f'(x))' &= D[D[f(x)]] \\
f'''(x) = (f''(x))' &= D[D[D[f(x)]]] \\
\ldots &= \ldots \\
f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})' &= D^n[f(x)]
\end{aligned}
$$

In de folgenden Abbildung ist eine Illustration gegeben.

$$
\boxed{2x^3 - x + 1} \xrightarrow{D[f(x)]} \boxed{6x^2 - 1} \xrightarrow{D[g(x)]} \boxed{12x} \xrightarrow{D[h(x)]} \boxed{12}
$$

Man erkennt auch, dass man ein Polynom vom Grad $n = 3$ viermal oder $n + 1$ mal ableiten kann. Dann folgen nur noch Nullen. Anderseits wissen wir, dass die Ableitung z.B. des Sinus der Kosinus ist und die Ableitung des Kosinus der negative Sinus. Die Kreisfunktionen kann man also unendlich viele Male ableiten ohne dass sie verschwinden.

28.4.1 Notation

Wir haben in der Definition 83 schon alles gesetzt. Also z.B. $f''(x)$, $f'''(x)$, $D^2[f(x)]$ etc. Wir möchten aber noch erklären, wieso es bei Leibniz $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ heisst, also der Unterschied zwischen d^2f und dx^2.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&\vdots \\
\frac{d^ny}{dx^n} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{dy}{dx}\right)
\end{aligned}
$$

Bei leibniz hiess es eigentlich df, $d(df)$, $d(d(df)$ usw. Das sind die linearen Anteile von f uns seinen Ableitungen. Sodann hat er die Differentiale auf ein sehr kleine Grösse h bezogen, also $\frac{df}{h}$, $\frac{d(df)}{h^2}$, $\frac{d(d(df))}{h^3}$ usf. oder eben $\frac{d^2f}{h^2}$, $\frac{d^3f}{h^3}$ etc. Zähler und Nenner haben andere Qualitäten.

28.4.2 Zusammenhang mit Reihen**

Differenzreihen

Im Kapitel ?? haben wir schon die Reihe betrachtet, die man folgendermassen darstellen kann

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	1	2	15	52	125	246	...
Δ_1		1	13	37	73	121	...
Δ_2			12	24	36	48	...
Δ_3				12	12	12	e...

Wir hatten herausgefunden, dass die Glieder der direkten Formel

$$a_n = 2n^3 - n + 1$$

gehorchen. Wir könnten die Namen ändern, und hätten z.B. $y = 2x^3 - x + 1$, die Formel, die wir gerade eben abgeleitet haben. Allerdings würden wir verlangen, dass x nur Werte aus der Menge der ganze Zahlen sind. Die Punkte a_n sind eine Teilmenge des Wertebereichs von y mit reellem x.
Wir berechnen Δ_1, indem wir $\Delta_1 = a_n - a_{n-h}$ mit $h = 1$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 2n^3 - \cancel{n} + \cancel{1} - 3(n-h)^3 + (\cancel{n} - h) - \cancel{1} \\
&= \cancel{2n^3} - 2(\cancel{n^3} - 3n^2h + 3nh^2 - h^3) - h \\
&= 6n^2h - 6nh^2 + 2h^3 - h \\
&= {\color{blue}h(6n^2 - 1)} + h^2(-6n + 2h)
\end{aligned}$$

Mit $h = 1$ folgt

$$\Delta_1 = 6n^2 - 6n + 1 = 6n(n-1) + 1$$

Wieso ist ein Teil oben blau eingefärbt? Der Faktor von h könnten wir den *linearen Anteil* von Δ_1 nennen. Nun bestimmen wir Δ_2:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= 6n^2 - \cancel{6n} + \cancel{1} - 6(n-h)^2 + 6(\cancel{n} - h) - \cancel{1} \\
&= 6n^2 - 6(n-h)^2 - 6h \\
&= \cancel{6n^2} - 6(\cancel{n^2} - 2nh + h^2) - 6h \\
&= 12nh - 6h + 6h^2 \\
&= h(12n - 6)) + 6h^2
\end{aligned}$$

Mit $h = 1$ folgt

$$\Delta_2 = 12n$$

Und nun einfach $\Delta_3 = 12n - 12(n-h) = 12h$ mit $h = 1$ dann

$$\Delta_3 = 12$$

Nun machen wir einen Vergleich der verschiedenen Differenzen

	$a_n = 2n^3 - n + 1$	$y = 2x^3 - x + 1$	
Δ_1	$(6n^2 - 1) - 6n + 2$	$6x^2 - 1$	dy
Δ_2	$12n$	$12x$	d^2y
Δ_3	12	12	d^3y

Die Differenzen sind Sekanten, die Ableitungen sind Tangenten.
Polynome sind Linearkombinationen von Monomen, die nach Summanden abgeleitet werden können. Es leuchtet sofort ein, dass ein Polynom vom Grad n, also $P_n(x) = a_0 + a_1x +$

$a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, nach $n+1$ maligem Ableiten die Funktion $\frac{d^{n+1}P_n(x)}{dx^{n+1}} = 0$ ergibt. Analog gilt dies für Differenzen einer arithmetischen Folge vom Grad n: Die $n+1$ Differenzen sind 0.

Satz 28.1. Für eine arithmetische Folge vom Grad n gibt es immer und nur n Differenzreihen.

Ganz analog gilt die Forderung für ein Polynom:

Satz 28.2. Die $n+1$ Ableitung eines Polynoms vom Grad n ist 0.

Es gibt einen weiteren interessanten Zusammenhang für Polynome (Monome):

Satz 28.3. Für das Monom $P(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ gilt:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\right) = n!$$

Es ist definiert, dass $0! = 1$. Dieser Satz kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

Potenzreihen

In Kapitel 23 haben wir ein paar Potenzreihen hergeleitet. Ausgangspunkt war die Vermutung, eine Funktion $f(x)$ lasse sich als $f(x) = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ darstellen. Wir haben dann ersetzt $x \to (x+u)$, ausgerechnet, nach u geordnete, dann $u = 0$ gesetzt und die Koeffizienten verglichen. Z.B. haben wir hergeleitet, dass

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$

Nun gehen wir davon aus, dass die Form $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ hat und damit n mal differenzierbar ist. Es sind also die Ableitungen

$$\begin{aligned}
f'(x) &= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots \\
f''(x) &= 2C + 6Dx + 12Ex^2 + 20Fx^3 + \ldots \\
f'''(x) &= 6D + 24Ex + 60Fx^2 + \ldots \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

Wir setzen $x = 0$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}
f'(0) &= B \\
f''(0) &= 2C \\
f'''(0) &= 6D \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

Damit folgt der Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
A &= f(0) \\
B &= f'(0) \\
C &= f''(0)\frac{1}{2!} \\
D &= f'''(0)\frac{1}{3!} \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

Nun eingesetzt folgt

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Diese Reihe nennt man *MacLaurin-Reihe*. Wir nehmen die exp()-Funktion und setzen ein mit $(\exp(x))' = \exp(x)$ bei $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

wie gehabt. Anstatt um $x = 0$ herum zu entwickeln, kann man auch um h entwickeln, mit dem Resultat

$$f(x) = f(h) + \frac{f'(h)}{1!}(x-h) + \frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2 + \frac{f'''(h)}{3!}(x-h)^3 + \frac{f^{(4)}(h)}{4!}(x-h)^4 + \dots$$

Dieses Gebilde nennt man eine *Taylor-Reihe*. Man muss die Konvergenzradien beachten. Die ersten zwei Glieder der Taylorreihe nennt man *Linearisierung* von f an der Stelle h:

$$f(x) = f(h) + f'(h)(x-h).$$

28.4.3 Geometrische Interpretation der zweiten Ableitung

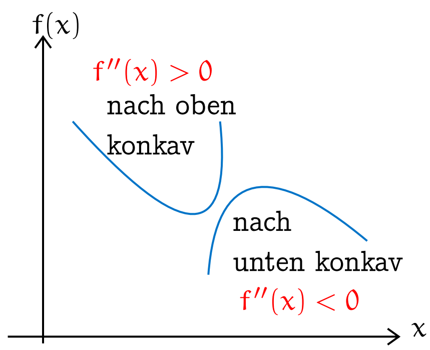
Im Zusammenhang mit der zweiten Ableitung stehen Begriffe wie konkav/konvex oder auch Krümmung der Kurve. Wir machen folgende Setzung.

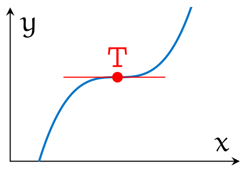
Definition 85. Eine stetig differenzierbare reelle Funktion f ist genau dann *nach oben konkav*, wenn ihre Ableitung dort monoton wachsend ist, d.h. $f''(x) > 0$ gilt. Eine stetig differenzierbare reelle Funktion f ist genau dann *nach unten konkav*, wenn ihre Ableitung dort monoton fallend ist, d.h. $f''(x) < 0$ gilt.

Anmerkung 28.4. Es wird auch anstatt der obigen Begriffe mit nur “konvex” und “konkav” gearbeitet. Dann ist die Meinung, dass

“konkav”	$\Leftrightarrow$	“nach unten konkav” (Berg)
“konvex”	$\Leftrightarrow$	“nach oben konkav” (Tal)

Wir betrachten die Abbildung mit zwei Kurven. Beide Kurven haben zwei “Schenkel”, jeweils links und rechts vom höchsten oder tiefsten Wert. Somit haben wir 4 typische Situationen in der Umgebung dieser zwei speziellen Werte, nämlich “nach unten konkav” mit links negativer Steigung der Funktion und rechts mit positiver Steigung. Analog für die Umgebung “nach unten konkav”. Es handelt sich bildlich gesprochen um die zwei Bergflanken, vom Gipfel oder der Talsohle betrachtet.



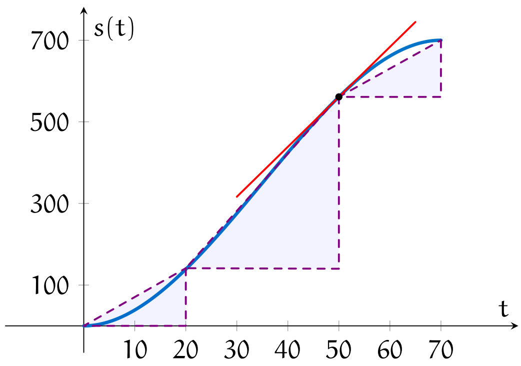


Um im Gebirge zu bleiben: Es gibt auch *Terrassen*, d.h. Gebiete, in die man aufsteigt, es flach wird und dann mit einem Anstieg weitergeht. In der Abbildung ist die Umgebung links des Terrassenpunkts T nach unten konkav und rechts davon nach oben konkav (konvex). Als ganzes betrachtet, ist die Funktion weder konvex noch konkav.

Definition 86. Krümmung Die Krümmung ist die lokale Abweichung einer Kurve von einer Geraden, somit die zweite (und höhere) Ableitungen.

28.4.4 Anwendung Kinematik

Bis hierhin sind die Ableitungen hinsichtlich ihres Nutzens noch nicht begründet worden. Ein alltägliches Beispiel ist der Zusammenhang von Weg und Geschwindigkeit. Wenn wir Auto fahren, so sehen wir auf dem Tachymeter die augenblickliche Geschwindigkeit $v(t)$, diejenige, die gerade jetzt, in t, herrscht. Bei einer Passfahrt ändert sie ständig, auf der Autobahn kann sie lange gleich bleiben. Wenn wir angekommen sind, sehen wir die Fahrzeit und die zurückgelegte Distanz. Daraus bestimmt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$.



Wir betrachten die Wegfunktion eines Trams zwischen zwei Stationen. Diese liegen 700 Meter auseinander. Die Wegfunktion $s(t)$ gibt an, wo sich das Tram zur Zeit t befindet. Sie ist hier

$$s(t) = \frac{6}{14}t^2 - \frac{1}{245}t^3$$

Die Fahrzeit beträgt 70 Sekunden. Damit lässt sich die durchschnittliche Geschwindigkeit berechnen als $\bar{v} = 700/70[m/s] = 10[m/s]$.
Man kann die Durchschnittsgeschwindigkeit auch für Teile des Weges bestimmen. Zum Beispiel sind diese für die ersten 20 Sekunden, die nächsten 30 und die letzten 20. Wir rechnen also für das erste Stück:

$$\bar{v}_1 = \frac{s(20) - s(0)}{20 - 0}$$

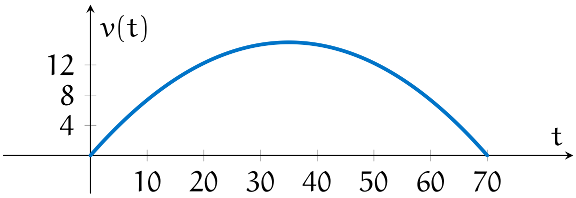
$s(2) = 138.8$ und $s(0) = 0$. Damit $\bar{v}_1 = 138.8/20 = 6.938$ etc.

t	s	$\bar{v}$
$(0, 20)$	138.8 m	6.938 m/s
$(20, 50$	422.4 m	18.71 m/s
$(50, 70)$	138.82 m	6.938 m/s

Wie man aus der Abbildung sieht, entspricht die Durchschnittsgeschwindigkeit der Sekantensteigung.
Wenn man die Sekante zur Tangente macht, indem ein Punkt zum anderen läuft, dann wird die Sekantensteigung zur Tangentensteigung, die man hier dann *augenblickliche Geschwindigkeit* oder *Momentangeschwindikeit* nennt. Damit ist auch klar, dass die Ableitung der Wegfunktion zur Momentangeschwindigkeit $v(t)$ führt. Hier gilt

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = \frac{12}{14}t - \frac{3}{245}t^2$$

(Wir haben zu Ehren von Newton seine Schreibweise hier auch angegeben, die "*Fluxion*" $\dot{s}$.)



Die Abbildung zeigt, dass die Geschwindigkeit parabelförmig ist. Am Anfang startete man bei Null und endet auch dort, an der Haltestelle. Dazwischen nimmt sie bis in die Mitte ständig zu und verlangsamt sich wieder.

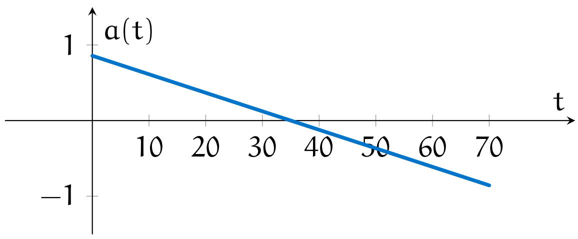
Nun betrachten wir die *Beschleunigung*, die als Änderung der Geschwindigkeit definiert ist. Auch hier kann man zwischen durchschnittlicher und augenblicklicher unterscheiden. Erstere wäre die Sekantensteigung

$$\overline{a} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Interessanter ist die *Momentanbeschleunigung*

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} = \frac{12}{14} - \frac{6}{245}t$$

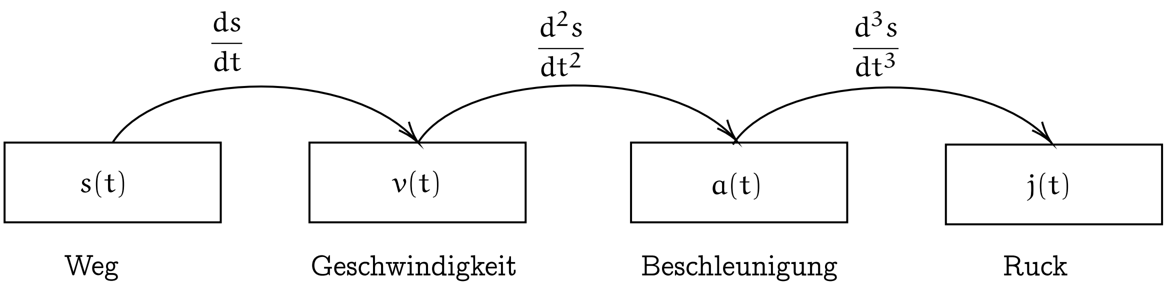
Wie man in der Abbildung sieht, beginnt die Fahrt mit einer hohen Beschleunigung, die ständig abnimmt. Eine negative Beschleunigung, wie etwa beim Bremsen, nennt man *Verzögerung*.



Eine weitere Ableitung, sofern sie existiert, nennt sich *Ruck* und ist einfach :

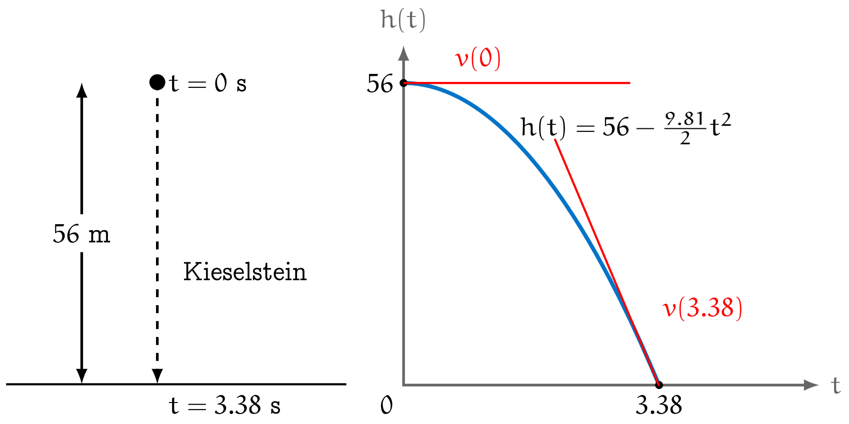
$$j(t) = \frac{da}{dt} = \dddot{s} = \frac{-6}{245}.$$

Ihre Einheit im SI-System ist $[m/s^3]$. Für Bahnen wird ein möglichst geringer Ruck angestrebt.



28.5 Übung Die Wegfunktion h ist gegeben als $h(t) = 56 - \frac{1}{2}gt^2$ dabei ist $g = 9.81[m/s^2]$. Wann ist $h = 0$? Aus der Formel folgt $56 = \frac{1}{2}gt^2$ oder $t^2 = 112/g$ und $t = \sqrt{112/g} = 3.379[s]$. Im weiteren möchten wir die Momentangeschwindigkeit in $t = 0$ und $T = 3.379$ kennen. Die Geschwindigkeit ist $\dot{h} = v = gt$. Somit $v(0) = 0$ und $v(T) = 33.15[m/s]$. Nun bestimmen wir die Beschleunigungsfunktion als $a = \ddot{h} = g$. Sie ist also konstant. ◁

Nun was haben wir analysiert? Es ist der freie Fall einer Masse, z.B. Kieselstein, vom Turm von Pisa, der ca. 56 Meter hoch ist. Im Augenblick des Loslassens ist die Geschwindigkeit noch null. Unter der Wirkung der Erdbeschleunigung trifft der Kiesel mit einer Geschwindigkeit von $33.15[m/s]$ nach $3.379[s]$ auf.



28.6 Übung Für den senkrechten Wurf nach oben gilt das Weg-Zeit-Gesetz $h(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ mit $g = 10[m/s^2]$. Wie hoch kann man mit einer Pistole mit $v_0 = 100[m/s]$ schiessen? Im höchsten Punkt wird die Geschwindigkeit 0. Diese ist als Ableitung der Wegfunktion gegeben, also $\dot{h} = h' = v(t) = v_0 - gt = 0$. Daraus folgt $t = v_0/g = 10[s]$. Damit ist die Höhe $h = 100 \cdot 10 - 10/2 \cdot 10^2 = 1000 - 500 = 500[m]$. ◁

28.5 Mittelwertsatz etc.**

Wir werden drei Sätze der Analysis besprechen, die weitreichende Folgen für die nachfolgenden Abschnitte sind. Es sind drei Sätze, die geometrisch sofort plausibel sind. Diese Sätze sind so evident, dass es ein Euler für gar nicht nötig empfand, sie zu beweisen. Später wurde man rigoroser.
Die Sätze sind sogenannte Existenzsätze, also "es gibt"-Sätze, die aber keine konkrete Bestimmung (Rechenregeln) motivieren.
Alle diesen Sätze ist gemein, dass sie sich auf Werte auf einem Intervall beziehen.

28.5.1 Satz vom Minimum und Maximum

Satz 28.1. Satz vom Minimum und Maximum Es ist f eine reellwertige, stetige Funktion im reellen Intervall $[a, b]$. Dann ist f beschränkt durch ein Minimum bei c und ein Maximum bei d in $[a, b]$ oder formell für jedes $x \in [a, b]$:

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

Anmerkung 28.2. Mit dem Verweis auf die Stetigkeit, sind z.B. vertikale Asymptoten ausgeschlossen, bei denen die Funktionswerte ins Unendliche gehen.

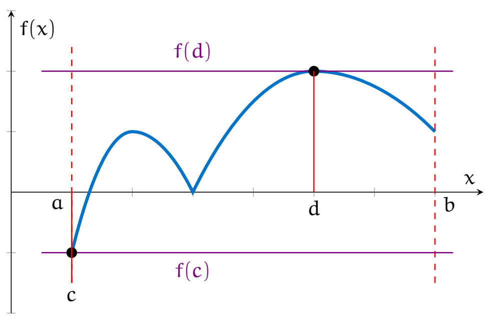


Abbildung 28.1

Wie man in der Abbildung sieht, braucht die Funktion nicht differenzierbar ("knickfrei") zu sein. Sie muss allerdings stetig sein. In diesem Beispiel fällt die untere Grenze a mit der Stelle des Minimums c zusammen. Auf diesem Satz bauen die folgenden auf.

28.5.2 Satz von Rolle

Wir fahren fort mit dem einfach nach Rolle benannten Satz.

Satz 28.3. Satz von Rolle Es sind a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$, f ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

(1) f ist steig auf $[a, b]$,

(2) f ist differenzierbar in (a, b) und

(3) $f(a) = f(b) = 0$,

dann gibt es mindestens eine Zahl c in (a, b), so dass $f'(c) = 0$.

Nochmals in einfacheren Worten: Zwischen zwei Nullstellen einer stetigen und differenzierbaren Funktion gibt es mindestens eine Stelle, wo die Ableitung null wird.

Die Abbildung zeigt die geometrische Darstellung des Sachverhalts. Falls man annimmt, dass $f(x)$ nicht überall 0 ist, dann ist irgendwo bei c in $[a, b]$ entweder $f(c) > 0$ oder $f(c) < 0$. Damit gibt es schon entweder eine Maximum oder ein Minimum. Da nach Vorausssetzung die Funktion f differenzierbar ist, hat sie also keine Knicke. Im Maximum oder Minimum muss deshalb die Ableitung 0 werden.

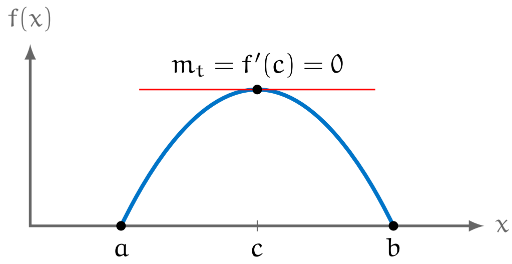


Abbildung 28.2

28.5.3 Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz ist wieder ein Zusammenhang zwischen Sekante und Tangente, resp. ihrer Steigungen. Um am konkreten Beispiel zu bleiben, geht es um den Zusammenhang von augenblicklicher und durchschnittlicher Geschwindigkeit.

Satz 28.4. Mittelwertsatz Es sind a b zwei reelle Zahlen mit $a < b$, f ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

(1) f ist stetig im Intervall $[a, b]$ und

(2) f ist differenzierbar in $J = (a, b)$.

Dann gibt es mindestens eine Zahl c in J, so dass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

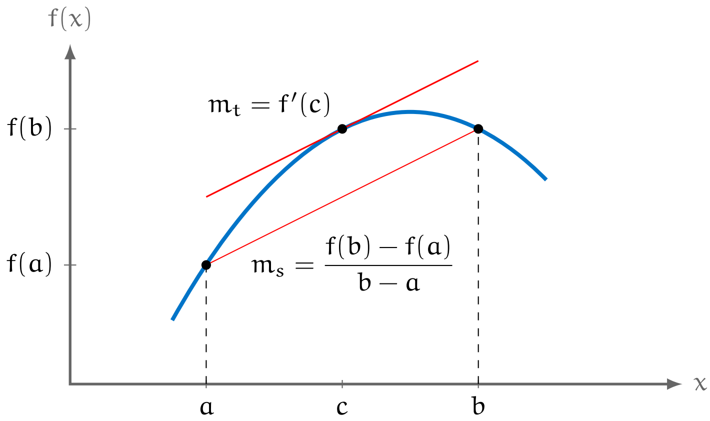
Man kann diesen Satz auf den Satz von Rolle zurückführen, indem man h bildet als $f - g$ und g die Gerade der Sekante ist

$$g(x) = m_s(x - a) + f(a) \quad \text{mit} \quad m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

für $x \in [a, b]$ definiert ist. Damit hat $h(x)$ bei a und b Nullstellen. Es existiert folglich ein $c \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(c) = f'(c) - m_s.$$

Die Abbildung zeigt die Aussage grafisch.



28.5 Übung Als konkrete Anwendung des Mittelwertsatzes zeigen wir, dass gilt: $\sin(x) \leqslant x$ für alle $x \geqslant 0$. Der Grenzfall $x = 0$ führt einfach zu $\sin(0) = 0 \leqslant 0$. Deshalb betrachten wir nun $x > 0$. Der Mittelwertsatz postuliert, dass es ein c im Intervall $(0, x)$ gibt, so dass $f(x) = \sin(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(c) \\ &\Rightarrow \quad \sin(x) = x \cos(c) \leqslant x \cdot 1 \\ &\Rightarrow \quad \sin(x) \leqslant x \end{aligned}$$

Weil $\cos(c) \leqslant 1$ und $x > 0$ ist. ◁

28.5.4 Weitere Sätze

Diese zwei Sätze haben wir schon in Kapitel 22? behandelt.

Satz 28.6. Zwischenwertsatz Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, für die $f(a) = A$ und $f(b) = B$ ist, nimmt in diesem Intervall jeden zwischen A und B gelegenen Wert mindestens einmal an.

Daraus folgt

Satz 28.7. Nullstellensatz Nimmt eine auf einem Intervall stetige Funktion für zwei Argumente x_1 und x_2 dieses Intervalls Werte mit verschiedenem Vorzeichen an, so nimmt die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens einmal den Wert Null an.

28.6 Kurvendiskussion

28.6.1 Extremwerte

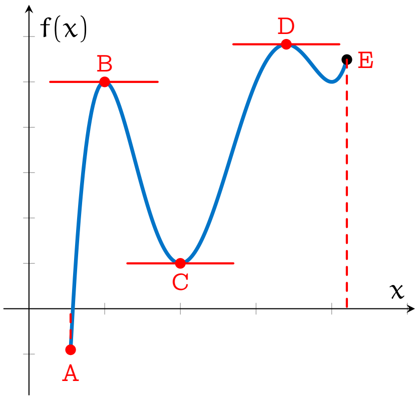
Wir gehen nun zu den Begriffen über, welche notwendig sind. Die intuitive Begriffe wie Maximum und Minimum müssen geschärft werden.

Definition 87. Ein *Extremwert* oder *Extremum* (plural Extrema) ist der Oberbegriff für ein lokales oder globales Maximum oder Minimum.

Definition 88. Ein *lokales Maximum* bzw. *lokales* Minimum ist der Wert der Funktion an einer Stelle x_0, wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung $|x - c| < \delta$ die Funktion keine grösseren bzw. kleineren Werte annimmt.

Definition 89. Ein *globales* Minimum einer Funktion $f(x)$ an der Stelle c liegt vor, wenn $f(c) \leqslant f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Ein *globales* Maximum einer Funktion $f(x)$ an der Stelle c liegt vor, wenn $f(c) \geqslant f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.



In der Abbildung sind die Begriffe anhand einer auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkten Funktion dargestellt. Man erkennt, das globale Minimum bei A, ein lokales Maximum bei B, ein lokales Minimum bei C, ein globales Maximum bei D. Extrema können auch am Rand liegen.

Anmerkung 28.1. Es gibt immer ein globales Maximum und ein globales Minimum. Lokale Extrema sind nicht zwingend.

Bestimmen der Extrema

Wir berücksichtigen nur differenzierbare Funktionen, also solche, die überall im Definitionsbereich und somit auch einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ eine Ableitung besitzen.

Definition 90. Kurvenpunkte, bei denen die Ableitung null ist, heissen *stationäre Punkte* (auch kritische Punkte genannt).

In der Abbildung sind stationäre Punkte eingezeichnet. Zum einen sind dies lokale Extrema, also ein Minimum C und ein Maximum A, und ein Terrassenpunkt bei B. Wenn man geistig mit einem Lineal die Tangente darstellt und die Kurve entlang fährt, so sieht man, dass bei A und C das Vorzeichen der Steigung wechselt, von positiv zu negativ bei A und von negativ zu positiv bei C. In B bleibt die Steigung positiv, berührt aber die Null. Die Änderung der Steigung ist die zweite Ableitung, was wir in Abschm. 28.4.3 schon bemerkt haben: Berg=Maximum $\Rightarrow f''(x) < 0$ und Tal=Minimum $\Rightarrow f''(x) > 0$.

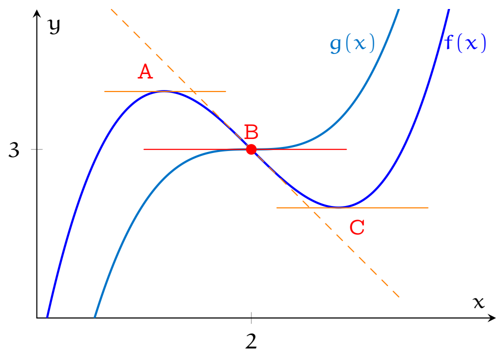


Abbildung 28.3

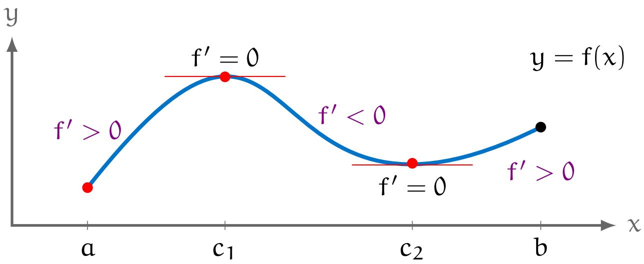
Satz 28.2. Ist eine Funktion f zweimal differenzierbar, und gilt neben $f'(c) = 0$ auch $f''(c) \neq 0$, so hat f an der Stelle c ein lokales Extremum, und

(1) ist $f''(c) > 0$, handelt es sich um ein *lokales Minimum*,

(2) für $f''(c) < 0$, dagegen um ein *lokales Maximum*.

Anmerkung 28.3. Diese Folgerung ist *hinreichend*, aber nicht notwendig. Das heisst, alle Punkte, die den Satz erfüllen, sind Extremwerte, aber nicht alle Extremwerte erfüllen diesen Satz! Es gibt auch Extrema, für die $f''(c) = 0$ gilt. (Wie Abb. 28.1 zeigt, kann es auch Extrema geben bei Funktionen, die nicht zweimal differenzierbar sondern nur stetig sind.)

Wir betrachten die Abbildung mit dem Vorzeichen der Tangentensteigung. Nun sieht man z.B. vor dem Maximum bei $x = c_1$, dass die Steigung $f'(x) > 0$ ist, und dass sie rechts von c_1 dann negativ wird. Bei $x = c_1$ ist sie genau null. Anderseits ist die Steigung vor dem Minimum bei $x = c_2$ vorher negativ und dann positiv. Im Punkt selber ist sie null.



Was ist aber mit dem stationären Punkt $f'(x) = 0$, wo $f''(x) = 0$ gilt? Eine Antwort gibt Abb. 28.3: Es ist ein *Terrassenpunkt*.

28.4 Übung Wir suchen die Extrema von $f(x) = 3x - x^3$. Wir leiten ab und erhalten $3 - 3x^2$. Wir setzen gleich null und erhalten $1 - x^2 = 0$ und damit $x = \pm 1$. Das sind zwei stationäre Punkte. Ob sie auch Extrema sind, weiss man noch nicht mit Sicherheit. Die zweite Ableitung ist $f''(x) = -2x$. Setzt man die stationären x-Werte ein, so folgt $f''(1) = -2 < 0$, also Maximum und $f''(-1) = 2 > 0$ also Minimum. ◁

Spezialfall

Wir müssen noch den Spezialfall betrachten, bei dem $f'(x) =$ und $f''(x) = 0$ ist. Es gibt nur zwei Möglichkeiten: entweder ein Extremum oder ein Terrassenpunkt.

28.5 Übung Wir schauen uns die Funktion $f(x) = x^6 + 5$ an. Die erste Ableitung $f'(x) = 6x^5$ ist bei $x = 0$ gleich 0. Die zweite $f''(x) = 30x^4$ ergibt $f''(0) = 0$. Desweitern $f'''(0) = 120x^3 = 0$, $f^{(4)}(0) = 360x^2 = 0$, $f^{(5)}(0) = 720x = 0$ und zuletzt $f^{(6)}(0) = 720 \neq 0$. Die 6. Ableitung ist nicht null. ◁

An diesem Beispiel kann man die allgemeine Regel für den Fall von $f''(c) = 0$ anwenden, die da lautet

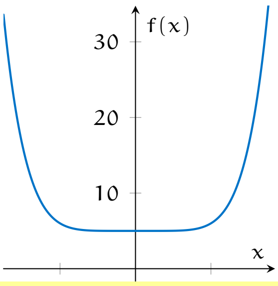
Satz 28.6. Für eine reellwertige im Intervall J genügend oft differenzierbare Funktion $f(x)$ mit stationärem Punkt c und mit Ableitungen in c, die erst bei der Ordnung $n + 1$ nicht mehr null sind, gilt:

(1) ist n ungerade und

- $f^{(n+1)}(c) < 0$, dann ist $f(c)$ ein lokales Maximum,
- $f^{(n+1)}(c) > 0$, dann ist $f(c)$ ein lokales Minimum

(2) ist n gerade, dann ist $f(c)$ ein Terrassenpunkt.

Wichtig 14. ☠ Häufig ist schon $f'''(c) \neq 0$ und dann ist c ein Terrassenpunkt (gilt auch allgemein für Wendepunkte). ⊣



Wir wenden den Satz auf das Resultat von Übung 28.5 an. Wir haben $n+1=6$, also $n=5$, ungerade. Die sechste Ableitung ist grösser als 0, womit $f(c)$ ein lokales Minimum sein muss. Wir verifizieren anhand der Graphik. Eigentlich hätte man das ahnen können, denn eine gerade Potenzfunktion ist symmetrisch. Auch wenn häufig der Satz 28.2 schon greift, ist Satz 28.6 natürlich allgemeiner.

28.7 Rezept Finden von globalen Extrema
Die Funktion $f(x)$ ist auf dem Intervall J definiert. Nun gibt es zwei Fälle:

(1) **Das Intervall J ist abgeschlossen**: Das globale Maximum von f befindet sich entweder im Innern als lokales Maxium oder bei einer Intervallgrenze. Die Intervallgrenzen müssen immer kontrolliert werden.
Analog für das Minimum, lokale Minima und Intervallgrenzen betrachten.

(2) **Das Intervall ist nicht abgeschlossen und hat nur einen stationären Punkt** c: Falls am stationären Punkt ein lokales Maximum vorliegt, ist es ein globales, falls am stationären Punkt ein lokales Minimum vorliegt, ist es ein globales Minimum.

28.6.2 Terrassen- und Wendepunkte

Definition 91. Terrassenpunkt Als *Terrassenpunkt* (auch *Sattelpunkt* oder *Horizontalwendepunkt*) bezeichnet man einen stationären Punkt, der kein Extremum ist.

28.8 Übung Wir analysieren die Funktion $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$. Die erste Ableitung ist $f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)$. Die zweite Ableitung ist $f''(x)=20x^3-60x^2+30x=10x(2x^2-6x+3)$.
Aus der ersten Ableitung mit $f'(x)=0$ bestimmen wir die stationären Punkte. In der ausgeklammerten Form ist sofort $x_1=0$ eine (zweifache) Nullstelle. Sodann

$$x^2-4x+3=(x-2)^2-4+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=\pm\sqrt{1}$$

und damit $x_{2,3}=\{1,3\}$. An diesen Stellen berechnen wir die zweite Ableitungen: für $x_1=0$ folgt $f''(x_1)=0$, für $x_2=1$ folgt $f''(1)=-10$ und $f''(3)=30(18-18+3)=90$.
Daraus schliessen wir: (1) lokales Maximum bei $x=3$ mit $f(3)=-26$, (2) lokales Minimum bei $x=1$ mit $f(1)=2$ und (3) für $x_1=0$ müssen wir weiter ableiten, bis die Ableitung nicht mehr gleich 0 ist. Also $f'''(0)=60x^2-120x+30=30$. Gemäss Satz 28.6 ist $n+1=3$ und damit $n=2$, gerade. Deshalb ist bei $x=0$ ein Terrassenpunkt. ◁

Wendepunkt

Da der Terrassenpunkt auch Horizontalwendepunkt heisst, kann man erahnen, dass es auch andere Wendepunkte geben muss, die nicht horizontal sind. Somit ist der Terrassenpunkt ein Spezialfall des Wendepunkts. Etwas salopp könnte man definieren:

Definition 92. Ein *Wendepunkt* ist ein Punkt auf einer Kurve $f(x)$, an dem die Kurve ihr Krümmungsverhalten ändert: Sie wechselt hier entweder von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt.

Anmerkung 28.9. Die Krümmung ist die lokale Abweichung einer Kurve von einer Geraden, somit die zweite oder höhere Ableitung, die nicht null ist.

Die Bestimmung des Wendepunkts schliesst an die Überlegungen zum Terrassenpunkt an, mit der Ausnahme, dass nicht mehr $f'(c) = 0$ gefordert wird. Der Wendepunkt ist kein stationärer Punkt. Somit ist $f''(c) = 0$ massgebend mit den weiteren Kriterien nach Satz 28.6. Denn den Wendepunkt muss man von den Extrema trennen.

28.10 Übung Wir schauen uns mal die Funktion $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$ an. Die zweite folgt aus der ersten, also $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ und $f''(x) = 2x - 4$. Somit folgt aus $f''(c) = 0$ dann $c = 2$. Wir brauchen $f'''(x) = 2$ und schliessen, wie für den Terrassenpunkt: $n + 1 = 3$, $n = 2$ ist gerade, also Wendepunkt. $\triangleleft$

28.11 Übung Wir suchen die Wendepunkte von $f(x) = 0.25x^4 - 3.5x^3 - 45x^2 + x + 1$. Erste Ableitung $f'(x) = 1x^3 - 10.5x^2 - 90x + 1$, zweite $f''(x) = 3x^2 - 21x - 90$ und dritte $f'''(x) = 6x - 21$. Zweite nullsetzen führt zu $3x^2 - 21x - 90 = 0$, mit 3 kürzen, quadratisch ergänzen $(x - 7/2)^2 - 49/4 - 30 = 0$ und $(x - 7/2)^2 = (120 + 49)/4$ und $x - 7/2 = \pm 13/2$ womit $x_{1,2} = 3.5 \pm 6.5 = \{10, -3\}$. Wir untersuchen $f'''(x_1) = 60 - 21 = 30 \neq 0$, es ist eine Wendestelle, und $f'''(-3) = -18 - 21 = -39 \neq 0$ ist auch Wendestelle. $\triangleleft$

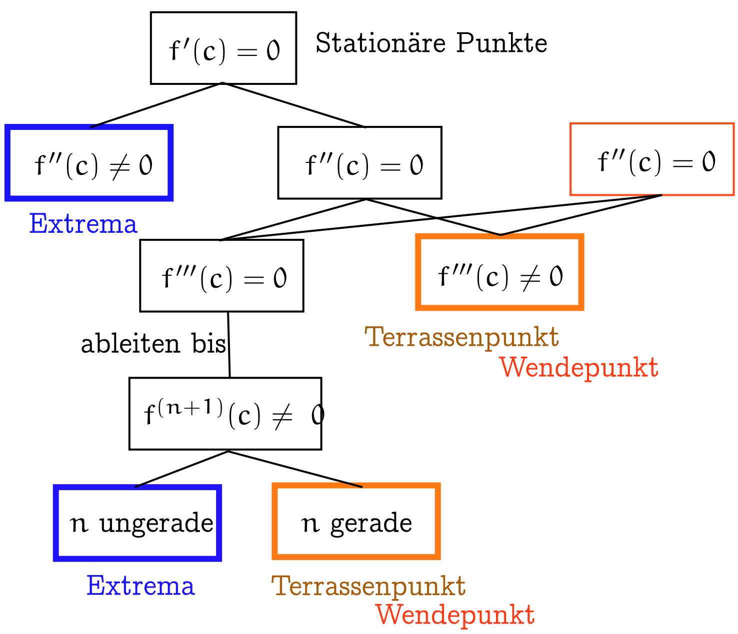
Wendetangente

Beim Terrassenpunkt ist die Wendetangente die Horizontale, die durch den Terrassenpunkt geht. Bei allgemeinen Wendepunkt ergibt sich die sogenannte Wendetangente als Tangente im Wendepunkt c. Also $t : y = f'(c)x + b$. Wir setzen das Beispiel fort mit $f'(2) = 4 - 8 + 3 = -1$. Wir bestimmen den Funktionswert $f(c) = f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = \frac{2}{3}$. Wir müssen noch b aus $\frac{2}{3} = -1 \cdot 2 + b$ bestimmen, also $b = 2/3 + 2 = 8/3$. Die Tangente ist

$$t: \qquad y_t = -1 \cdot x + \frac{8}{3}.$$

Formel 28.12. Wendetangente Im Wendepunkt c ist die Wendetangente

$$t_W: \quad y_{Wt} = f'(c)(x - c) + f(c)$$



Das Schema sieht ein bisschen kompliziert aus. Will man Extreme finden, so beginnt man mit $f'(x) = 0$, will man Wendestellen finden, dann mit $f''(x) = 0$. Ist $f''(c) \neq 0$ ist alles klar, falls aber $f''(c) = 0$ geht die Suche weiter, es kann Extremum oder Wendepunkt sein. Man leitet solange ab, bis $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ wird und entscheidet anhand von n. Man teste dies am Beispiel $f(x) = x^5 - x^4$ und $c = 0$. Erst $f^{(5)}(c) = 5! \neq 0$, also $n = 4$, also Wendepunkt und Terrassenpunkt. Wie viele Male kann man ableiten? Bis $f^{(m)}(x) = 0$ ist (man unterscheide $f^{(m)}(x)$ und $f^{(m)}(c)$).

28.6.3 Regel von de L'Hôpital

Wir wiederholen diesen kurzen Abschnitt aus Kapitel 22.

Es kann sein, dass der Grenzwert vordergründig eine sogenannte *unbestimmten Ausdruck* annimmt, wie etwa $\frac{0}{0}$. Dann kann man folgende Regel, falls die Voraussetzungen gegeben sind, anwenden.

Satz 28.13. Falls f und g zwei Funktionen sind, die im Intervall $[a, b[$ definiert und ableitbar sind, und für die gilt $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anmerkung 28.14. Die Regel kann auch mehrfach Anwendung finden, wenn die Ableitungen auch den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annehmen.

28.15 Übung Wir betrachten den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$. Schnell erkennen wird, dass der uneigentliche Fall von $\frac{0}{0}$ vorliegt. Der Zähler abgeleitet nach x ergibt e^x, der Nenner 1. Somit gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

$\triangleleft$

Für den unbestimmten Grenzwert $\frac{\infty}{\infty}$ gilt das folgende.

Satz 28.16. Es sind die Funktionen f unf g differenzierbar im Intervall $]a, b[$ und $g(x) \neq 0$. Falls $\lim\limits_{x \to a} f = \lim\limits_{x \to a} g = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'}{g'} = \ell$, dann $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f}{g} = \ell$.

Anmerkung 28.17. Die Bedingungen sind nur hinreichend aber nicht notwendig. Das heisst es gibt Fälle, welche diese Regel nicht erreicht.

28.6.4 Zusammenstellung

Definition 93. Unter *Kurvendiskussion* verstehen wir die Untersuchung und Feststellung der Funktionseigenschaften und des Funktionsverlaufs mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung.

28.18 Rezept Kurvendiskussion Wir empfehlen, die Diskussion einer Funktion nach dem folgenden Eigenschaften vorzunehmen:

(1) Definitionsbereich / Definitionslücken,

(2) Symmetrie (gerade, ungerade Funktion),

(3) Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse,

(4) Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden),

(5) Ableitungen (in der Regel bis zur 3. Ordnung),

(6) Relative Extremwerte (Maxima und Minima),

(7) Wendepunke, Sattelpunkte,

(8) Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen,

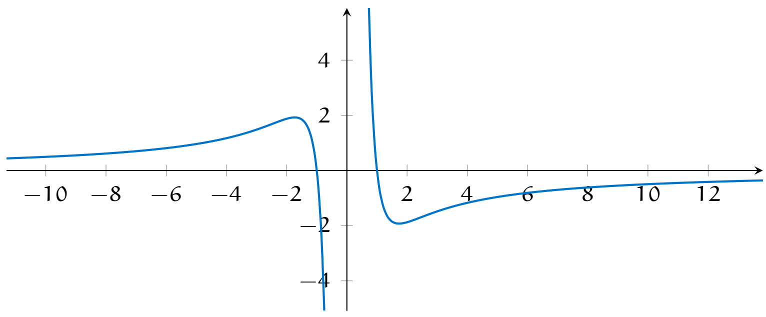
(9) Wertebereich der Funktion,

(10) Evtl. Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Massstab.

Anmerkung 28.19. Die Kurvendiskussion vereinfacht sich erheblich, wenn man die Funktion zeichnen kann. Mit der Einführung von graphikfähigen Taschenrechnern hat sich die Bedeutung der Kurvendiskussion relativiert.

28.20 Übung Wir diskutieren nach Rezept die Funktion $f(x) = \dfrac{-5x^2+5}{x^3}$.

- Definitionsmenge: Es ist $D = \mathbb{R} \setminus 0$, Lücke bei $x = 0$
- die Funktion ist ungerade, denn höchster Exponent 3; also punktsymmetrisch
- Nullstellen $-5x^2 + 5 = 0$, $x^2 = 1$, $x1, 2 = \pm 1$, also zwei Nullstellen, die keine Pole (Nullstellen des Nenners) sind.
- Polstelle bei $x = 0$,
- Ableitungen $f' = -10x \cdot x^{-3} + (-5x^2 + 5)(-3)x^{-4} = 5x^{-2} - 15x^{-4}$, $f'' = -10x^{-3} + 60x^{-5} = 10x^{-3}(6x^{-2} - 1)$, $f''' = 30x^{-4} - 300x^{-6}$
- Stationäre Punkte in D: $f' = 0 = 5x^{-2} - 15x^{-4}$, $1 - 3x^{-2} = 0$ daraus $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. Extrema: $f''(x_3 = \sqrt{3}) = 10x^{-3}(6x^{-2} - 1) > 0$ also x_4 lokales Minimum, $f''(x_4 = -\sqrt{3}) = 10x^{-3}(6x^{-2} - 1) < 0$ lokales Maximum
- Wendepunkt: $f'' = 0$ und $f''' \neq 0$, $10x^{-3}(6x^{-2} - 1) = 0$, daraus $x^2 = 6$ und $x_{5,6} = \pm\sqrt{6}$, $f'''(x_5) = 30(1/36 - 10/216) \neq 0$, $f'''(x_6) = 30(1/36 - 10/216) \neq 0$, also zwei Wendestellen bei $x_{5,6}$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-5x^2+5}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, horizontale Asymptoten $y = 0$
- Wertebereich $y \in (-\infty, \infty)$.

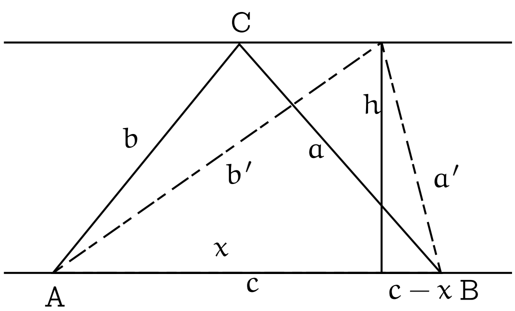


◁

28.7 Optimierung

Den Griechen war schon bekannt, dass eine Strecke die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, dass ein Bogen des Grosskreises die kürzeste Kurve auf einer Kugel ist, dass der Kreis unter den geschlossenen Kurven gleicher Länge die grösste Fläche einschliesst oder unter den Körpern gleicher Oberfläche die Kugel das grösste Volumen umschliesst. Diese Erkenntnisse kann man aus dem Verhalten der Funktionen herleiten.

Definition 94. Optimierungsproblem Bei einem *Optimierungsproblem* werden die Elemente aus der Menge von zulässigen Lösungen $x \in \Omega$ mit einer Zielfunktion $f(x)$ bewertet (berechnet) und je nach Fragestellung entweder die Lösung mit dem maximalen Zielwert (Maximierungsproblem) oder mit dem minimalen Zielwert (Minimierungsproblem) bestimmt.

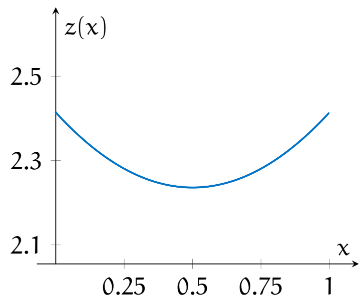


Wir wählen ein Anschauungsbeispiel: Gesucht ist der minimale Umfang eines Dreiecks bei gegebener Grundseite c und Höhe h. Die Fläche ist $F = \frac{1}{2}ch$. Gesucht wird also $z = a + b \to \text{Min!}$ unter den zulässigen Lösungen. Wir führen $x \in [0, c]$ ein, damit vernachlässigen wir überstumpfe Dreiecke, und bestimmen a und b mit dem Pythagoras: $a^2 = (c-x)^2 + h^2$ und $b^2 = x^2 + h^2$ und damit

$$z(x) = \sqrt{(c-x)^2 + h^2} + \sqrt{x^2 + h^2}$$

Wir haben nun eine Zielfunktion $z(x)$. Mit dem Satz von Minimum und Maximum wissen wir, dass ein Maximum und Minimum existieren. Eine Kurve ist wie ein Geländeverlauf: Auf dem Gipfel geht es nicht mehr höher, vor und zurück steigt man ab. Damit ist die Steigung der Tangente null. In der Talsohle gehts nicht weiter runter, vor und zurück steigt man auf. Auch hier ist die Tangentensteigung, die Ableitung, null.

Wir zeichnen die Kurve auf für $h = c = 1$ und erkennen, dass das Minimum bei $x = 0.5$ liegt. Ebenso sehen wir, dass dort die Tangente eine Waagrechte ist, also $z'(x) = 0$. Geometrisch heisst das Resultat, dass das gleichschenklige Dreieck den kleinsten Umfang hat bei gegebener Höhe und Grundseite.



Wichtig 15. Bei den Optimierungsproblemen geht es darum, die Extremwerte der Zielfunktion zu finden. ⊣

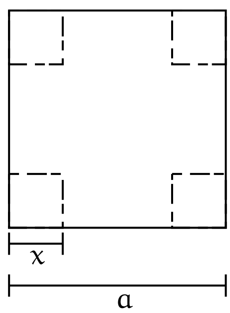
28.1 Übung Finde die Seitenlängen eines Rechtecks mit gegebenem Umfang U, sodass die Fläche maximal wird. Der Umfang ist mit den Seiten a und b: $U = 2a + 2b$. Die Fläche berechnet sich als $F = a \cdot b$. Wir isolieren $b = U/2 - a$ und setzen in die Flächenformel ein: $F(a) = a(U/2 - a)) = Ua/2 - a^2$. Wir leiten nach a ab und erhalten $F'(a) = U/2 - 2a = 0$ und daraus $a = U/4$. Dann $b = U/2 - a = U/2 - U/4 = U/4$. Wie man sieht, ist das Flächenverhältnis beim Quadrat am besten. ◁

Anmerkung 28.2. In einigen Beispielen tritt eine quadratische Gleichung als zu optimierende auf. Nun kennen wir die Scheitelform der Parabel, die ja die Koordinaten des Scheitels direkt liefert. Der Scheitel ist das Extremum der quadratischen Gleichung. Wir nehme von obiger Übung die Gleichung (mit x anstatt a): $F(x) = Ux/2 - x^2$ umgeschrieben in Scheitelform (quadratisches Ergänzen) führt zu $F(x) = -(x^2 - Ux/2) = -((x - U/4)^2 - U^2/16)$. Die Koordinaten des Scheitels sind $S = (U/4, U^2/16)$. Bei $x_S = U/4$ ist das Maximum mit dem Wert $y_s = U^2/16$.

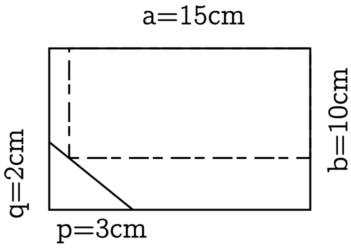
Formel 28.3. Quadratisches Ergänzen, Scheitelformel

$$x^2 \pm bx + c = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$
$$S = \left(\pm\frac{b}{2}, c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$$

28.4 Übung Aus einem quadratischen Blechstück soll ein nach oben offener Kasten hergestellt werden, indem die vier Ecken weggeschnitten und die Seiten hochgebogen werden. Es soll der Kasten mit maximalem Volumen entstehen. Das Volumen V ist Höhe mal Grundfläche, hier Höhe x und Grundfläche $F = (a - 2x)^2$. Zusammen also $V(x) = x(a - 2x)^2$. Extrema sind bei $V'(x) = 0$ zu finden. Wir berechnen $V'(x) = (x(a^2 - 4ax + 4x^2))' = (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)' = a^2 - 8ax + 12x^2$.



Null setzen: $0 = 12x^2 - 8ax + a^2$ und $0 = x^2 - 2/3ax + a^2/12 = (x - 1/3a)^2 - 1/9a^2 + a^2/12$. Damit $(x - 1/3a)^2 = a^2(1/9 - 1/12) = a^2(4 - 3)/36 = a^2/36$. Radizieren $x - 1/3a = \pm a/6$ und $x = a(1/3 \pm 1/6) = a(2 \pm 1)/6 = \{a/2, a/6\}$. Die Lösung $x = a/2$ ist unsinnig, denn damit würde das Blech einfach durch die Mitte geschnitten. Mit der anderen Lösung resultiert eine Volumen von $V = a(a - a/3)^2/6 = a(2/3a)^2/6 = a^3\frac{4}{54} = a^3\frac{2}{27}$. ◁

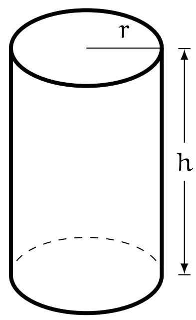


28.5 Übung Einer Glasplatte mit den Seiten a=15cm und b=10cm ist eine Ecke abgesprungen mit p=3cm und q=2cm. Es soll aus dem Teil ein möglichst grosses Rechteck herausgeschnitten werden. Die neue Kante bei der abgebrochenen Ecke kann als Geraden $y = -\frac{2}{3}x + 2$ dargestellt werden, wenn man den Ursprung in der unteren linken (fehlenden) Ecke wählt. Die Fläche ist dann $F = (a-x)(b-y) = (a-x)(b+2/3x-2) = a(b-2)+2/3ax - x(b-2) - 2/3x^2$. Wir leiten die Fläche nach x ab: $F' = 2/3a - (b-2) - 4/3x = 0$. Daraus folgt für x: mit 3 multiplizieren $2a - 3b + 6 - 4x = 0$ und $4x = 2a - 3b + 6$ und endlich $x = \frac{1}{4}(2a - 3b + 6)$. Mit Zahlen $x = \frac{1}{4}(30 - 30 + 6) = 1.5$cm. Mit unserer Gerade folgt $y = -2/3 \cdot 3/2 + 2 = 1$. Damit folgt die optimale Fläche $F = (15-1.5)(10-1) = 13.5 \cdot 9 = 121.5 cm^2$. ◁

28.6 Übung Von der Post sind folgende Vorschriften für Pakete gegeben: Die Summe von Höhe, Breit und Länge darf 90cm nicht übersteigen, die Breite nicht 60cm. Bei welchen Massen wird das Volumen am grössten, wenn (a) $b = l$ und (b) $b = n \cdot l$? (a) Für das Volumen gilt: $V = bhl$, für die Randbedingungen $b + h + l \leqslant 90$ und $b \leqslant 60$. Es ist offensichtlich, dass man die Masse maximal verwenden muss, also $b + h + l = 90$. Mit $b = l$ folgt: $V = b^2 l$ und $2b + h = 90$ oder $h = 90 - 2b$, eingesetzt $V = b^2(90 - 2b)$. Daraus, mit Produktregel zur Abwechslung $V'(b) = 2b(90-2b) - b^2(2) = 0$ oder (durch b dividieren) $0 = 2(90-2b) - 2b = 180 - 6b$, $b = 180/6 = 30$. Somit ist das Päckchen ein Quader mit Seitenlänge 30cm.

(b) Nun wird $b+h+nb = 90$ und $h = 90-b(n+1)$. Das Volumen $V = b\cdot(90-b(n+1))b/n$ oder schöner $V = [90b^2 - b^3(n11)]/n$, abgeleitet $V' = [180b - 3b^2(n+1)]/n$, null gesetzt und gekürzt $0 = 60 - b(n+1)$ somit $b = 60/(n+1)$. Es folgt $l = 60n/(n+1)$ und $h = 90 - 60(1+n)/(n+1) = 90 - 60 = 30$. ◁

28.7 Übung Eine zylindrische Cola-Dose soll bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche haben, und so den Materialverbrauch minimieren. Der Inhalt sei 1/3 Liter.



Das Volumen der Dose ist Grundfläche mal Höhe, also $V = \pi r^2 h$. Die Oberfläche F besteht aus Mantel plus Boden und Deckel, also $F = 2\pi r \cdot h + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi(rh + r^2)$. Wir suchen $F' = 0$, haben aber die Variablen h, r und die Konstante V. Wir isolieren $h = V/(\pi r^2)$ und setzen ein:

$$F(r) = 2\pi(r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + r^2) = 2(\frac{V}{r} + \pi r^2)$$

Ableiten und null setzen

$$F'(r) = \frac{-V}{r^2} + 2\pi r = 0$$

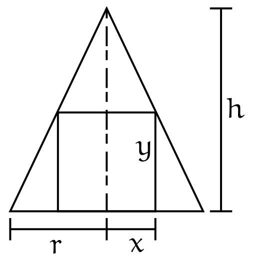
Daraus folgt für r:

$$r^3 = \frac{V}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

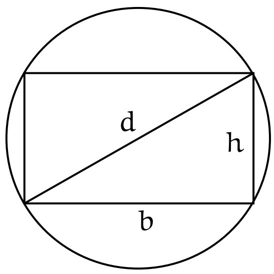
Damit folgt für h:

$$V = r^3 \cdot 2\pi = \pi r^2 h \qquad \Leftrightarrow \qquad h = r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

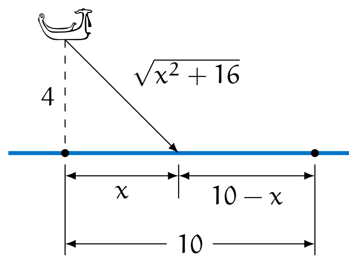
Bis hierhin haben wir nur die erste Ableitung verwendet, haben also einen stationären Punkt betrachtet. Intuitiv ist es ein Minimum, denn allgemein wissen wir, dass die Kugel das beste Verhältnis zwischen Oberfläche und Inhalt hat und andere Körper, die am "kugelförmigsten" sind, ebenfalls diese Eigenschaft haben. Dennoch, wir leiten nochmals ab: $F''(r) = 2\pi + 2Vr^{-3} > 0$ und sehen damit, dass es ein Minimum ist.
In der Realität sind die Dosen aber nicht optimal, d.h. $r = h$, sonder $r < h$. Es sind also noch andere Faktoren im Spiel, d.h. die Zielfunktion deckt nicht alle Aspekte ab, wie z.B. Handhabbarkeit für Kinderhände usw. $\triangleleft$



28.8 Übung Es soll einem geraden Kegel mit Höhe h und Radius r ein gerader Zylinder mit maximalem Volumen V eingepasst werden. Das Volumen des Zylinders ist $V = \pi x^2 y$. Anderseits gilt nach dem Strahlensatz, dass $(h - y) : x = h : r$. Damit folgt $h - y = xh : r$ und $y = h - xh/r$. Es wird damit $V = \pi x^2 h(1 - x/r) = \pi h(x^2 - x^3/r)$. Ableiten (und weglassen der Konstanten): $V' = 2x - 3x^2/r = 0$ oder $2rx = 3x^2$ und $2r = 3x$ woraus $x = 2/3r$. Zur Kontrolle noch $V''(x) = 2 - 6x < 0$, also Maximum. $\triangleleft$



28.9 Übung Aus einem zylindrischen Baumstamm mit Durchmesser d soll ein Balken grösster Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit berechnet sich als $T = \gamma \cdot b^2 h$, mit b Breit, h Höhe und γ eine Materialkonstante. Es gilt nach Pythagoras $b^2 = d^2 - h^2$. Damit wir $T = \gamma(d^2 - h^2)h$ die Zielfunktion. Einmal abgeleitet nach h: $T'(h) = d^2 - 3h^2 = 0$ oder $h^2 = d^2/3$ woraus $h = d/\sqrt{3}$. Damit folgt $b^2 = d^2 - d^2/3 = 2d^2/3$ und $b = d\sqrt{2/3} = d\sqrt{6}/3$ $\triangleleft$



28.10 Übung Ein Boot ist 4km von der geraden Küstenline entfernt und 10km versetzt zum Zielort. Der Ruderer möchte den Zielort möglichst schnell erreichen. Er kann 8km/h schnell rudern oder 10km/h an der Küste laufen. Wo sollte das Boot anlanden?
Die Zielfunktion ist die Reisezeit $T = t_1 + t_2$ und $t_1 = s_1/v_1 = \sqrt{x^2+16}/8$ und $t_2 = (10 - x)/10$, zusammen $T = \sqrt{x^2+16}/8 + (10 - x)/10$. Wir leiten ab:

$$T' = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+16} \cdot 8} - 0.1 = 0$$

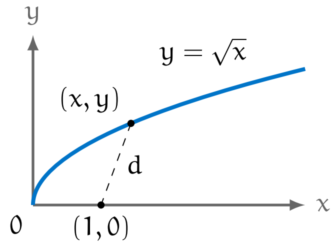
Damit

$$x = 0.1\sqrt{x^2+16} \cdot 8 \quad \Rightarrow x^2 = 0.64(x^2 + 16)$$

und

$$x^2(100 - 64) = 64 \cdot 16 = 32^2 = x^2 \cdot 36 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 32^2/6^2 = (32/6)^2$$

Damit ist $x = \frac{32}{6} \approx 5.33$. Nun wollen wir noch die Intervallgrenzen testen, denn vielleicht handelt sich nur um ein lokales Minimum. Es ist $x \in [0, 10]$, also $T(0) = 0.5 + 1 = 1.5$, $T(10) = \sqrt{116}/8 \approx 1.35$ und $T(5.33) = 1.3$. Es ist also ein globales Minimum. $\triangleleft$



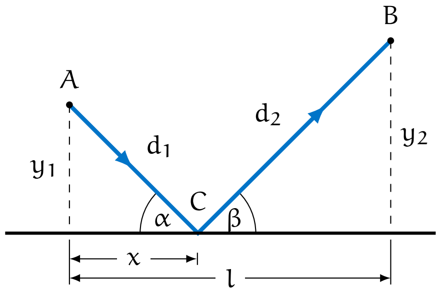
28.11 Übung Wir suchen den Punkt auf der Kurve $f(x)=\sqrt{x}$, der den kürzesten Abstand zum Punkt $P=(0,1)$ aufweist. Die Zielfunktion ist der Abstand

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

mit $y=\sqrt{x}$ folgt $d=\sqrt{x^2-2x+1+x}=\sqrt{x^2-x+1}$. Wir leiten $d(x)$ ab und erhalten

$$d'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\cdot(2x-1)=0$$

Damit folgt $2x-1=0$ und $x=1/2$ und $y=\sqrt{1/2}$. Die Distanz ist $d(1/2)=\sqrt{1/4+1/2}=\sqrt{0.75}\approx 0.866$. Wir kontrollieren mit den Werten an den Intervallgrenzen, hier $d(0)=1$. Mit dem Wert der zweiten Ableitung im stationären Punkt $x=0.5$ könnte man bestimmen, dass es ein Extremum ist und von welcher Art. Wir bemerken, dass das Quadrieren einer Funktion eine streng monotone Abbildung ist, so dass man anstatt d auch d^2 betrachten könnte. Die erste Ableitung von d^2 ist $(d^2)'=(x^2-x+1)=2x-1$ und die zweite $(d^2)''=2$. Es ist tatsächlich ein Minimum. $\triangleleft$



28.12 Übung Ein physikalisches Prinzip der Optik verlangt, dass die Ausbreitung des Lichts den kürzesten Weg von Lichtquelle zu einem Punkt nimmt. Dies gilt auch für die Reflexion an einer Oberfläche. Da die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, sind Weg und Zeit proportional. Minimierung des Weges ist auch Minimierung der Laufzeit. In der Abbildung ist x als Variabel definiert worden. Der Weg ist $s=d_1+d_2$ und mit Pythagoras $d_1=\sqrt{y_1^2+x^2}$ und $d_2=\sqrt{y_2^2+(l-x)^2}$. Die Zielfunktion ist

$$s(x)=\sqrt{y_1^2+x^2}+\sqrt{y_2^2+(l-x)^2}$$

Die oder der stationäre Punkt ergibt sich aus $s'(x)=0$. Die Ableitung ist

$$s'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}-\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y_2^2}}=0 \tag{28.1}$$

Umformung, quadrieren

$$\frac{x^2}{x^2+y_1^2}=\frac{(l-x)^2}{(l-x)^2+y_2^2}$$

Weiteres Umformen ("übers Kreuz multiplizieren") führt zu

$$\cancel{(l-x)^2x^2}+x^2y_2^2=\cancel{(l-x)^2x^2}+(l-x)^2y_1^2$$

und radizieren

$$xy_2=(l-x)y_1$$

sodass

$$x=c=l\frac{y_1}{y_1+y_2}$$

Dies ist der einzige stationäre Punkt. Da wir in einem abgeschlossenen Intervall operieren, d.h. $x \in [0, l]$ kontrollieren wir die Intervallgrenzen aus der Graphik, $s(x = 0) = y_1 + \sqrt{l^2 + y_2^2}$, $s(x = l) = y_2 + \sqrt{l^2 + y_1^2}$ und $s(x = c)$:

$$s(c) = \sqrt{y_1^2 + (l\frac{y_1}{y_1 + y_2})^2} + \sqrt{y_2^2 + (l - l\frac{y_1}{y_1 + y_2})^2}$$

$$s(c) = y_1\sqrt{1 + (\frac{l}{y_1 + y_2})^2} + y_2\sqrt{1 + (\frac{l}{y_1 + y_2})^2} = (y_1 + y_2)\sqrt{1 + (\frac{l}{y_1 + y_2})^2}$$

und

$$(y_1 + y_2)\sqrt{1 + (\frac{l}{y_1 + y_2})^2} = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 + l^2}$$

Das Quadrieren ist eine streng monotone Funktion, deshalb bleibt die Ordnungsrelaltion bestehen. Wir vergleichen nun die 3 Terme, aber als Quadrate:

$$\begin{aligned}
s^2(0) &= [y_1 + \sqrt{l^2 + y_2^2}]^2 = y_1^2 + l^2 + y_2^2 + 2y_1\sqrt{l^2 + y_2^2} \\
s^2(l) &= [y_2 + \sqrt{l^2 + y_1^2}]^2 = y_2^2 + l^2 + y_1^2 + 2\sqrt{l^2 + y_1^2} \\
s^2(c) &= (y_1 + y_2)^2 + l^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 + l^2
\end{aligned}$$

Wir subtrahieren von allen die gemeinsame Summe $y_1^2 + l^2 + y_2^2$ und dividieren durch 2:

$$\begin{aligned}
r(0) &= y_1\sqrt{l^2 + y_2^2} \\
r(l) &= y_2\sqrt{l^2 + y_1^2} \\
r(c) &= y_1y_2
\end{aligned}$$

Weil $\sqrt{l^2 + y_1^2} > y_1$ und $\sqrt{l^2 + y_2^2} > y_2$ folgt, dass $r(c) < r(0)$ und $r(c) < r(l)$. Es ist das Minimum.

Wir kehren nochmals zur Gleichung 28.1 zurück. Setzen wir für die Nenner die Strahlen d_1 und d_2 ein, dann folgt

$$s'(x) = \frac{x}{d_1} - \frac{l - x}{\sqrt{d_2}} = 0$$

oder

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \beta$$

Physikalisch bedeutet dies "Einfallswinkel" = "Ausfallswinkel"! ◁

Wichtig 16. Häufig ist die Bestimmung der stationären Punkte einfacher als die Bestimmung der Art des Punktes (Maximum, Minimum, Terrassenpunkt). ⊣

Aufgaben

0.13 Man bestimme die Ableitung von

(a) $f(x) = x^2 - x - 1$ **(b)** $f(x) = x^8 + 2x^4 + 1$ **(c)** $f(x) = \dfrac{2x^6}{3} - \dfrac{3}{2x^6}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{4}$ **(e)** $f(x) = x \sin(x)$ **(f)** $f(x) = x^2 \tan(x)$ **(g)** $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

(h) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ **(i)** $f(x) = (1 - 5x)^4$ **(j)** $f(x) = 5\,(x^3 + x - 1)^4$ **(k)** $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

(l) $f(x) = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ **(m)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$ **(n)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

13 **(a)** Jeden Summanden ableiten $f'(x) = 2x - 1$

(b) $f'(x) = 8x^7 + 8x^3$

(c) $f'(x) = \dfrac{12x^5}{3} - (\dfrac{3x^{-6}}{2})' = 4x^5 + 9x^{-7}$

(d) $f'(x) = \frac{1}{4}[\cos(x) - \sin(x)]$

(e) Produktregel $f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x\cos(x)$

(f) Produktregel $f'(x) = 2x\tan(x) + x^2(\tan(x))' = 2x\tan(x) + x^2\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

(g) Quotienteregel $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$: $f(x) = \dfrac{\cos(x)x - \sin(x) \cdot 1}{x^2}$

(h) Wer sich die Quotientenregel nicht merken kann, sollte die Produktregel anwenden, z.B. $\cos(x)x^{-2} - 2x^{-3}\sin(x) = \dfrac{1}{x^3}(x\cos(x) - 2\sin(x))$

(i) Kettenregel $f'(x) = 4(1 - 5x)^3(-5)$

(j) Kettenregel $f'(x) = 4 \cdot 5(x^3 + x - 1)^3(3x^2 + 1)$

(k) Kettenregel, Wurzel als Potenz schreiben $((1 - 2x)^{1/2})' = \dfrac{1}{2}(1 - 2x)^{-1/2}(-2)$

(l) Kettenregel $f'(x) = \dfrac{3}{2}(1 - x^2)^{1/2}(-2x)$

(m) Produkt- uns Kettenregel $f'(x) = \dfrac{x^{-1/2}}{2(x + 1)} + \dfrac{x^{1/2}}{-(x + 1)^2}$

(n) Quotientenregel $u = \sqrt{x} + 1$, $v = \sqrt{x} - 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt{x} + 1)'(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= \frac{(1/\sqrt{x})(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1)(1/\sqrt{x})}{2(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2} \end{aligned}$$

0.14 Leite zweimal ab

(a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ **(b)** $f(x) = x^2 \sin(x)$ **(c)** $f(x) = \cos(3x)$ **(d)** $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

14 **(a)** $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f''(x) = 6x + 2$

(b) $f'(x) = x^2\cos(x) + 2x\sin(x)$, $f''(x) = [-x^2\sin(x) + 2x\cos(x)] + [2x\cos(x) + 2\sin(x)] = \sin(x)[2 - x^2] + \cos(x)4x$

(c) $f'(x) = -\sin(3x) \cdot 3$, $f''(x) = -\cos(3x) \cdot 9$

(d) $f'(x) = \cos(x)/x - \sin(x)/x^2$, $f''(x) = [-\sin(x)/x - \cos(x)/x^2] - [\cos(x)/x^2 - 2\sin(x)/x^3]$

(e) $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$

0.15 Wende die Kettenregel an und leite ab

(a) $f(x) = \exp(\sin(2x))$ **(b)** $f(x) = \arccos(\sin x)$ **(c)** $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$
(d) $f(x) = \arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x)$ **(e)** $\sin(x^2 + \cos(x))$ **(f)** $\dfrac{1}{\sqrt{2 + x^3 + x^4}}$
(g) $\exp(\dfrac{1}{3 - 2x + x^2})$ **(h)** $\dfrac{1}{\ln(\ln(x))}$

15 **(a)** $f'(x) = \exp(u(v)) = \exp(u)\dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx} = \exp(\sin(2x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2.$

(b) $f(u) = \arccos(u)$, $u = \sin(x)$, damit $f'(x) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$, $\frac{df}{du} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$, $\frac{du}{dx} = \cos(x)$, somit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cos(x) = \frac{-\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \\ &= \frac{-\cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)}} \\ &= \frac{-\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \arctan(u)$, $u = x^{1/2}$, $\frac{df}{du} = \dfrac{1}{1+u^2}$, $\frac{du}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$, damit

$$f'(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x}\frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

(d) Zwei Teile: 1) $(\arctan(x))' = 1/(1+x^2)$ und 2) $g = \arctan(u)$ mit $u = \frac{1}{x}$, $\frac{dg}{du} = 1/(1+u^2)$ und $\frac{du}{dx} = -1/x^2$, zusammen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

(e) $u = x^2 + \cos(x)$, $\frac{d\sin(u)}{du} = \cos(u)$, $\frac{du}{dx} = 2x - \sin(x)$ somit $f'(x) = \cos(u)(2x - \sin(x)) = \cos(x^2 + \cos(x))(2x - \sin(x))$

(f) $u = 2 + x^3 + x^4$, $v = \sqrt{u}$, $w = 1/v$, somit $\frac{dw}{dv} = -1/v^2$, $\frac{dv}{du} = -1/2u^{-1/2}$, $\frac{du}{dx} = 4x^3 + 3x^2$. Zusammen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{v^2}\frac{-1}{2u^{1/2}}(4x^3+3x^2) \\ &= \frac{1}{2}(4x^3+3x^2)(2+x^3+x^4)^{-1/2}(2+x^3+x^4)^{-1} \\ &= \frac{4x^3+3x^2}{2(2+x^3+x^4)^{3/2}} \end{aligned}$$

(g) $u = 3 - 2x + x^2$, $v = 1/u$, $w = \exp(v)$, $\frac{du}{dx} = 2x - 2$, $\frac{dv}{du} = -1/u^2$ und $\frac{dw}{dv} = \exp(v)$. Somit

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(2x-2)\frac{1}{u^2}\exp(v) \\ &= -(2x-2)\frac{1}{(3-2x+x^2)^2}\exp(\frac{1}{3-2x+x^2}) \\ &= \frac{-(2x-2)\exp(\frac{1}{3-2x+x^2})}{(3-2x+x^2)^2} \end{aligned}$$

(h) $u = \ln(x)$, $v = \ln(u)$, $w = 1/v$, damit $\frac{du}{dx} = 1/x$, $\frac{dv}{du} = 1/u$, $\frac{dw}{dv} = -1/v^2$, zusammen und dann eingesetzt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}\frac{1}{u}\frac{-1}{v^2} \\ &= \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}\frac{-1}{\ln(u)^2} \\ &= \frac{-1}{x}\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{\ln(\ln(x))^2} \\ &= \frac{-1}{x\cdot\ln(x)\cdot(\ln(\ln(x)))^2} \end{aligned}$$

0.16 Man zeige, dass $f'(x) = f(x)\,(1 - f(x))$ für die logistische Funktion $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. (Diese Beziehung wird in neuronalen Netzen verwendet.)

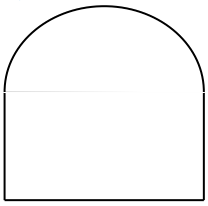
16 Wir fangen mit dem rechten Teil der Gleichung an und nennen e^{-x}=w: Also :

$$f(1-f) = (1 - \frac{1}{1+w})\frac{1}{1+w} = (\frac{1+w-1}{1+w})\frac{1}{1+w} = \frac{w}{(1+w)^2}$$

Nun zur Ableitung, Kettenregel: $u = 1 + w$, $f = 1/u$ also $\frac{dw}{x} = -e^{-x} = -w$, $\frac{du}{dw} = 1$, und $\frac{df}{du} = -1/u^2$ somit:

$$f'(x) = \frac{-1}{u^2} \cdot 1 \cdot (-w) = \frac{w}{u^2} = \frac{w}{(1+w)^2} \checkmark$$

0.17 Ein Kanal hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (vgl. Darstellung, rechts). Der Umfang des Querschnitts betrage u. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit die Querschnittsfläche maximal ist? [67‰]



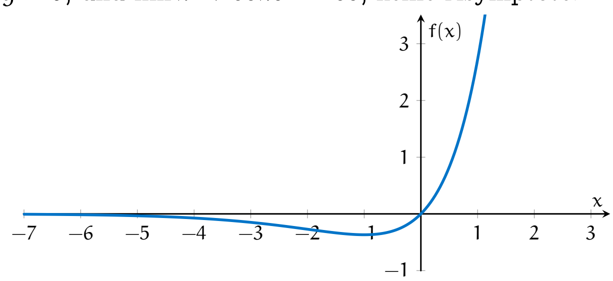
17 Der Umfang ist $u = 2r + 2h + \pi r = 2h + r(2+\pi)$. Die Fläche ist $F = 2rh + \pi r^2/2$. Wir setzen ein $2h = u - r(2+\pi)$ wodurch $F = [u - r(2+\pi)]r + \pi r^2/2$. Umgeform $F = ur - r^2[2 + \pi - \pi/2] = ur - r^2[2 + 1/2\pi]$. Abgeleitet nach r: $F' = u - 2r[2 + 1/2\pi] = 0$, $u = 2r[2 + 1/2\pi]$ und $r = u/[2 + 1/2\pi]/2 = u/[4+\pi] = 0.140u$.

0.18 Betrachten Sie die Funktion f: $y = (1-x)^2 e^{-x}$. Zeigen Sie, dass (1/0) ein Tiefpunkt und (3/?) ein Hochpunkt ist. [50‰]

18 Tiefpunkt (Minimum), Hochpunkt (Maximum): $f'(x) = 0$, $f' = -2(1-x)e^{-x} - (1-x)^2 e^{-x} = (1-x)^2 e^{-x}(-2 - (1-x)) = (1-x)^2 e^{-x}(x-3))$ null setzen: $0 = (1-x)(x-3)$ damit $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ ✓.
$f''(x) = ((-x^2+4x-3)e^{-x})' = (-2x+4)e^{-x} - (-x^2+4x-3)e^{-x} = e^{-x}[-2x+4+x^2-4x+3] = e^{-x}[x^2-6x+7]$, $f''(1) = 2/e > 0$, Minimum bei $x_1 = 1$. $f''(3) = [9-18+7]/e^3 = -2/e^3 < 0$ Maximum.

0.19 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = xe^x$. Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte. Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Funktion und skizzieren Sie den Grafen von f. [83‰]

19 Es gibt nur eine Nullstelle bei $x = 0$. Extremalstellen $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$, also $'f(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x = 0$. Es folgt $x = -1$. $f''(x) = (1+x)e^x + e^x = (2+x)e^x$, $ff''(-1) = e^{-1} > 0$, also Minimum bei $x = -1$. Wendepunkte $f''(x) = 0$, $2 + x = 0$, $x = -2$. Asymptoten: $\lim x \to -\infty xe^x = 0$, horizontale Aysmptote $y = 0$, und $\lim x \to \infty xe^x = \infty$, keine Asymptote.



0.20 Gegeben ist die Kurve $f(x)$ mit der Gleichung $\sqrt{a(x-a)}$ wobei $a > 0$ 0 eine unbekannte Konstante ist. [135‰]

(a) Berechnen Sie die Nullstelle von $f(x)$.

(b) Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$ für $a = 4$ im Intervall $[-2, 12]$ in ein Koordinatensystem ein.

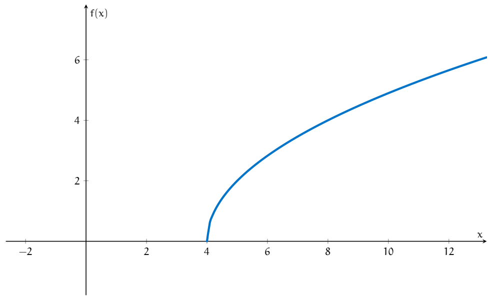
(c) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Tangente an den Punkt $P(8, y)$ von f für $a = 4$ durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ gegeben ist.

(d) Bestimmen sie die Tangente t im Graphenpunkt $(2a, y)$ von f.

20 **(a)** Nullstelle $0 = \sqrt{a(x-a)}$ oder $a(x-a) = 0$ führt zu $x = a$.

(b) $f_a(x) = \sqrt{4(x-4)}$. Tabelle

x	0	2	4	8	12
y	–	–	0	4	5.6



(c) Tangente $f'(x) = \frac{1}{2}a[a(x-a)]^{-1/2}$, $a = 4$ $f'(8) = \frac{1}{2}4[4(8-4)]^{-1/2} = 2(16)^{-1/2} = 2/4 = 1/2\checkmark$

(d) Tangente $f'(x) = \frac{1}{2}a(a(x-a))^{-1/2}$, $f'(2a) = \frac{1}{2}a(a^2)^{-1/2} = a/2a = 1/2$, $y_t = mx + b = 0.5x + b = f(2a) = a$, damit $b = 0$, also $y_t = 0.5x$.

0.21 Von einer Polynomfunktion f vierten Grades wissen wir, dass ihr Graph an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ die x-Achse berührt und in $T(0/-\frac{1}{2})$ einen Tiefpunkt hat [165‰].

(a) Bestimmen Sie ihre Funktionsgleichung. [Wer keine Funktionsgleichung findet, rechne mit $f(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)(x^2-1)$ weiter.]

(b) Der Graph von f und die x-Achse umschliessen ein endliches Flächenstück. Darin wird ein achsenparalleles Rechteck so einbeschrieben, dass sein Flächeninhalt maximal wird. Wie gross ist dieser Flächeninhalt?

21 **(a)** Berührt, d.h. zweifache Nullstelle $f(x) = A(x+1)^2(x-1)^2 + B = A(x^2-1)^2 + B$, Es folgt $B = 0$, denn $f(1) = 0 = A \cdot 0 + B$. Für T: $f(0) = -0.5 = A(x+1)^2(x-1)^2 = A$, somit $A = -1/2$ und $f(x) = -0.5(x^2-1)^2$. (Dass T ein Minumum ist, haben wir nicht gebraucht, nur den Punkt T hat gereicht.)

(b) Wir sind im Intervall $[-1, 1]$. Die Fläche ist $F = 2(x \cdot |y|) = 2x(0.5(x^2-1)^2) = x(x^2-1)^2$. Ableiten Produkteregel: $F' = (x^2-1)^2 + x(2(x^2-1)2x = 0$ umformen $F' = (x^2-1)[(x^2-1+4x^2] = (x^2-1)[5x^2-1] = 0$. Nullproduktsatz, entweder $(x^2-1) = 0$ oder $5x^2-1$. Lösungen $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{1/5}$. Da bei ± 1 $f(\pm 1) = 0$ ist $\sqrt{1/5}$ die richtige Lösung. Eingesetzt $F = x(x^2-1)^2 = \sqrt{1/5}(1/25-1)^2 = \sqrt{1/5}(24/25)^2 = 0.4122$

0.22 Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + c$ $(c \in \mathbb{R})$ für $x \in \mathbb{R}$ [190‰].

(a) Für welches c geht der Graph von f durch den Punkt $Q(-3/0)$?

(b) Diskutieren Sie nun die unter a) gefundene Funktion (Nullstellen, Extremalpunkte, Wendepunkte) und zeichnen Sie einen Graphen von f. (Wer c nicht finden konnte, nehme $c = +12$.)

(c) Im Kurvenpunkt P mit x-Koordinate 0 wird die Tangente t an den Graphen von f gelegt. Beweisen Sie: Die Tangente schneidet die Kurve f ein weiteres Mal an der Stelle $x = 9$.

22 **(a)** $f(-3) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + c = 0 = -27/9 - 9 + c$ damit $c = 12$.

(b) (i) Nullstellen: $f(x) = 0$ eine kennen wir schon, nämlich $x_1 = -3$ Damit können wir die Polynomdivision ausführen

$$\begin{array}{l}\left(\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 12\right) : \left(x+3\right) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 \\ -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 \\ \hline -\frac{4}{3}x^2 \\ \frac{4}{3}x^2 + 4x \\ \hline 4x + 12 \\ -4x - 12 \\ \hline 0\end{array}$$

Damit suchen wir die Lösungen von $\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4$ oder $\cdot 9$: $x^2 - 12x + 36 = 0$, quadratisch ergänzen $(x-6)^2 - 36 + 36 = 0$ und $x - 6 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 6$. (ii) Stationäre Punkte $f'(x) = 0$: $f' = \frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$, damit $x_4 = 0$ und aus $x - 2 = 0$ dann $x_5 = 2$. Zweite Ableitung $f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$ an den Stellen $f''(x_4 = 0) = 2$, x_4 ist Minimum, $f''(x_5 = 2) = 4/3 - 2 = -2/3$, also x_5 Maximum. (iii) Wendepunkte: $f''(x) = 0$, damit $\frac{2}{3}x - 2 = 0$ und $x_6 = 3$, nun $f'''(x) = 2/3$, also x_6 Wendepunkt.

(c) Tangente bei $x = 0$: $f'(0) = 0$ also Horizontale mit $y = 12$, testen $f(9) = 81 - 81 + 12 = 12\checkmark$.

0.23 Der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}$ $(p, q \in \mathbb{R})$ sei für $x > 0$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Parameter p und q so, dass der Graph von f in E(2/1) ein Extremum besitzt. (Falls Sie p und q nicht finden konnten, rechnen Sie mit p = 2 und q = -2 weiter.)

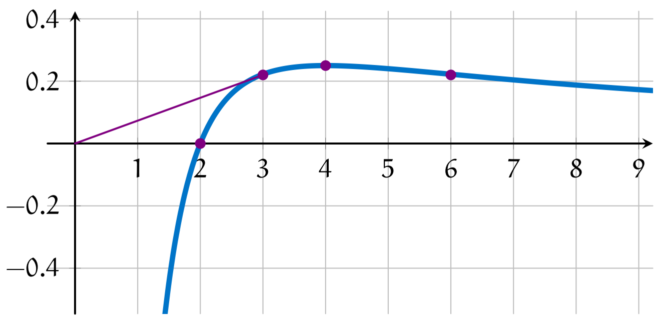
(b) Diskutieren Sie f (Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte, Asymptoten) und zeichnen Sie einen Graphen von f.

(c) Durch den Ursprung wird eine Tangente an den Graphen von f gelegt. Im ersten Quadranten berührt sie die Kurve im Punkt B; bestimmen Sie die Koordinaten von B.

23 **(a)** Zum einen $E(2/1)$ ist Punkt, also $f(2) = 1 = p/2 + q/4$ (i), zum anderen $f'(2) = 0 = (px^{-1} + qx^{-2})' = -px^{-2} - 2qx^{-3} = -p/4 - q/4$ (ii). (i) und (ii) addieren: 0=Aus (i) folgt $1 = p/2 - p/4$ oder $p = 4$ und damit $1 = 2 + q/4$ oder $4 = 8 + q$ und $q = -4$. Damit $f(x) = 2x^{-1} - 4x^{-2}$

(b) Nullstellen $0 = 2x^{-1} - 4x^{-2}$ mit x^2 multiplizieren $0 = 2x - 4$ und $x_0 = 2$. Extrema $f'(x) = 0$, d.h. $0 = -2x^{-2} + 8x^{-3}$ mal x^3: $0 = -2x + 8$, $x_1 = 4$, Extremum oder Terrasse? $f''(4) = (-2x^{-2} + 8x^{-3})' = 4x^{-3} - 24x^{-4} = 4/64 - 6 \cdot 64 = -2/64 = -1/32 < 0$ also Maximum. Wendepunkt: $f''(x) = 0 = 4x^{-3} - 24x^{-4}$, mal x^4: $0 = 4x - 24$, daraus $x_2 = 6$. Asymptoten: Polstellen bei $x = 0$, d.h. vertikale Asymptote bei $x = 0$. Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}(2/x - 4/x^2) = 0$, d.h. horizontale Asymptote für $x \to \infty$.

(c) $t : y_t = f'(x_B)x$, $f'(x) = -2x^{-2} + 8x^{-3}$, damit $y_t = [-2x^{-2} + 8x^{-3}]x = -2x^{-1} + 8x^{-2}$, es ist $y_t(x_B) = f(x_B)$, also $-2x{-1} + 8x^{-2} = 2x^{-1} - 4x^{-2}$ mal x^2: $-2x + 8 = 2x - 4$ oder $4x = 12$ und somit $x_B = 3$.



0.24 Polynomfunktion [150‰]

(a) Gesucht wird eine Polynomfunktion 3. Grades, deren Graph den Punkt P(2/4) enthält und für die $N_1(1/0)$ eine doppelte, sowie $N_2(-2/0)$ eine einfache Nullstelle ist. [Sollten Sie die Funktion nicht bestimmen können, so verwenden Sie für die Aufgaben b) bis d) die Funktion $y = x^3 - 3x^2 + 4$. $N_1(-1/0)$ ist eine einfache, $N_2(2/0)$ eine doppelte Nullstelle.]

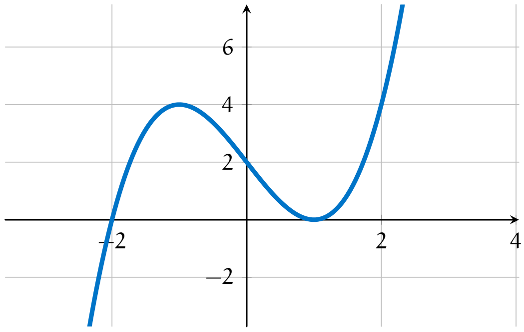
(b) Bestimmen Sie für die obige Funktion den Definitions- und Wertebereich, die lokalen Extrema und den Wendepunkt. Skizzieren Sie den Graphen im Intervall [-3,5].

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

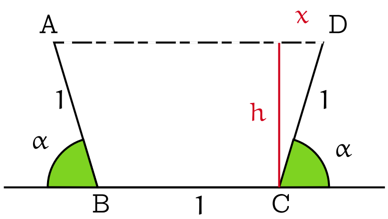
24 **(a)** Doppelte Nullstelle: Faktor $(x-1)^2$, einfache: Faktor $(x+2)$, Zusammengebaut $f(x) = A(x-1)^2(x+2)+B$, wobei $B = 0$ wegen Nullstellen. A bestimmen mit $P(2/4)$ einsetzen: $4 = A \cdot 1 \cdot 4 = 4A$ daraus $A = 1$. Es ist also $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ oder ausmultipliziert $f(x) = (x^2-2x+1)(x+2) = x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2 = x^3-3x+2$.

(b) Definitionsbereich $x \in (-\infty, \infty)$, Wertebereich $y \in (\infty, \infty)$ (ungerade Funktion). Extrema $f'(x) = 0$, $f'(x) = 3x^2-3 = 0$ Zum einen $x^2-1 = 0$, somit $x_{1,2} = \pm 1$. Zweite Ableitung $f''(x) = 6x$, bei $f''(1) = 6 > 0$ also Minimum, $f''(-1) = -6 < 0$, also Maximum. Wendepunkt $f''(x) = 0 = 6x$, also $x_3 = 0$ da kein Extremum.

(c) Tangente in $x = 0$: $f'(0) = -3$, $y_t = -3x + b = f(0) = 2$, also $y_t = -3x + 2$.



0.25 * Bestimmen sie in der unten gezeigten Figur den Winke α so, dass der Inhalt der Fläche ABCD maximal wird. [75‰]

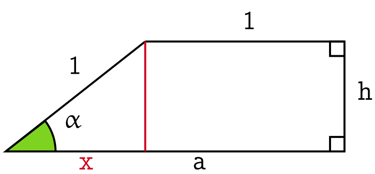


25 Wir zeichnen die Hilfsgrössen h und x ein, um die Kreisfunktionen zu umgehen. Es gilt $h^2+x^2 = 1$. Die Fläche ist $F = 1 \cdot h + xh = h(1+x)$ Anstatt F zu maximieren, maximieren wir sein Quadrat $Q = h^2(1+x)^2 = (1-x^2)(1+x)^2$. Ableiten (z.B. Produktregel):

$$\begin{aligned} Q' &= (1-x^2)(2(1+x)) - 2x(1+x)^2 \\ &= 2(1-x)(1+x)(1+x) - 2x(1+x)^2 \\ &= 2(1+x)^2(1-x-2x) \\ &= 2(1+x)^2(1-3x) \end{aligned}$$

Nullproduktsatz: $(1+x) = 0$, $x = -1$ unbrauchbar, $(1-3x) = 0$ $x = 1/3$. Damit $h = \sqrt{(}1-1/9) = 2/3\sqrt{2}$. Winkel $\cos(\alpha) = x/1 = x$ und $\arccos(1/3) = 1.231 = 70.5°$.

0.26 * In einem Trapez haben zwei Seiten die Länge 1 und zwei Winkel betragen 90 Grad. Bestimmen Sie a, h und den Winkel α so, dass die Trapezfläche maximal wird. Weisen Sie nach, dass es sich um ein Maximum handelt. [100‰]



26 Wir führen eine Variable x ein und bestimmen am Schluss den Winkel. Die Fläche ist $F = 1h + 0.5hx = h(1+0.5x)$, wie optimieren dessen Quadrat, also $Q = h^2(1+0.5x)^2 = (1-x^2)(1+0.5x)^2$,

$$\begin{aligned} Q'(x) &= (1-x^2)(2((1+0.5x)0.5 + (1+0.5x)^2(-2x) \\ &= (1+0.5x)[1-x^2-2x(1+0.5x)] \\ &= (1+0.5x)[1-x^2-2x-x^2] \\ &= (1+0.5x)[1-2x-2x^2] \end{aligned}$$

Nullsetzen und Nullproduktsatz $1-2x-2x^2 = 0$ oder $x^2+x-1/2 = 0$ quadratisch ergänzt $(x+1/2)^2 - 1/4 - 1/2 = 0$ und $(x+1/2)^2 = 3/4$ womit $x_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{3}/2$ einzige positive Lösung $x = (\sqrt{3}-1)/2 = 0.732$. Winkel α aus $\arccos(0.732) = 42.9°$.

0.27 * Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 4x^2 \ln(x)$. [170‰]

(a) Bestimmen Sie Definitionsmenge, Nullstellen, lokale Extrema (inkl. Art und Begründung) und Wendestellen des Graphen von f. Zeichnen Sie den Graphen von f und geben Sie die Wertemenge von f an.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der Regel von de l'Hospital $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Zeigen Sie ebenso, dass die Bedingungen zur Anwendung der Regel erfüllt sind. Welche geometrische Bedeutung haben diese Grenzwerte für den Graphen von f.

(c) In welchem Punkt des Graphen von f muss man die Tangente legen, damit sie durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht? Geben Sie auch die Gleichung dieser Tangente an.

27 **(a)** Definitionsmenge $x \in (0, \infty)$, Nullstellen: $0 = \ln(x_1)$, $x_1 = 1$ ($x = 0$ nicht in D), Extrema: $f'(x) = 8x\ln(x) + 4x^2/x = 8x\ln(x) + 4x = 4x(1+2\ln(x))$, damit $4x = 0$ nicht in D, $0 = 1+2\ln(x)$, $\ln(x) = -1/2$, $x_2 = \exp(-1/2)$. $f''(x) = 4(1+2\ln(x)) + 4x(2/x) = 4 + 8\ln(x) + 8 = 12 + 8\ln(x)$, x_2 einsetzen $f''(x_2) = 12 + 8/2 = 16 > 0$ also Minimum. Wendepunkt $f''(x) = 0 = 12 + 8\ln(x)$, damit $\ln(x) = -3/2$, $x_3 = \exp(-3/2)$. Wertemenge: $f(x_2) = -4x_2^2/2 = -2/e$ somit $y \in [2/e, \infty)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x \cdot 1/x = 2x^2 = 0$. Ableitung $\lim\limits_{x\to 0} x(1+2\ln(x)) = \lim\limits_{x\to 0} 2x\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2/x = \infty$.

(c) $y_t = f'(x_3)x = f(x_3)$, damit $4x^2\ln(x) = x \cdot 4x(1+2\ln(x))$ oder $\ln(x) = 1 + 2\ln(x)$, $\ln(x) = -1$, $x_3 = 1/e$.

0.28 * Gegeben sind die Funktion f: $\dfrac{ax^2}{x-a}$ mit $a > 0$ und die Gerade g: $y = ax + a^2$. [185‰]

(a) Bestimmen Sie Definitionsmenge, Nullstellen und lokale Extrema der Funktion f in Abhängigkeit von a. Entscheiden Sie jeweils, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. Geben Sie die vertikalen Asymptoten des Graphen von f und die Wertemenge der Funktion an.

(b) Zeigen Sie, dass die Gerade g (schiefe) Asymptote des Graphen von f ist.

(c) Zeichnen Sie den Graphen von f mit seinen Asymptoten für $a = 1$.

(d) Bestimmen Sie für beliebiges a die Gleichung der Geraden h, welche durch die beiden Extremalpunkte des Graphen von f geht.

(e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und Schnittwinkel von g und h für a=1.

(f) Bestimmen Sie a so, dass der Winkel aus Aufgabe e) maximal wird. Wie gross ist dieser maximale Schnittwinkel?

28 **(a)** Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R} \setminus a$, Nullstellen $ax^2 = 0$, $x_0 = 0$ (zweifach), Extrema (Produkteregel oder Quotientenregel):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2ax}{x-a} - ax^2(x-a)^{-2} \\ &= \frac{2ax^2 - 2a^2x - ax^2}{(x-a)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 2a^2x}{(x-a)^2} \end{aligned}$$

mit $f'(x) = 0$ folgt $ax^2 - 2a^2x = 0$ mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 2a$. Zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (\frac{ax^2 - 2a^2x}{(x-a)^2})' \\
&= \frac{2ax - 2a^2}{(x-a)^2} + \frac{-2(ax^2 - 2a^2x)}{(x-a)^3} \\
&= \frac{(2ax - 2a^2)(x-a) - 2(ax^2 - 2a^2x))}{(x-a)^3} \\
&= \frac{2ax^2 - 2a^2x - 2a^2x + 2a^3 - 2ax^2 + 4a^2x))}{(x-a)^3} \\
&= \frac{2a^3}{(x-a)^3}
\end{aligned}$$

$f''(0) = -2 < 0$, also Maximum. $f''(2a) = 2 > 0$, also Minimum.

(b) Der Zählergrad ist um 1 höher als der Nennergrad, deshalb schiefe Aysmptote $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to\infty} ax$, Gerade mit Steigung a.

(c) siehe unten

(d) Zweipunkteforme der Geraden. $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$, $E_1 = (0,0)$, $E_2 = (2a, 4a^2)$, damit $y = \frac{4a^2 - 0}{2a - 0}(x - 0) + 0 = 2ax$

(e) Steigung $m_g = 1a$ und $m_h = 2a$, Schnittwinkel (Formelsammlung) $\alpha = \arctan(|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}|$, hier $\alpha = \arctan(\frac{a}{1+2a^2})$, für $a = 1$ also $\arctan(1/3)$ oder $\alpha = 18.3°$

(f) Funktion arctan() ist strikt mononton, deshalb kann man das Argument optimieren: $z(a) = \frac{a}{1-2a^2}$ mit $z'(a) = \frac{1}{1-2a^2} - \frac{a \cdot 4a}{(1-2a^2)^2}$, erweitern und nullsetzen: $a(1 - 2a^2) - 4a^2 = 0$ oder $a - 2a^3 - 4a^2 = 0$ und $1 - 2a^2 - 4a = 0$ oder $a^2 + 2a - 0.5 = 0$, quadratisch ergänzen $(a+1)^2 - 1 - 0.5 = 0$, $a + 1 = \pm\sqrt{1.5}$, $a = -1 + \sqrt{1.5} = \sqrt{1.5} - 1 = 0.225$ (negative Lösung entfällt gemäss Voraussetzung). Winkel $\alpha = \arctan(\frac{0.225}{1 + 2 \cdot 0.0505}) = \arctan(0.2) = 11.3°$.

0.29 * Für jeden Wert des reellen Parameters p ist mit $f_p(x) = (p - x) \cdot e^x$ eine Funktion f_p definiert.

(a) Beweisen Sie allgemein, dass der Graph dieser Funktion f_p für jedes p genau einen Hochpunkt aufweist, und geben Sie dessen Koordinaten an.

(b) Beweisen Sie allgemein, dass der Graph dieser Funktion f_p für jedes p genau einen Wendepunkt aufweist, und geben Sie dessen Koordinaten an.

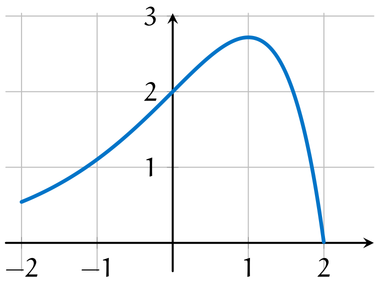
(c) Geben Sie die Gleichung $y(x) = \ldots$ derjenigen Kurve an, auf der die Wendepunkte all dieser Kurven liegen.

(d) Zeichnen Sie für $p = 2$ den Graphen von $f_p(x)$ im Bereich $(-2) \leqslant x \leqslant 2$ und $0 \leqslant y \leqslant 3$.

29 **(a)** Maximum gesucht, also erst mal ableiten $f'_p = -1e^x + (p - x)e^x = e^x(p - x - 1)$. Nullsetzen: $e^x(p - x - 1) = 0$, e^x ist immer > 0, deshalb $p - x - 1 = 0$, $x = p - 1$. $f''_p = (p - x - 1)e^x - e^x = (p - x - 2)e^x$, $f''_p(p-1) = (p - p + 1 - 2)e^{p-1} = -1e^{p-1} < 0$ also Maximum. Koordinaten $P = (p - 1, 2^{p-1})$

(b) Wendepunkt: $f''_p(x) = 0$, $f''_p(x) = (p - x - 2)e^x = 0$, deshalb $(p - x - 2) = 0$ und $x = p - 2$. Koordinaten $W = (p - 2, 2e^{p-2}$

(c) $y(x) = 2e^{x-2}$



(d)

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

– eine Stammfunktion definieren, ihre Eigenschaften anwenden, Stammfunktionen der elementaren Funktionen und Abgewandelte der Form $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$ berechnen
– den Integralbegriff intuitiv und als Grenzwert von Summen darstellen
– Stammfunktionen zur Berechnung von Integralen anwenden
– die Integralrechnung zur Bestimmung von Flächeninhalten, die durch Graphen von Funktionen begrenzt sind, anwenden

–
den Begriff der Stammfunktion definieren, ihre Eigenschaften darstellen und beweisen
– Stammfunktionen unter Verwendung der Integrationsregel, der Substitution und der Regel der partiellen Integration für übliche Funktionen berechnen und erklären
– das Integral als Riemann'sche Summe präsentieren
– den Hauptsatz der Integralrechnung erklären und beweisen, diesen Satz zur Berechnung von Integralen anwenden
– die Integralrechnung zur Bestimmung von Flächeninhalten, die durch Graphen von Funktionen begrenzt sind, anwenden
– Volumen von Rotationskörpern berechnen

Kapitel 29

Integrale

Integrale und Ableitungen decken das als Infinitesimalrechnung bekannte Gebiet ab. Integrale kann man auf zwei Arten betrachten:

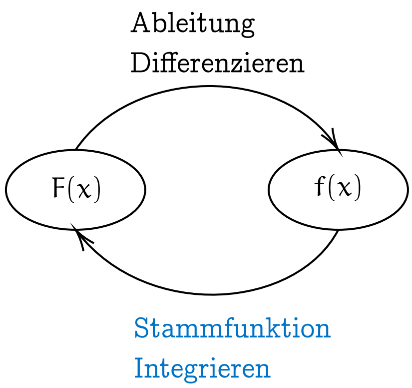
- als Umkehroperation des Ableitens und
- als eigenständige Flächenberechnung.

Wir werden beide Aspekte berücksichtigen.

29.1 Unbestimmtes Integral

29.1.1 Stammfunktion

Wir definieren die Stammfunktion und das Integral als Inverse, als Umkehroperation der Ableitung einer Funktion $f(x)$. Wir fragen also nach einer Operation, welche das Ableiten rückgängig macht. Oder, wie sieht die Funktion aus, deren Ableitung wir kennen? Als Beispiel nehmen wir eine Funktion $F(x) = ax^2$. Die Ableitung $F'(x) = 2ax = f(x)$. Ausgehend von $f(x) = 2ax$ nennen wir $F(x)$ eine Stammfunktion.



Definition 95. Stammfunktion Eine *Stammfunktion* $F(x)$ einer Funktion $f(x)$, die im Intervall $J = [a, b]$ stetig ist, ist eine Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist. Kurz:

$$F'(x) = f(x)$$

Aufgrund dieser Definition können wir tabellarisch ein paar Stammfunktinen nennen, denn aus dem vorangehenden Kapitel sind uns ein paar Ableitungen schon begegnet. Hatten wir eine Tabelle mit Funktion und deren Ableitung, müssen wir nur die Spaltennamen ändern zu Funktion für Ableitung und Stammfunktion für Funktion.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$	Ableitung $F'(x)$
0	c	0
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$(n+1)x^n$	$x^{n+1}+c$	$(n+1)x^n$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$\cos(x)$
$k\exp(kx)$	$\exp(kx)+c$	$k\exp(kx)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Aufmerksame Beobachter haben bemerkt, dass rechts immer noch ein $+c$ steht. Das c ist eine Konstante, also eine Zahl. Warum? Die offensichtliche Antwort ist, dass diese Konstante beim Ableiten wegfällt.

Wir betrachten die einfache Funktion $f(x) = 2x$. Wir wissen, dass $(x^2)' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ ist, so dass man $F(x) = x^2$ annehmen könnte. Die Frage ist aber, ist dies die *einzige* Stammfunktion? Nein, denn beispielsweise eine Funktion $G(x) = x^2 + 1$ führt zu $G'(x) = 2x = f(x)$. Also ist $G(x) = x^2 + 1$ eine weitere Stammfunktion von $f(x) = 2x$. Genaus gilt das Argument für $H(x) = x^2 + 2$. Jede Funktion der Form $F(x) = x^2 + c$, wobei c eine beliebige Konstante ist, eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$ ist.

Satz 29.1. Zwei Stammfunktion $G(x)$ und $F(x)$ der Funktion $f(x)$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante, also $G(x) - F(x) = c$.

Wenn also $G(x)-F(x) = c$ gilt, dann folgt $G'(x)-F'(x) = (c)' = 0$ und daraus $G'(x) = F'(x)$.

Wichtig 17. Um die Stammfunktion einer Funktion zu finden, genügt es eine Stammfunktion zu finden und eine Konstante zu addieren. ⊣

29.2 Übung Gesucht ist *die* Stammfunktion von $f(x) = 2x$. Eine Stammfunktion ist $F(x) = x^2$. *Die* Stammfunktion ist $F(x) = x^2 + c$, also eine ganze Schar. ◁

Als Folgerung bietet sich die folgende Definition an

Definition 96. Unbestimmes Integral Das *unbestimme Integral* einer Funktion $f(x)$ wird mit

$$\int f(x)dx$$

dargestellt, das die Schar der Stammfunktionen vertritt.

Anmerkung 29.3. Das Symbol $\int$ stellt eine Art S dar, das wiederum an die Summe, wie $\sum$ erinnert. Das Symbol dx wiederum stammt aus der Darstellung $f' = \frac{d}{dx}f(x)$, das man symbolisch auch zu $df = f'\,dx$ umformen kann. Das dx ist eine infinitesimale Grösse, ein Differential. Somit ist $\int f(x)dx$ die Summe von Stücken der Grösse dF, denn $dF = f'dx$.

Obwohl das unbestimme Integral $\int f(x)dx$ alle Stammfunktionen vertritt, kann es als ein Objekt oder Funktion aufgefasst werden, dessen Ableitung als $f(x)$ bekannt ist.

Satz 29.4. Es gilt aus der Definition

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Stammfunktionen haben folgende Eigenschaft.

Eigenschaften 29.5. Stammfunktionen Mit $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen von $x \in \mathbb{R}$ und Konstanten a und $b \in \mathbb{R}$ gilt für Stammfunktionen

$$\int (a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x))dx = a \cdot \int f(x)dx \pm b \cdot \int g(x)dx$$

Die Eigenschaft folgt aus den Regeln für das Ableiten, denn

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

und

$$\frac{d(a \cdot f)}{dx} = a \cdot \frac{df}{dx}.$$

Potenzfunktionen

29.6 Übung Bestimme $\int 0dx$. Wir argumentieren von der Ableitung her und wissen, dass eine Konstante abgeleitet null ergibt. Somit ist die Stammfunktion eine Konstante c oder $\int 0dx = c$. ◁

29.7 Übung Wir suchen eine Stammfunktion $\int 1\, dx$. Es ist $F(x) = x + c$ abgeleitet 1. Also ist eine Stammfunktion $\int 1\, dx = x + c$. ◁

29.8 Übung Und nochmals: Wir suchen eine Stammfunktion $\int x\, dx$. Es ist $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ abgeleitet x. Also ist eine Stammfunktion $\int x\, dx = x^2 + c$. ◁

Wir verallgemeinern und finden für die Potenzfunktionen x^n folgende Stammfunktionen für $n \neq -1$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right) = x^n$$

Satz 29.9. Stammfunktion Potenzfunktionen

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \text{if } n \neq -1 \\ \ln|x| & \text{if } n = -1 \end{cases}$$

29.10 Übung Bestimme $\int (x^7 - 3x^4)dx$. Wir schreiben zwei Stammfunktionen

$$\begin{aligned} \int (x^7 - 3x^4)dx &= \int x^7 dx - \int 3x^4 dx \\ &= \frac{x^8}{8} - \frac{3x^5}{5} + c \end{aligned}$$

◁

29.11 Übung Eine Wurzelfunktion ist auch eine Potenfunktion, d.h. $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Wir bestimmen $\int \sqrt{x}dx$. Es folgt

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + c$$

◁

29.12 Übung Wir bestimmen $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$, idem wir auch zwei Stammfunktionen ansetzen und die Formel für die Potenzfunktionen zweimal anwenden:

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{-2}dx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+\ln|x|+c=-\frac{1}{x}+\ln|x|+c$$

◁

Trigonometrische Funktionen

Die folgenden Funktionen ergeben sich ebenfalls aus den bekannten Ableitungen.

Satz 29.13.

$$\int\cos(x)dx=\sin(x)+c$$
$$\int\sin(x)dx=-\cos(x)+c$$
$$\int\frac{dx}{\cos^2(x)}=\tan(x)+c$$
$$\int\frac{dx}{\sin^2(x)}=-\cot(x)+c$$

Weil $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$ folgt:

Satz 29.14.

$$\int e^x dx=e^x+c$$

29.15 Übung Wir bestimmen $\int(3\sin x+4\cos x-5e^x)dx$. Am einfachsten betrachtet man alle drei Terme separat.

$$\begin{aligned}\int(2\sin x+5\cos x-7e^x)dx&=2\int\sin x dx+5\int\cos x dx-7\int e^x dx\\&=-2\cos x+5\sin x-7e^x+c\end{aligned}$$

◁

29.16 Übung Wir betrachten eine Gleichung mit einer Ableitung, d.h. $y'=yk$. Anstatt y' kann man bekanntlich dy/dx schreiben. Damit folgt die Differentialdarstellung $dy/y=kdx$. Wir nehmen links und rechts eine Stammfunktion und erhalten

$$\int\frac{1}{y}dy=\int kdx$$

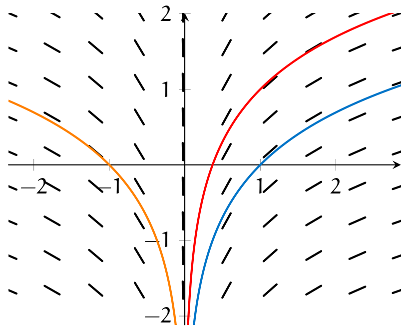
Aus der Ableitung wissen wir, dass $\frac{d(\ln(|y|)}{dx}=1/y$ also

$$\begin{aligned}\int\frac{dy}{y}&=\int k\,dt\\ \ln(|y|+c_1&=kt+c2\\ \ln(|y|&=kt+c\quad(c=c_1-c_2))\\ y&=e^{kt+C}=e^{kt}\cdot e^c=Ae^{kt}\end{aligned}$$

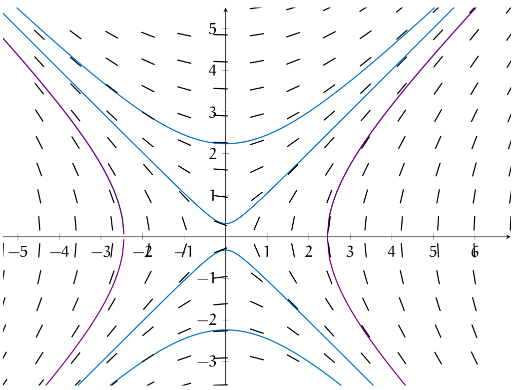
mit $A=e^c$ einer neuen Konstante. ◁

Wichtig 18. Es gibt nicht für alle Funktionen eine Stammfunktion mit geschlossener Darstellung. Z.B. kann man für $\int e^{x^2}\,dx$ und $\int \sin(x^2)\,dx)$ keine Formel angeben. Als Alternative verwendet man oft Tabellen. ⊣

29.1.2 Richtungsfeld**



Es ist eine Stammfunktion $y = F(x)$ vorausgesetzt. Sie hat in x die Ableitung und Steigung $y'(x)$. Durch die Gleichung $y'(x) = f(x)$ wir jedem Punkt der xy-Ebene ein bestimmter y'-Wert zugeordnet. Wir zeichnen in (x, y) ein Geradenstückchen mit Steigung y'. In der Abbildung ist dies durch die kleinen Striche angedeutet. Man nennt dies eine *Richtungsfeld*.
Nun sucht man aus dem Richtungsfeld, den bekannten Ableitungen, die Funktion $F(x)$ zu bestimmen. Dazu muss man die Kurven ermitteln, die so in das Richtungsfeld von $y' = f(x)$ passen, dass in jedem Kurvenpunkt die Tangente die diesem Punkt zugeordnete Richtung hat.
Die Richtung ist bei x für alle y gleich. Deshalb sind die Stammfunktionen nur durch Konstanten verschieden. In der Abbildung ist das Richtungsfeld durch $y' = 1/x$ gegeben. Deshalb sind die Stammfunktionen $F(x) = \ln(x) + c$.
Das Richtungsfeld ermöglicht eine graphische Ermittlung der Stammfunktionen.



In der Abbildung ist das Richtungsfeld von $y' = -y/x$ dargestellt. Darin finden sich die Parabeln und die Hyperbelfunktionen als Stammfunktionen. Aus $dy/dx = -y/x$ folgt $y\,dy = -x\,dx$ und $y^2 = -x^2 + c$.

29.2 Bestimmtes Integral

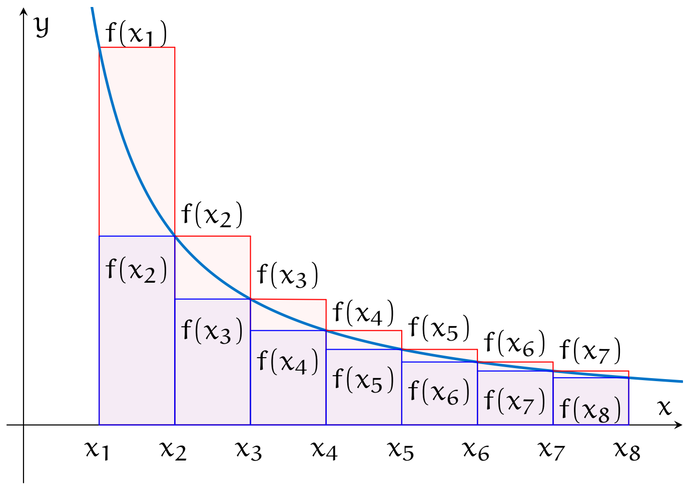
Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ ist eine Schar von Stammfunktionen. Unbestimmt ist es, weil keine Angaben zur Bestimmung vorliegen. Nun betrachten wir das Integral als Fläche unter einer Kurve. Das Integral ist ja eine Summe von Differentialen $dF(x) = f(x)dx$.

Definition 97. **Bestimmtes Integral** Das *bestimmte Integral* einer Funktion $f(x)$ im Intervall $I = [a, b]$ wird als

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet und gibt die Summe der infinitesimalen Grössen $df = f(x)\,dx$ für $x \in [a, b]$ an.

Die Bestimmung der Summen entspricht Bestimmung der Fläche unter der Kurve $f(x)$ begrenzt durch die Schranken a und b sowie der $x-$Achse. Dies kann auf verschiedene Art geschehen. Das Resultat ist eine Zahl oder mit Variablen eine Funktion.



Die Fläche unter der Kurve kann z.B. in Streifen geschnitten werden. Die Fläche eines solchen Flächenstücks ΔF kann angenähert werden durch ein Rechteck mit Basis $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ und Höhe $h = f(x)$. Hier hat man verschiedene Möglichkeiten, z.B. den Wert links $f(x_i)$ oder den Wert rechts $f(x_{i+1})$ oder den Mittelwert etc. Wie man aus der Abbildung sieht, wird die rote Näherung (Obersumme O) den wahren Wert der Fläche übertreffen, die blaue (Untersumme U) wird den wahren Wert zu klein darstellen. Es gilt also für die wahre Fläche A:

$$O = \sum_{k=1}^{7} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) > A > \sum_{k=1}^{7} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = U$$

Wir haben im Beispiel das Intervall $[a, b]$ in 7 Stücke zerlegt. Nun denken wir uns den Grenzwert $n \to \infty$ für die Anzahl Streifen und legen somit für das bestimme Integral alternativ und erweiternd fest

Definition 98. Das bestimme Integral im Intervall $[a, b]$ ist

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

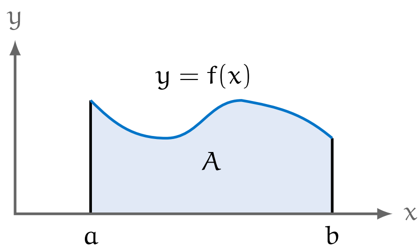
falls es existiert.

Anmerkung 29.1. Summen der Art $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ als Zwischenschritt zur Integralbestimmung nennt man *Riemann'sche Summen*.

Anmerkung 29.2. Das bestimmte Integral existiert, wenn

- die Funktion in $[a, b]$ stetig ist,
- die Funktion $f(x)$ beschränkt ist in $[a, b]$ und endlich viele Unstetigkeiten aufweist,

Das bestimme Integral ist die Fläche, die von zugehöriger Kurve, x-Achse und den Intervallgrenzen a und b begrenzt wird. Die Fläche meint eine zweidimensionale Ausdehnung vor allem auf dem Zeichenbrett, auf dem physikalische Diagramme gezeichnet sind, wie z.B. Weg-Geschwindigkeiten.



29.3 Übung Wir nehmen die Funktion $f(x) = 1/x$ im Intervall $[1, e]$, Die Zahle e ist die *Euler'sche Zahl* $e = 2.71828\ldots$. Die Ober- und Untersummen werden abhängig von der Anzahl regelmässiger Streifen berechnet als:

n	U_n	O_n
5	1.1170176	0.8997853
10	1.0564285	0.9478123
20	1.0276854	0.9733774
100	1.0054521	0.9945905
1000	1.0005433	0.9994571
10000	1.0000543	0.9999457

Der wahre Wert ist (bekanntlich) 1. Die Summen konvergieren, denn mit wachsendem n rücken Ober- und Untersumme näher zueinander. $\triangleleft$

29.4 Übung Wir bestimmen das Integral von $f(x) = x^2$ im Intervall $[1, 2]$. Wir teilen das Intervall in n z.B. gleiche Stücke, sodass $x_{i+1} - x_i = 1/n$ mit $x_i = 1 + \frac{i-1}{n}$. Für jedes Stück legen wir eine Höhe fest, z.B. $f(x_{i+1})$. Wir erinnern, dass gilt $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Es wird die Summe $\sum_{i=1}^n f(x_{i+1})\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n (x_i)^2\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n (1 + \frac{i}{n})^2\frac{1}{n}$. Somit

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n [\frac{1}{n} + \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^3}] \\
&= \lim_{n\to\infty} [1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n i + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2] \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} [\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2] \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}n^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= 1 + 1 + \frac{2}{6} \\
&= 7/3
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Für die Summendarstellung ist es nicht wesentlich, dass die Rechtecke alle dieselbe Basis aufweisen also aequidistant sind. Für den Wert der Höhe kann dieser beliebig zwischen Ober- und Unterwert liegen. Wichtig ist die Konvergenz.

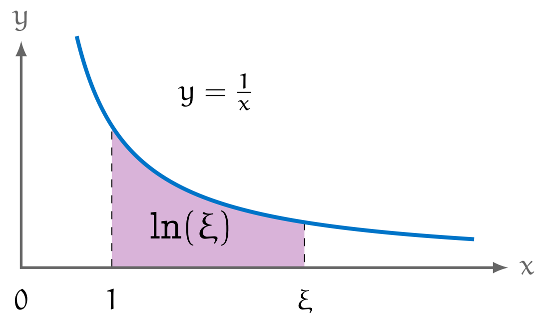
29.5 Übung Wir bestimmen das bestimme Integral von $f(x) = 1/x$ zwischen $a = 1$ und $b = e$, wie in der Übung. Wir wählen die Stützstellen x_i gemäss $x_1 = 1$ und $x_i = q^{i-1}$. Damit ist $x_{i+1} - x_i = q^{i-1}(q-1)$ und die Rechtecke haben die Fläche $A_1 = \frac{1}{1}(q-1) = (q-1)$, $A_2 = \frac{1}{q}(q^2 - q) = (q-1)$, $A_3 = \frac{1}{q^2}(q^3 - q^2) = (q-1)$ usw. also $A_n = (q-1)$. Es ist ja $b = q^n$ und damit $q = b^{1/n}$ Damit wird die Summe

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n (q-1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n (b^{1/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} n \cdot (b^{1/n} - 1)$$

Mit der Ersetzung $h = 1/n$ folgt

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = \ln(b)$$

Anhand dieses Beispiels wurde im 17. Jahrhundert gefragt, welche Zahl b die Fläche $A = 1$ hervorbringt, also

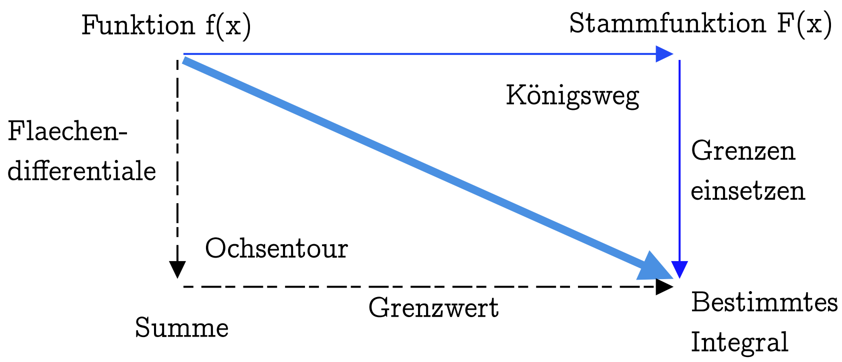


$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Diese Zahl nennt sich die *Euler'sche Zahl* e, denn $1 = \ln(e)$. Der natürliche Logarithmus $\ln(\xi)$ ist die Fläche unter der Einheitshyperbel im Intervalle $[1, \xi]$. $\triangleleft$

29.3 Fundamentalsatz der Analysis

Der Fundamentalsatz der Analysis ist auch bekannt als *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*. Wir rekapitulieren: Das Integral ist die Umkehroperation der Ableitung. Die Stammfunktion ergibt sich als Umkehrung der Ableitung. Nun werden wir den "Königsweg" darstellen, mit dem das bestimme Integral viel einfacher zu finden ist (sieh folgende Übersicht).



Die Berechnung von Grenzwerten von Summen ist ziemlich unpraktisch und funktioniert noch am besten für Polynomfunktionen niederen Grades. Glücklicherweise gilt der folgende Satz:

Satz 29.1. Fundamentalsatz der Analysis Es ist $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ reellwertige stetige Funktion. Dann

(1) ist die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ für $x \in [a, b]$ eine differenzierbare Stammfunktion (d.h. $F'(x) = f(x)$) und

(2) folgt das bestimmte Integral als

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Anmerkung 29.2. Weil wir die Differenz von Werten der Stammfunktion verwenden, kann man die Konstante c weglassen. Denn sie fällt weg. $F(a) + c - F(b) - c = F(a) - F(b)$.

29.3 Übung ** Der erste Teil des Fundamentalsatztes sagt, $F(x)$ ist im Intervall $[a,b]$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Das bedeutet, $F'(x) = f(x)$. Nun ist

$$\Delta F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

für $x \in [a,b]$ und $(x+h) \in [a,b]$. Weil $f(x)$ als stetig vorausgesetzt ist, gibt es für $f(x)$ in $[a,b]$ einen grössten Betragswert M und einen kleinsten m, so dass die Fläche $A = \Delta F$ der Ordnung $m \cdot h \leqslant A \leqslant h \cdot M$ unterliegt. Ausgeschrieben, durch h dividiert

$$m \leqslant |\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}| \leqslant M$$

Mit $h \to 0$ folgt: $m \to |f(x)|$, $M \to |f(x)|$ und $|\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}| \to |f(x)|$. Somit also $|F'(x)| = |f(x)|$. Falls $f(x) > 0$ folgt $F'(x) > 0$ ebenso für $f(x) < 0$ folgt $F'(x) < 0$ folgt deshalb $F'(x) = f(x)$.
Setzt man für die im ersten Teil gegebene Stammfunktion $x_0 = a$, so ist $F(a) = 0$ und $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ und damit gilt der Satz für diese spezielle Stammfunktion. Alle anderen Stammfunktionen unterscheiden sich von jener aber nur durch eine Konstante, die bei der Subtraktion verschwindet. Somit ist der Satz für alle Stammfunktionen bewiesen. $\triangleleft$

29.4 Übung Gesucht ist die Ableitung von $F(x) = \int_a^x \frac{1-t}{1-t^2}dt$. Aus dem bisher gesagten folgt die Ableitung als $f(x) = \frac{1-x}{1-x^2}$. $\triangleleft$

29.3.1 Rechnung

29.5 Übung Wir nehmen nochmals das bestimme Integral von $f(x) = x^2$ im Intervall $[1,2]$ von oben auf. Gemäss dem Hauptsatz brauchen wir die Stammfunktion $F(x) = \frac{x^3}{3}$ an den Stellen a und b, also $A = F(2) - F(1) = 2^3/3 - 1/3 = 8/3 - 1/3 = 7/3$. Welche Vereinfachung im Verhältnis zum Grenzwert! $\triangleleft$

29.6 Übung Dasselbe in Hyperbel: Wir suchen für $f(x) = 1/x$ die Fläche von 1 bis e. $F(x) = \ln(x)$, also $A = \ln(e) - \ln(1) = e$. $\triangleleft$

Definition 99. Symbole bestimmtes Integral Wir schreiben

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Formel 29.7. Zusammenhang bestimmt-unbestimmt

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b$$

29.8 Übung Wir bestimmen das Integral von $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $x \in [0,\pi]$. Die Stammfunktion ist $\cos(x)$, damit schreiben wir $F = -\cos(x)|_0^\pi = -\cos(\pi)+\cos(0) = 1+1 = 2$. $\triangleleft$

29.9 Übung Bestimmen wir $\int_{-1}^1 x^3 dx$. Weil $F(x) = \frac{x^4}{4}$ eine Stammfunktion ist, folgt

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

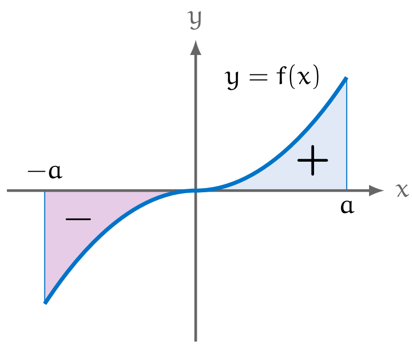
Man beachte: Die Fläche ist die Summe von $1/4 + (-1/4)$ also einem positiven Teilstück und einem negativen. Es ist ja $x^4/4|_{-1}^0 = -1/4$. $\triangleleft$

29.3.2 Flächen

Flächen habe eigentlich im allageinen nur positive Werte. Die Flächenbestimmung mittels Integration hingegen macht das Vorzeichen einer Fläche davon abhängig, ob die Kurve positive oder negative Werte aufweist. Die Konvention ist, dass Flächenstücke unter der x-Achse negativ sind, Flächenstücke über der x-Achse sind positiv.

Wichtig 19. Flächenstücke unter der x-Achse sind negativ, Flächenstücke über der x-Achse sind positiv. ⊣

Die Abbildung zeigt eine ungerade Funktion, die bezüglich des Ursprungs symmetrisch ist. Für sie gilt $f(x) = -f(-x)$. Addiert man die entsprechenden Flächen, die im Intervall $[-a, a]$ festgelegt sind, so wird die Summe Null ergeben. Es gilt also



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

für ungerade Funktionen. Für eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ gilt dann einfach

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

29.3.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

Analog zum Laufindex bei den Summen, d.h. k in $\sum_{k=0}^{n} a_k$, fällt auch der Integrationsparameter weg. Deshalb kann man unbekümmert schreiben

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(\zeta)d\zeta$$

Die Eigenschaften oder Rechenregeln für bestimmte Integrale fassen wir zusammen.

Eigenschaften 29.10. Bestimme Integrale

(1) $\int_{a}^{b} (u \cdot f(x) \pm w \cdot g(x))dx = u \cdot \int_{a}^{b} f(x)dx \pm w \cdot \int_{a}^{b} g(x)dx$

(2) $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

(3) $\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$

(4) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$ mit $a \leqslant c \leqslant b$

Mit dem Fundamentalsatz folgt einfach, dass

$$\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

29.3.4 Mittelwertsatz

Satz 29.11. Für reellwertige Funktionen $f(x)$, stetig in $[a, b]$ mit $a < b$ existiert eine reelle Zahl c zwischen a und b, so dass

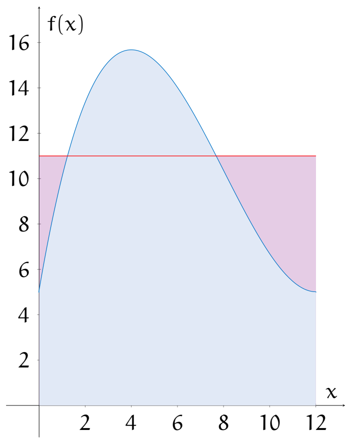
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Anmerkung 29.12. Die Zahl $f(c)$ nennt man *linearer Mittelwert*.

29.13 Übung Eine Wetterstation misst zwischen 6 Uhr und 18 Uhr die Aussentemperatur, die an einem Tag näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben wird: $f(t) = \frac{1}{24}t^3 - t^2 + 6t + 5$. Die Zeit t läuft von 1 bis 12 Wie hoch ist der Mittelwert M im Beobachtungszeitraum? Gemäss Satz muss gelten

$$\begin{aligned} f(c) = M &= \frac{1}{18-6} \int_0^{12} (\frac{1}{24}t^3 - t^2 + 6t + 5)dt \\ &= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{96}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 5t\right]_0^{12} \\ &= \frac{1}{12}[\frac{(3 \cdot 2^2)^4}{96}] - \frac{(3 \cdot 4)^3}{3} + 3(144) + 60] \\ &= \frac{1}{12}[\frac{(3 \cdot 2^2)^4}{3 \cdot 2^5} - \frac{(3 \cdot 4)^3}{3} + 3(144) + 60] \\ &= \frac{1}{12}[3^3 \cdot 2^3 - 3^2 \cdot 4^3 + 432 + 60] \\ &= \frac{132}{12} = 11 \end{aligned}$$

◁



In der Abbildung sehen wir das Rechteck mit dem Mittelwert als Höhe. Die violette Fläche unter dem Mittelwert entspricht der Fläche über dem Mittelwert.
**Es gibt noch den erweiterten Mittelwertsatz, wonach zwei stetige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in $[a, b]$, bei der $g(x)$ das Vorzeichen nicht ändern darf:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Der obige Satz ist die Verallgemeinerung mit $g = 1$.

29.4 Uneigentliche Integrale

Wir betrachten hier nur zwei Klassen von uneigentlichen Integralen, nämlich solche in offenen oder halboffenen Intervallen und solche mit vertikalen Asymptoten.
Anstatt $[a, b]$ wird z.B. nach $[a, \infty)$ gefragt. Das Symbol ∞ ist keine Zahl, so dass man nicht einfach eine Grenze b durch dieses Symbol ersetzen kann. Wie schon oft betrachten wir Grenzwerte für das Unendliche. Dabei ist immer die Frage nach der Konvergenz ein Thema.

29.4.1 Grenze im Unendlichen

Definition 100. Uneigentliches Integral Für eine stetige Funktion $f(x)$ mit Grenze $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen folgende Ausdrücke uneigentliche Integrale in den Intervallen $[a, \infty)$:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

in $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx,$$

in $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Anmerkung 29.1. Uneigentliche Integrale als Grenzwerte können konvergieren oder divergieren. Im letzteren Fall geht der Wert gegen ∞.

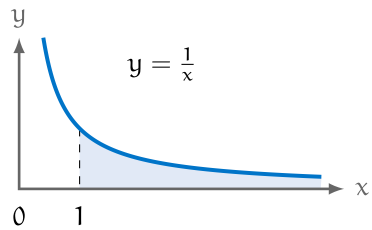
Anmerkung 29.2. Auch für uneigentliche Integrale gilt die Darstellung als Fläche.

29.3 Übung Wir untersuchen das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

Wir schreiben gemäss der Definition für $b > 1$,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln(x) \Big|_1^b \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln(b) - \ln(1)) = \lim_{b\to\infty} b = \infty$$



Damit ist das Integral divergent. ◁

29.4 Übung Wir schauen folgendes Integral an: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Wir nehmen eine Hilfsvariable $b > 1$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right)$$

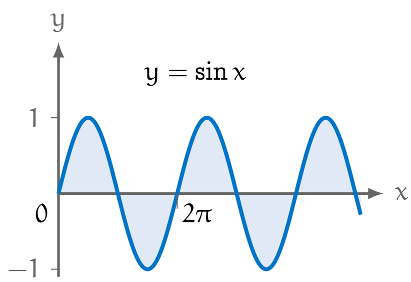
$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1 - 0 = 1.$$

Eine unendlich grosse Basis der Fläche kann also zu einer endlichen Fläche gehören. Das geht nur, weil die Beiträge zur Fläche mit $x \to \infty$ gegen Null gehen. ◁

29.5 Übung Wir bestimmen $\int_0^\infty \sin(x)dx$.

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \sin x dx$$

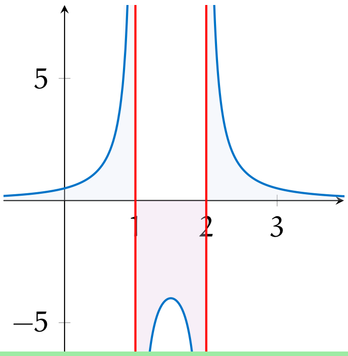
$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\cos x \Big|_0^b \right) = \lim_{b\to\infty} (-\cos(b) + 1)$$



Der Ausdruck $\lim_{b\to\infty} \cos(b)$ existiert nicht. Damit ist auch die Fläche oder das Integral nicht gegeben. ◁

29.4.2 Vertikale Asymptote

Vertikale Asymptoten treten bei Bruchtermen auf und zwar an den Nullstellen des Nenners. Beispielsweise bei $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ oder beim einfachsten Fall $g(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x \to 0$.



In der Abbildung sieht man die Skizze der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ mit den vertikalen Asymptoten bei $x = 1$ und $x = 2$. Möchte man die Fläche zwischen $x = 0$ und $x = 3$ bestimmen, so muss man vier Mal den Limes nehmen. Wir möchten hier nicht alle vier Fälle darstellen sondern einen, den man dann selber erweitern kann. Eine Funktion $f(x)$ habe im Intervall $[a, b]$ eine Asymptote bei c, dann würde man von a bis c und von c bis b integrieren.

Definition 101. Uneigentliches Integral an Asymptote Die Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ hat in c, $a < c < b$ eine vertikale Asymptote mit

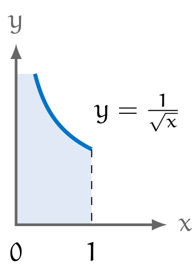
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s \to c-} \int_a^s f(x)dx + \lim_{s \to c+} \int_s^b f(x)dx$$

Anmerkung 29.6. Man kann damit auch das uneigentliche Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{s \to c-} \int_{-\infty}^{s} f(x)dx + \lim_{s \to c+} \int_s^{\infty} f(x)dx$$

bestimmen.

29.7 Übung Wir bestimmen $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.



Offensichtlich ist an der Stelle $x = 0$ eine vertikale Asymptote vorhanden, also am unteren Rand des Invervalls.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0+} \left(2\sqrt{x}\Big|_c^1 \right)$$
$$= \lim_{c \to 0+} (2 - 2\sqrt{c}\,) = 2 - 0 = 2.$$

Weil die Fläche besagten Integrals begrenzt ist, also der Grenzwert konvergiert, findet man den numerischen Wert 2, obwohl der Graph für $x \to 0+$ ins Unendliche geht.

◁

29.4.3 Ein paar Sätze zu unbestimmten Integralen**

Für Potenzfunktionen der Form $f(x) = 1/x^p$ kann man die Konvergenz vorherbestimmen.

Satz 29.8. Für eine reelle Zahl a konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

falls der Exponent $p > 1$ und divergiert, falls $0 < p \leqslant 1$ ist.

Wir erinnerung uns and die Reihen, wo gesagt wurde, dass wenn die Zuwächse eine Nullfolge bilden, die Reihe konvergiert.

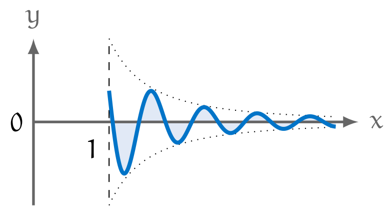
Satz 29.9. Vergleich uneigentlicher Integrale Es gilt:

(1) Wenn $|f(x)| \leqslant g(x)$ für alle x in $[a, \infty)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergiert, dann konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

(2) Wenn $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ für alle x in $[a, \infty)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert, dann divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Diese Folgerungen kann man sich einfach vorstellen, wenn man die Analogie der Flächen anwendet. Der obere Flächenrand $f(x)$ ist sozusagen zwischen $-g(x)$ und $g(x)$ eingeklemmt.

29.10 Übung Wir wollen zeigen, dass $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ konvergiert aufgrund der Konvergenz gemäss dem Satz 29.8.



Dieser sagt ja, dass zumindest $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert. Nun haben wir das Produkt einer Funktion, deren Integral konvergiert und einer Funktion, deren Wert zwischen ± 1 alterniert. Damit ist sie begrenzt. Man kann abschätzen, dass gilt

$$|\frac{\sin x}{x^2}| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

für alle x im Intervall $[1, \infty)$. Mithilfe des Satzes 29.9 ist die Funktion $f(x)$ zwischen $g(x) = 1/x^2$ und $-g(x) = -1/x^2$ eingeklemmt. ◁

Anmerkung 29.11. Die Aussage

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

gilt nur für bestimmte Integrale, falls sie konvergieren.

29.5 Rechenmethoden

Die Bestimmung von Integralen über die Stammfunktion funktioniert nur für alle Funktionen, deren Ableitungen vorliegen. Es braucht erweiterte Methoden, wo Tabellen nicht vorhanden oder nicht praktikabel sind.

Die Methoden lehnen sich an eine Korrespondenz mit den Regeln des Ableitens an, insbesondere

- Produktregel ⇒ “partielle Integration”,
- Quotientenregel ⇒ “Partialbrüche”,
- Kettenregel ⇒ “Substitution”.

Hier erweist sich das Leibniz’sche Kalkül als besonders hilfreich.

29.5.1 Substitution*

Die Substitution fusst auf der Idee, ein schwierigere oder verkettete (mittelbare) Funktion durch eine einfachere zu ersetzen, deren Lösung man kennt oder zu finden weiss. Eine verkettete Funktion hat z.B. die Form $f\big(g(h(x))\big)$ oder konkret

$$f(x) = \exp(\sin(x^2)) \qquad \text{mit} \quad f(\xi) = \exp(\xi), g(\xi) = \sin(\xi), h(\xi) = \frac{1}{\xi^2}$$

Mit Leibniz kann man für die Ableitung schreiben

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}$$

Die Substitution ist keine eindeutige Prozedur; es gibt immer mehrere Möglichkeiten. Wir wollen das Gesagte an einem einfachen Beispiel vertiefen.

29.1 Übung Wir analysieren $\int \cos(2x)dx$. Wir kennen die Stammfunktion von $\cos(x)$ aber nicht von $\cos(2x)$. Diese Funktion könnten wir als $\cos(u(x))$ als verkettet betrachten. Wir haben also die Subtitution $u(x) = 2x$ gemacht. Im Integral würden wir $\cos(2x)$ durch $\cos(u)$ ersetzen. Aber was geschieht mit dx? Wir folgern mit den Differentialen

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}du$$

Damit wird das unbestimmte Integral zu

$$\int \cos(2x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

Für die rechte Form kennen wir die Lösung, nämlich die Stammfunktion von $\cos(\xi)$ ist $\sin(\xi)$. Also

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\sin(u) + c$$

Nun können wir wieder zurücksubstituieren, also $2x = u$ und erhalten

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + c$$

◁

29.2 Übung Nun etwas anderes: $\displaystyle\int e^{-3x}dx$. Offensichtlich bietet sich $u = -3x$ an. Das Differential ergibt $du = \frac{du}{dx}dx = -3dx$ und somit $dx = -u/3$. Wir schreiben also

$$\int e^{-3x}dx = \int e^u \left(-\frac{1}{3}du\right) = -\frac{1}{3}\int e^u du = -\frac{1}{3}e^u + c = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

◁

Diesen Sachverhalt kann man verallgemeinern und wir ergänzen unsere Sammlung von Integralen.

Satz 29.3.

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c \quad \text{für alle Konstanten } a \neq 0$$

29.4 Übung Nächste Haltestelle: $\int 2x\, e^{x^2} dx$. An diesem Beispiel erkennt man, dass verschiedene Substitutionen möglich sind. Wir haben gesehen, dass nach der Festlegung der neuen Variablen diese abgeleitet werden muss, $du = \frac{du}{dx} dx$. Deshalb sollte man den komplizierteren Ausdruck ersetzen, hier also $u = x^2$ und nicht $w = 2x$. Nach Fahrplan: $u = x^2$, $du = 2x dx$ und damit $dx = 1/(2x) du$. Eingesetzt:

$$\int 2x\, e^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

Weil mit $2x$ schon die Ableitung von x^2 vorhanden ist, wird es besonders einfach. ◁

29.5 Übung Wir bestimmen $\int (1+4x)^5 dx$. Wieder ersetzen wir den "höheren", komplizierteren Ausdruck $(u)^5$ und nicht $w = 4x$. Also $u = (1 + 4x)$, $du = 4dx$ und $dx = 1/4 du$. Damit $A = 1/4 \int u^5 du$ mit der Lösung $A = 1/4 \frac{u^6}{6} + c$ und zurücksubstituiert $A = \frac{(1+4x)^6}{24} + c$. ◁

29.6 Übung Wir bestimmen $\int x\, \sqrt{1 + 3x^2} dx$. Die neue Variable sei $w = 1 + 3x^2$ und $dw = \frac{dw}{dx} dx = 6x\, dx$ und $dx = dw/(6x)$. Wir haben Glück, denn die Ableitung ist schon halbwegs als x vorhanden. Damit $1/(6\cancel{x}) \int \cancel{x} \sqrt{w} dw$. Die Stammfunktion ist einfach

$$\frac{1}{6} \int \sqrt{w} dw = \frac{1}{6} \frac{w^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{9} w^{3/2} + c = \frac{1}{9} (1 + 3x^2)^{3/2} + c$$

◁

29.7 Übung Bestimmen wir $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 9}}$. Die Ersetzung ist $u = x^3 + 9$, sodass $du = 3x^2\, dx$ und daraus $x^2\, dx = \frac{1}{3}\, du$. Wir schreiben für das Integral

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 9}} = \int \frac{\frac{1}{3}\, du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 9} + c$$

Die Substitution führt dann zu einfachen Ausdrücken, wenn die Ableitung ansatzweise schon vorhanden ist. Hier also x^2 als Teil von $(x^3)'$. ◁

29.8 Übung $\int \frac{2x dx}{x^2 - 1}$. Der Zähler ist die Ableitung des Nenners. Damit wird es einfach. Wir setzen $u = x^2 - 1$, sodass $du = 2x\, dx$ und $dx = du/2x$. Somit

$$\int \frac{2x dx}{x^2 - 1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |x^2 - 1| + c$$

◁

29.9 Übung Gesucht wird $\int \tan(x) dx$. Im ersten Schritt ersetzen wir $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ und nutzen aus, dass die Cofunktion die Ableitung ist, also die Ersetzung $u = \cos(x)$, sodass $du = -\sin(x) dx$ und $\sin(x) dx = -du$. Damit

$$\begin{aligned}\int \tan(x) dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \\ &= \int \frac{-du}{u} = -\ln |u| + c = -\ln |\cos(x)| + c\end{aligned}$$

◁

Kreisfunktionen

29.10 Übung Wir suchen eine Lösung für $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Wenn wir unbekümmert setzen $w = 1 - x^2$, daraus $dw = -2x dx$ und $dx = -dw/2x$ einsetzen, dann folgt $\int \frac{-dw}{2x\sqrt{w}}$. Nun sind aber nicht alle x weg. Somit ist dies kein erfolgreicher Weg. Man hat sich erinnert, dass $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ ist und somit formell $\sin^2(y) = 1 - \cos^2(y)$. Wenn man also $x = \cos(u)$ setzt, $dx = -\sin(u)du$, dann sieht die Sache schon besser aus:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin(u)du}{\sin(u)} = -\int 1 du = -u$$

Zurücksubstituieren mit $\arccos(x) = u$ bringt dann die Lösung $J = -\arccos(x) + c$.
Hätte man $x = \sin(v)$ gewählt, $dx = \cos(v)dv$, dann wäre gefolgt:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(v)dv}{\cos(v)} = v$$

und damit $J = \arcsin(x) + c_2$. Keine Panik, denn es gilt $\arcsin(y) + \arccos(y) = \pi/2$. Beide Lösungen sind dieselbe Stammfunktion derselben Schar, die sich allerdings um eine Konstante unterscheiden. ◁

Nun machen wir ein Beispiel mit zweimaliger Substitution.

29.11 Übung Bestimme $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. Wir möchten den Radikand auf die bekannte Form $1 - w^2$ bringen, denn oben kennen wir die Lösung. Wir müssen $w^2 = 9/4x^2$ und damit $w = (3/2)x$ sowie $dw = (3/2)dx$, resp. $dx = (2/3)dw$ setzen. Also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-9x^2/4}} = \int \frac{2/3dw}{2\sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(w) + c = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + c$$

◁

Eine weitere Stammfunktion ergibt sich aus der (nicht besonders evidenten) Tatsachen, dass

$$\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Uns interessiert der allgemeinere Fall von $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$, mit $y = x/a$, $dy = dx/a$ folgt

$$a \cdot \frac{d}{dx}\arctan(x/a) = \frac{1}{1+(x/a)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\arctan(x/a) = \frac{1}{a^2+x^2}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 29.12. Mit einer Konstanten $a > 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (\text{für } |x| < a)$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Bestimmtes Integral

Wichtig 20. Beim bestimmten Integral müssen die Integrationsgrenzen mit transformiert werden, wenn man nicht zurücksubstituiert. ⊣

29.13 Übung Wir berechnen das bestimme Integral $\int_1^2 (2x+1)^3 dx$. Wir machen den Ansatz $u = 2x+1$, damit $du = 2dx$ und $dx = du/2$. Die Integrationsgrenzen müssen wir auch transformieren mit $u(x)$, $u_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ und $u_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ Eingesetzt:

$$\int_1^2 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_3^5 u^3 du = \frac{1}{8}u^4\Big|_3^5 = \frac{1}{8}(5^4 - 3^4) = 68$$

Die Transformation der Grenzen muss man nur machen, wenn man nicht vorher zurücksubstituiert. $\triangleleft$

Koordinatenverschiebung

Man kann eine Koordintenverschiebung als Spezialfall der Substitution betrachten. Man nennt diese Art auch *lineare Substitution*.

Satz 29.14. Für eine Konstante a gilt

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-\xi)d\xi.$$

Das kann man einfach zeigen mit der Substitution $u = a - x$ und $x = a - u$, woraus $dx = -du$. Mit $x = 0$ wird $u = a$ und mit $x = a$ wird $u = 0$ als Integrationsgrenzen:

$$\int_0^a f(x)\ dx = -\int_a^0 f(a-u)\ du = \int_0^a f(a-u)\ du = \int_0^a f(a-\xi)\ d\xi \quad \checkmark$$

29.15 Übung Bestimmen wir $A = \int_0^\pi \frac{x\ \sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$. Mit obigem Satz (und den Kreissymmetrien) versuchen wir $a = \pi$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\ \sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx \\
&= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\ \sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx - \int_0^\pi \frac{x\ \sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx - I \\
&= \frac{1}{2}\pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = -\frac{1}{2}\pi\ \arctan(\cos(x))\Big|_0^\pi = -\pi\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

29.5.2 Partielle Integration*

Die Produktregel aus der Differentialrechnung besagt, dass für zwei stetige differenzierbare Funktionen u und v die Gleichheit $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, gilt und mittels Aequivalenzumformung folgt

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'.$$

Mit dem Fundamentalsatz folgt

$$\int_a^b u' \cdot v = \int_a^b (u \cdot v)' - \int_a^b u \cdot v' = \Big[u \cdot v\Big]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

woraus sich die Regel zur partiellen Integration ergibt.

Satz 29.16. Partielle Integration Für zwei stetig in $[a, b]$ differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gilt :

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Für unbestimmte Integrale gilt: ist die Stammfunktion von $u \cdot v'$ bekannt, dann

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx.$$

Was ist der Nutzen dieser Regel? Von links nach rechts betrachtet erkennt man, dass $u'(x)$ und $v(x)$ gegeben sind, man aber dann $u(x)$ und $v'(x)$ braucht. Zudem soll $u \cdot v'$ einfacher oder bekannter sein als $u' \cdot v$.

29.17 Übung Als Beispiel wird das Integral $\int_2^{10} x \cdot \ln(x)\,dx$ betrachtet, wobei $\ln(x)$ der natürliche Logarithmus ist. Setzt man $u'(x) = x$ und $v(x) = \ln(x)$, so erhält man $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $v'(x) = \frac{1}{x}$. Dies ergibt dann

$$\begin{aligned}
\int_2^{10} x \cdot \ln(x)\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right]_2^{10} - \int_2^{10} \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right]_2^{10} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^{10} \\
&= 50\ln(10) - 2\ln(2) - 24\,.
\end{aligned}$$

◁

Anmerkung 29.18. Die Formel ist auch für ein Produkt der Form $u(x) \cdot 1$, also $v(x) = 1$ gültig.

29.19 Übung Wir suchen das unbestimmte Integral von $\int \ln(x)\,dx$. Wir setzen $u' = 1$ und $v = \ln(x)$ an:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)\,dx &= \int 1 \cdot \ln(x)\,dx \\
&= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx \\
&= x \cdot \ln(x) - x + c.
\end{aligned}$$

Das bestimmte in $[a, b]$ ergibt sich daraus als

$$\int_a^b \ln(x)\,dx = (x \cdot \ln(x))\Big|_a^b - x\Big|_a^b.$$

◁

29.20 Übung Wir betrachten das unbestimmte Integral $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$. Wir setzen $u' = -\sin(x)$ und $v = -\cos(x)$. Daraus folgt

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = -\cos^2(x) - \int \sin(x)\cdot\cos(x)dx.$$

Zwei Terme kann man zusammenfassen

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = -\cos^2(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$$

Was geschieht, wenn man aber $u' = \cos(x)$ und $v = \sin(x)$ wählt? Dann ist $u = \sin(x)$ und $v' = \cos(x)$, also

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = \sin^2(x) - \int \sin(x)\cdot\cos(x)dx.$$

und somit

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

Alles ist in Ordnung, denn es gilt ja $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$. Beide Resultate sind identische Stammfunktionen. ◁

29.21 Übung Wir suchen die Stammfunktion von $h(x) = \cos(x)\cdot e^x$. Die Wahl von u' und v spielt keine grosse Rolle, denn sowohl Integration als auch Ableitung beider Funktionen sind leicht. ◁

29.22 Übung Wir suchen $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)dx$. Wir wählen $v = x$ und $u' = \cos(x)$, so dass $u = \sin(x)$ wird und $v' = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,dx &= \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} u'(x)v(x)\,dx \\
&= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,dx \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

◁

29.5.3 Partialbruchzerlegung**

Gebrochenrationale Funktionen – das sind Brüche von Polynomen – können als Summen dargestellt werden. Für die Integration ist dies interessant, weil die Summanden einfacher sind als die rationale Funktion und deshalb auch einfacher zu integrieren sind. Wir betrachten hier nur ein einfaches Beispiele.

Die echte rationale Funktion, bei der der Grad des Nenners höher ist als der des Zählers, ist z.B.

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

Der Nenner hat die zwei reellen Nullstellen bei $x = 1$ und $x = -1$. Somit ist $f(x)$ auch:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

Der Ansatz ist nun eine Summe zu fordern und dann die Koeffizienten zu vergleichen:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Wir machen gleichnamig, indem wir mit $(x-1)(x+1)$ multiplizieren und dann mur noch die Zähler betrachten

$$x = A(x+1) + B(x-1) = x(A+B) + (A-B)$$

Koeffizientenvergleich liefert $A+B=1$ und $A-B=0$. Daraus folgt durch Einsetzen $A=B=\frac{1}{2}$. Damit kann man das Integral

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$

schreiben.

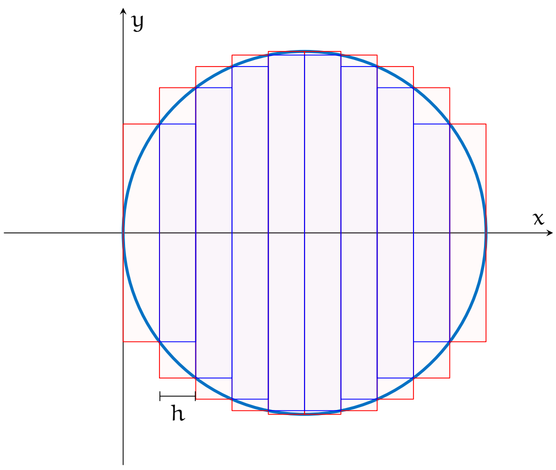
29.6 Mehrfachintegrale, Volumenberechnung

Wir haben die Integration eng mit der Flächenberechnung verknüpft. Die Fläche muss man aber abstrakter verstehen als die geometrische Grundvorstellung.

29.6.1 Rotationskörper*

Definition 102. Ein *Rotationskörper* ist ein Körper, dessen Oberfläche durch Rotation einer erzeugenden Kurve um eine Rotationsachse gebildet wird.

Erzeugende Kurve und Achse liegen in einer Ebene. Wir betrachten vor allem Kurven, die wir uns um die x-Achse gedreht vorstellen.



In der Abbildung sehen wir eine blaue Kreislinie $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, die wir uns um die x-Achse rotiert vorstellen. Deshalb sind die roten und blauen Flächen in Tat und Wahrheit Scheiben, die man von der Seite betrachtet. Jede Scheibe hat die Dicke h. Die roten Scheiben bilden den äusseren Treppenkörper, die blauen den inneren. Wir wir wissen, liegt das wahre Volumen des Rotationskörpers zwischen dem Volumen des äusseren und des inneren Treppenkörpers.

Eine Scheibe hat das Volumen eines Zylinders der Höhe h und der Kreisfläche πr^2, wobei jetzt der Radius durch die Funktion $f(x)$ gegeben ist. Somit gilt $\Delta V_i = h\cdot\pi\cdot f(x_i)^2$. Nun interessiert uns die Funktion (oder das Volumen). Wir betrachten zuerst nur die eine Hälfte, weil der Körper ja symmetrisch ist, also $x\in[0,R]$. Wenn wir n Scheiben schneiden, dann ist $h=R/n$. Der Radius der Scheiben an den Stellen $x_i = i\cdot h$ ist $f(x_i)^2 = R^2-(i\cdot h-R)^2 = 2ihR-(ih)^2$. Das Volumen einer Scheibe $\pi\cdot h\cdot(2ihR-(ih)^2)$ und dann für die Summe

$$S=\sum_{i=1}^{n}\pi\cdot h^2\cdot\left(2iR-(ih)^2\right) = \pi\cdot h^2\left[2R\sum_{i=1}^{n} i - h\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

Für die Summen kennen wir die Formeln (auch die zweite haben wir im Kapitel ?? hergeleitet)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1)$$

Damit wird die Summe

$$S = \pi \cdot h^2 \Big[2R\frac{n(n+1)}{2} - h\frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1) \Big]$$

oder jetzt mit $h = R/n$

$$S = \pi \cdot (\frac{R}{n})^2 \Big[Rn(n+1) - \frac{R}{n}\frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1) \Big]$$

Nun machen wir den Grenzübergang $n \to \infty$

$$\begin{aligned} V_{1/2} &= \lim_{n\to\infty} \pi \cdot (\frac{R}{n})^2 \Big[Rn(n+1) - \frac{R}{n}\frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1) \Big] \\ &= \pi \cdot R^3 \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2n^3}{6n^3}) \\ &= \frac{2}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Das ist die halbe Kugel, die ganze ist das Doppelte, also

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Das war die Ochsentour, um nochmals das Konzept klar zu machen. Die andere Sichtweise ist viel einfacher, denn wir nehmen das Leibniz-Kalkül und können für das Volumen eine infinitesimale Scheibe schreiben:

$$dV(x) = \pi f(x)^2 dx \qquad \Leftrightarrow \qquad V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx + c$$

Wir setzen für $f(x)^2 = 2Rx - x^2$ und integrieren von $a = 0$ bis $b = 2R$ oder zwei Mal von 0 bis R:

$$\begin{aligned} V(x) &= 2\pi \int_0^R (2Rx - x^2)dx = 2\pi\Big[\int_0^R (2Rxdx - \int_0^R x^2 dx\Big] \\ &= 2\pi\Big[Rx^2\Big|_0^R - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^R\Big] \\ &= 2\pi(R^3 - R^3/3) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Satz 29.1. Bei Drehung der Kurve $f(x)$, $a < x < b$ um die $x-Achse$ entsteht ein Körper mit dem Volumen

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

29.2 Übung Wir bestimmen das Volumen eines Hyperboloiden, d.h. dem Körper erzeugt von einer Hyperbel $f(x) = 1/x$ in den Grenzen $a = 1$ und $b = 2.5$. Mit der Formel folgt

$$V_H = \pi \int_1^{2.5} \frac{1}{x^2} dx = -\pi \Big[\frac{1}{x}\Big]_1^{2.5} = \pi(1 - \frac{2}{5}) = \pi\frac{3}{5}$$

◁

29.3 Übung Wir versuchen uns am Volumen unter der Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$ zwischen $a = -4$ und $b = 4$. Der Integrand ist $f(x)^2 = (\frac{1}{2}x^2+10)^2 = \frac{1}{4}x^4 + 10x^2 + 100$. Das Volumen wird

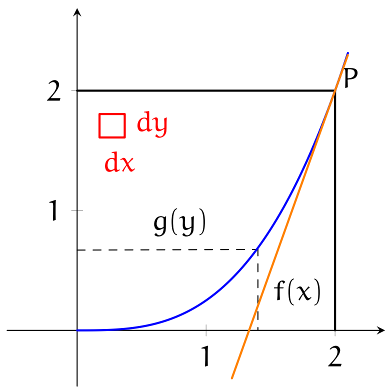
$$\begin{aligned} V &= \pi\Big[\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} x^4\,dx + \int_{-4}^{4} 10x^2\,dx + 100\int_{-4}^{4} dx\Big] \\ &= \pi\Big[\frac{1}{20}x^5 + 10\frac{1}{3}x^3 + 100x\Big]_{-4}^{4} \\ &= \pi\Big[1024/20 + 1024/20 + 640/3 + 640/3 + 400 - 400\Big] \\ &= \pi \cdot 462.67 \end{aligned}$$

◁

Wir haben die Körper um die x-Achse rotieren lassen. Nun kann man sich fragen, wie die Rotationskörper um die y-Achse aussehen. Die Funktion muss monoton sein.

Rotation um y-Achse

Es ist $f(x)$ gegeben und das Volumen eines Rotationskörpers um die y-Achse gesucht. Im Allgemeinen sind die Rotationskörper je nach Drehachse unterschiedlich. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: entweder die Inverse $g(y)$ aus $f(x)$ bestimmen und entlang dy integrieren, oder diese Darstellung zu transformieren.



29.4 Übung Es ist die Funktion $f(x) = y = x^3/4$ gegeben. Sie geht durch die Punkte $(0,0)$ und $(2,2)$. Wenn wir uns die Graphik um 90 Grad gedreht vorstellen und wir von den üblichen Variablen x und $f(x)$ abstrahieren, dann ist klar, dass das Rotationsvolumen

$$V_y = \pi\int_{y_0}^{y_1} g(y)^2 \cdot dy$$

ist. Die Inverse ist einfach $g(y) = x = (4y)^{1/3}$. Damit

$$V_y = \pi\int_0^2 (4y)^{2/3} \cdot dy = \pi \cdot 4^{2/3}\frac{3}{5}y^{5/3}\Big|_0^2 = \frac{3\pi}{5}2^{4/3}2^{5/3} = \frac{3\pi}{5}2^3 = \pi\frac{24}{5}$$

Nun zur zweiten Methode: Wir transformieren die Grenzen: $y_1 \to x_1$, $y_0 \to x_0$. Hier sind sie ohnehin gleich. Wir transformieren das Argument $g(y) = x$, und somit $g(y)^2 = x^2$. Wir transformieren das Differential: $dy \to dx$. Dazu leiten wir ab: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3/4x^2$ und somit $dy = 3/4x^2 dx$. In die Formel einsetzen:

$$V_y = \pi\int_{y_0}^{y_1} g(y)^2 \cdot dy \Rightarrow V_y = \pi\int_{x_0}^{x_1} x^2 \cdot \frac{3}{4}x^2 \cdot dx = \pi\frac{3}{4}\int_0^2 x^4\,dx = \pi\frac{3}{4\cdot 5}x^5\Big|_0^2 = \pi\frac{24}{5}$$

◁

29.5 Übung Wir erweitern das vorhergehende Beispiel, indem wir nun das Volumen des Rotationskörpers umd die y-Achse bestimmen, das von obiger Kurve und ihrer Tangente im Punkt $(2,2)$ eingeschlossen wird. Es ist die Differenz von Rotationskörper der Tangente und dem schon bekannten Volumen. Die Tangentengleichung ist mit $f'(x) = 3/4x^2$ an der Stelle $(2,2)$ einfach $f'(2) = 3$. Mit der Punkt-Geradengleichung $y - 2 = 3(x-2)$ folgt $y = 3x - 4$ oder $x = (y+4)/3$. Erste Methode:

$$\pi\int_0^2 \frac{1}{9}(y+4)^2 \cdot dy = \pi\int_0^2 (y^2+8y+16)\cdot dy = \pi\frac{1}{9}(\frac{1}{3}y^3+4y^2+16y)\Big|_0^2$$
$$= \pi\frac{1}{27}(8+48+96) = \pi\frac{152}{27}$$

Transformation: Wir brauchen $dy/dx = 3$ und somit $dy = 3dx$ und den Nullpunkt als Grenze: $y = 0 = 3x - 4$ uns somit $x_0 = 4/3$. Einsetzen

$$V = \pi\int_{4/3}^2 x^2\cdot 3\cdot dx = \pi 3\frac{1}{3}x^3\Big|_{4/3}^2 = \pi(8-\frac{64}{27}) = \pi\frac{216-64}{27} = \pi\frac{152}{27}.$$

Nicht per Zufall erhalten wir dasselbe Resultat.
Damit ist das eingeschlossene Rotationsvolumen $\pi(\frac{152}{27} - \frac{24}{5}) = \pi\frac{760-648}{135} = \pi\frac{112}{135}$. ◁

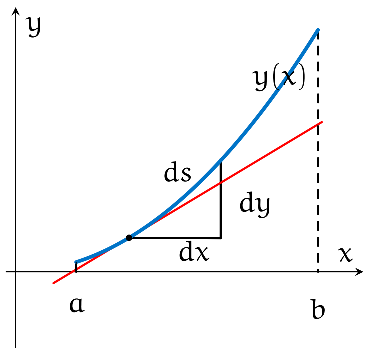
Aus den vorangegangenen Übungen wir ersichtlich, dass bei der Transformation eine Regelmässigkeit auftritt. Der Integrand ist immer x^2 multipliziert mit dem Differential $f'(x)dx$, also

$$V_y = \pi\int_{x_0}^{x_1} x^2\cdot f'(x)\cdot dx.$$

Man hat also die Wahl entweder abzuleiten für dy oder zu invertieren zur Bestimmung von $g(y)$. Wenn $f'(x) = 0$, dann muss man aber entlang dy integrieren.

29.6.2 Bogenlänge**

Die Bogenlänge ist sozusagen die Länge einer Kurve. Sie lässt sich auch durch Integration bestimmen. Dazu betrachten wir die Abbildung. Das Bogendifferential ds wird angenähert mittels Satz des Pythagoras durch $\sqrt{dx^2+dy^2}$ und mit $dy = f'dx$, der rot eingezeichneten Tangente an die Kurve im Punkt x wird



$$ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Man muss sich vorstellen, wie dx immer kleiner gewählt wird, so dass der Unterschied zwischen Bogen und Tangentenstück immer geringer wird. Damit kann man den Satz bekräftigen:

Satz 29.6. Eine Kurve $f(x)$ mit $a < x < b$ besitzt die *Bogenlänge*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

29.7 Übung Wir wollen den Umfang des Kreises als Bogenlänge bestimmen. Wir beschränken uns auf einen Viertel, dessen Länge wir dann mit 4 malnehmen. Die erzeugende Funktion ist $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} = (r^2 - x^2)^{1/2}$ mit dem Kreismittelpunkt im Ursprung. Mit der Kettenregel folgt die Ableitung zu: $\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(2x)$. Daraus folgt der Integrand

$$\sqrt{1 + (\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(2x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = r\sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}}$$

Damit ist folgendes Integral zu bestimmen:

$$U_{1/4} = r \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx$$

Glücklicherweise haben wir die Lösung schon gesehen bei der Ableitung der Arcus-Funktionen. Substitution $x = r\sin(u)$):

$$U_{1/4} = r \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r = r \cdot (\pi/2 - 0)$$

und damit

$$U = 4 \cdot U_{1/4} = 2\pi r$$

◁

29.8 Übung Ketten (und Seile) bilden wenn zwischen zwei Punkte aufgehängt eine sogenannte *Kettenlinie*. Häufig wird diese Kurve als Parabel angenommen, aber nähere Überlegungen zeigen, dass es sich um den $\cosh(x)$, den Cosinus hyperbolicus handelt. Er kann als

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

dargestellt werden. Wir benötigen $f'(x)$, das sich ergibt als

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

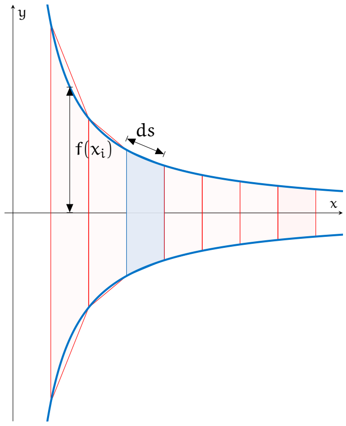
Die Bogenlänge ist gemäss Formel

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2} dx \\
&= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})} dx \\
&= \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})} dx \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^a - e^{-a} - e^{-a} + e^a\right] \\
&= e^a - e^{-a} \\
&= 2\sinh(a)
\end{aligned}$$

◁

29.6.3 Mantelfläche**

Mit der Bogenlänge fällt uns eine andere Frucht in den Schoss: die *Mantelfläche* eines Rotationskörpers.



Die Abbildung zeigt Streifen der Oberfläche, die die differentielle Fläche $dA = 2\pi r ds$ aufweisen. Es sind keine Kreisscheiben sondern sehr flache Kegelstümpfe. Der Radius ist wiederum von der erzeugenden Funktion $f(x)$ abhängig, nämlich $r = f(x)$. Anstatt ds setzen wir den gefundenen Ausdruck von oben ein und erhalten:

$$dA = 2\pi \cdot f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Damit ist die Mantelfläche nur von x abhängig.

Satz 29.9. Bei Drehung einer Kurve $f(x)$, $a < x < b$ um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper mit der Mantelfäche A gemäss

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

29.10 Übung Wir berechnen die Fläche des Mantels eines Kegelstumpfes, der durch die Gerade $y = 2x + 1$ begrenzt wird mit $a = 0$ und $b = 2$. Die Ableitung ist einfach $f'(x) = 2$. Mit der Formel folgt

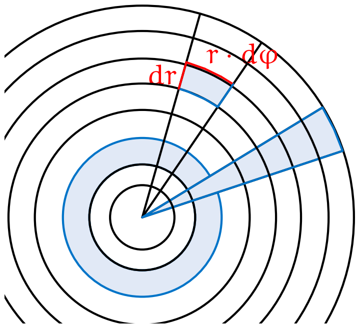
$$A = 2\pi \int_0^2 (2x + 1)\sqrt{1 + 2^2}dx = 2\pi\sqrt{5}\left[x^2 + x\right]_0^2 = 12\pi\sqrt{5}.$$

Die klassische Berechnung der Stereometrie gibt: $M = \pi s(r_1 + r_2)$ mit s Länge des Mantels, auch $s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$. Aus der Aufgabenstellung erkennt man $h = 2$, $r_1 = 5$ und $r_2 = 1$ geben $s = (4 + 16)^{0.5} = \sqrt{20}$. Damit $M = \pi 6\sqrt{20} = 12\pi\sqrt{5}$. ◁

29.6.4 Mehrfachintegral**

In Erinnerung an die Summen, wo wir ja Mehrfachsummen kennen, und den Zusammenhang von Integral und Summe, ist eine infinitesimale Summe nicht abwegig. Also

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_{jk} \longrightarrow \int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy$$



Wir betrachten die Abbildung, in der eine Scheibe in konzentrische Kreise und Radien aufgeteilt ist. Ein kleines Flächenstück ist das Differential $dA = dr \cdot r \cdot d\varphi$. Möchten wir dieses Stückchen ausdehnen, bis die ganze Scheibe überdeckt ist, so müsste dr von 0 bis R radial laufen und $r \cdot d\varphi$ von 0 bis 2π kreisförmig. Die Reihenfolge ist nicht wichtig, entweder summiert man die konzentrischen Ringe oder die radialen Spickel, wie in der Abbildung angedeutet. Die Grundfläche dieser Scheibe ist das Doppelintegral

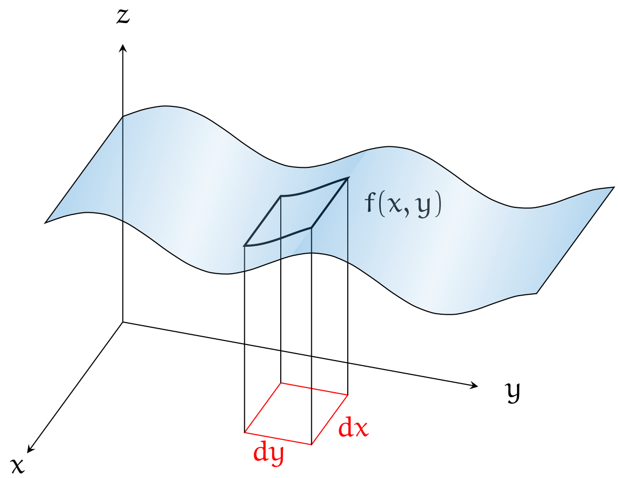
$$A = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} r d\varphi\right] dr = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R r dr\right] d\varphi = \int_0^R [2\pi r]\, dr = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \pi R^2$$

Dass man die Reihenfolge beliebig wählen kann, beweist der Satz von Fubini.

Die Abbildung veranschaulicht die Situation, bei der eine Funktion $z = f(x, y)$ gegeben ist. Hier wird das Volumen begrenzt durch die Fläche $f(x, y)$ und ein Rechteck mit $y \in [c, d]$ und $x \in [a, b]$. Das Volumen ergibt sich mit dem Gebietsintegral

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Die dargestellte Funktion könnte die Form $f(x, y) = \sin(y) + c$ haben.



29.11 Übung Rotierende Massen besitzen die sogenannte Massenträgheitsmomente J, einer Grösse aus der Physik. Man kann es als Widerstand des Gegenstands gegen das In-Drehung-Versetzen betrachten. Dabei spielt die Masse und der Abstand von der Rotationsachse eine Rolle (Hebel). Das Differential ist $dJ = dm \cdot r^2$. Das Differential der Masse m ist die Dichte γ mal Volumen, hier $dm = \gamma dV = \gamma \cdot r \cdot d\varphi dr dx$, zusammen also $dJ = r^2 \gamma \cdot r \cdot d\varphi dr dx$. Der Körper sei ein gerader Zylinder. Die Massenträgheit ist

$$\begin{aligned}
J &= \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \gamma \cdot dr d\varphi dx \\
&= \gamma(x_1 - x_0) \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \gamma \cdot dr d\varphi \\
&= \gamma(x_1 - x_0) 2\pi \int_0^R r^3 dr \\
&= \gamma(x_1 - x_0) 2\pi \frac{R^4}{4} \\
&= \frac{1}{2} \pi \gamma (x_1 - x_0) R^4
\end{aligned}$$

Weil die gesamte Masse $m = V \cdot \gamma = \gamma \pi R^2 (x_1 - x_0)$ist, kann man auch schreiben $J = \frac{1}{2} m R^2$. ◁

29.6.5 Variable Integrationsgrenzen**

Wir betrachten eine Integralfunktion $F(x)$

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

Die unabhängige Variable x ist die obere Integrationsgrenze. Was bedeutet nun ein Ding wie

$$\int_a^{g(x)} f(\xi)\,d\xi$$

Wir untersuchen folgenden Ausdruck

$$\int_a^x \int_0^{g(x)} 1\,d\xi\,dt$$

Wenn wir das bisher gesagte als Kalkül verstehen, also als Spielregeln zur Manipulation von Symbolen, dann folgt

$$\int_a^x \int_0^{g(t)} 1\,d\xi\,dt = \int_a^x [g(t) - 0]\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$$

Nun kann man fordern, dass für eine Funktion als Integrationsgrenze genau dies zu verstehen ist. Wir folgern, dass

$$F(x) = F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(\xi)\,d\xi$$

Nun ein kleiner Abstecher zur Differentialrechnung: Die Kettenregel besagt $F'(g(x)) = f(x) \cdot g'(x)$ oder mit Leibniz

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF}{dg}\frac{dg}{dx} \qquad \text{mit} \qquad \frac{dF}{dg} = f(g(x))$$

Damit folgt die Kettenregel für das Integral als

Satz 29.12. Kettenregel für Integrale Ist $f(x)$ eine stetige Funktion in $[a,b]$ und $g(x)$ eine differenzierbare in $[a,b]$ dann gilt für

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt \quad \text{für } x \text{ in } [a,b]$$

dass

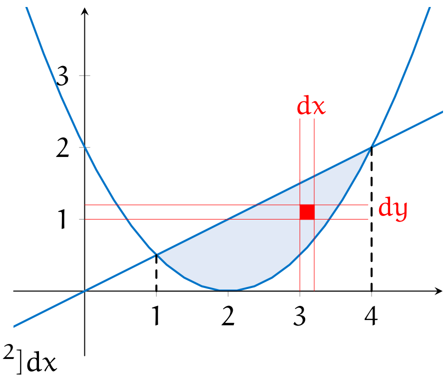
$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

29.13 Übung Es ist $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ für $x > 0$. Wir bestimmen $F'(x)$ gemäss Regel mit $f(t) = e^{t^2}$ und $g(x) = x^2$ woraus $g'(x) = 2x$. Also zusammen

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot (2x) = 2x\,e^{-x^4}$$

◁

Es kann durchaus sein, dass dem Lesenden noch nicht klar ist, wozu diese Betrachtung dienen soll. Deshalb machen wir ein anschauliches Beispiel.



Wir betrachten das Gebiet, das von Gerade $y = 0.5x$ und Parabel $y = 0.5(x-2)^2$ eingeschlossen ist. Wir bestimmen die Fläche, indem wir $dA = 1\,dx\,dy$ integrieren. Somit

$$A = \int_1^4 \int_{0.5(x-2)^2}^{0.5x} dy\,dx$$

Zuerst in y-Richtung:

$$A = \int_1^4 [0.5x - 0.5(x-2)^2]dx$$

und dann in x-Richtung

$$A = 0.5\left[\frac{x^2}{2} - \frac{(x-3)^3}{3}\right]_1^4 = \frac{16}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{-8}{3} = \frac{1}{12}(48 - 2 - 3 - 16) = \frac{27}{12}$$

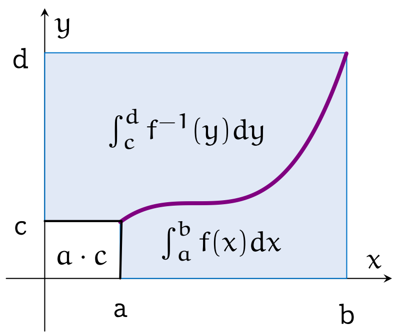
Wir kontrollieren das Resultat, indem wir altbacken die Differenz der Flächen bilden:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 0.5x\,dx - \int_1^4 0.5(x-2)^2 dx = 0.5\left[x^2/2 - (x-2)^3/3\right]_1^4 \\ &= 0.5[8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}] \\ &= \frac{0.5}{6}[48 - 16 - 3 - 2] = \frac{1}{12}27 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel hat die variable Grenze keinen Vorteil, aber in vielen Anwendungen ergibt sich das Integral als mit variablen Integrationskonstanten und damit als verkettete oder mittelbare Funktion.

29.6.6 Integral der Umkehrfunktion**

Der Abbildung kann man schön entnehmen, dass ein relative einfacher Zusammenhang zwischen Funktion uns seiner Umkehrfunktion besteht. Wir lesen direkt den Satz ab, der nach Laisant benannt ist. Die Voraussetzung ist, dass die Funktion invertierbar ist. Das setzt voraus, dass die Funktion monoton ist, weil sonst die Inverse den "Vertikalitätstest" nicht besteht. Das heisst, die Funktion darf nur einmal eine Vertikale schneiden.



Satz 29.14. Für eine reellwertige, stetige und invertierbare Funktion $f(x)$ gilt:

$$\int_c^d f^{-1}(y)\,dy + \int_a^b f(x)\,dx = bd - ac$$

29.15 Übung Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \ln(x)$ in $[2, 5]$ mit bekannter Inversen $f^{-1}(y) = \exp(y)$. Anstatt $\int_2^5 \ln(x)dx$ bestimmt man $\int_c^d \exp(y)dy$ mit $c = \ln(2)$ und $d = \ln(5)$

oder

$$\begin{aligned}\int_2^5 \ln(x)\,dx &= bd - ac - \int_c^d \exp(y)\,dy \\ &= 5\ln(5) - 2\ln(2) - \exp(y)\Big|_{\ln(2)}^{\ln(5)} \\ &= 5\ln(5) - 2\ln(2) - (2-5) \\ &= 3 + 5\ln(5) - 2\ln(2)\end{aligned}$$

Man könnte auch allgemein schreiben $\left[x + x\ln(x)\right]\Big|_a^b$

Man vergleiche diese Lösung mit Übung 29.19 auf Seite 29-18, wo wir mit partieller Integration ans Ziel gelangt sind. ◁

Damit beenden wir dieses Kapitel.

Aufgaben

6.16 Finde die Stammfunktionen zu

(a) $f(x) = 5$ **(b)** $f(x) = x^4 + 6x^3 + x$ **(c)** $f(x) = nx^{n-1}$ **(d)** $f(x) = \sin(2x)$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(ax)}$ **(f)** $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

6.17 Rechne aus

(a) $\int_0^1 x^2 dx$ **(b)** $\int_{-1}^1 x^2 dx$ **(c)** $\int_{-1}^1 (x^2+3x-4)dx$ **(d)** $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$ **(e)** $\int_0^4 \sqrt{x}dx$

(f) $\int_{-1}^1 2e^x dx$ **(g)** $\int_1^{16} \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

6.18 Gegeben ist $f''(x) = 2x^2 - 3x + 1$, gesucht ist $f(x)$ mit den Bedingungen $f(0) = 2$ und $f'(0) = 3$.

18 Einmal integrieren ergibt $f'(x) = 2/3x^3 - 3/2x^2 + x + c_1$ und nochmals $f(x) = 2/12x^4 - 1/2x^3 + 1/2x^2 + c_1x + c_2$. Aus $f'(0) = 3 = c_1$ und $f(0) = 2 = c_2$. Somit

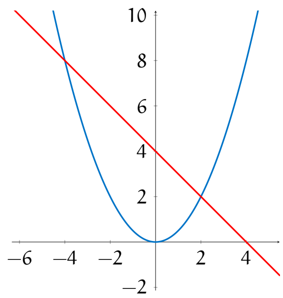
$$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$$

6.19 Wie gross ist die Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = 12x^2 - 4x^3$ und der x-Achse?

19 Wir müssen die Nullstellen finden, denn sie sind die Integrationsgrenzen. Eine zweifache ist $x = 0$. Damit folgt $12 - 4x = 0$ und $x = 3$. Das Integral gibt (unbestimmt) $F(x) = 4x^3 - x^4$. Die Fläche ist also $F(3) - F(0) = 4 \cdot 27 - 81 - 0 + 0 = 108 - 81 = 27$.

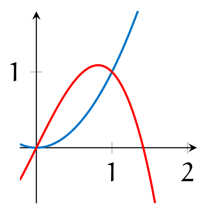
6.20 Berechne das Flächenstück, das zwischen den folgenden Kurven eingeschlossen ist: $y_1 = x^2/2$ und $y_2 = 4 - x$.

20 Wir suchen die Schnittpunkte, die dann als Integrationsgrenzen dienen. Also $x^2/2 = 4 - x$ oder $x^2 + 2x = 8$ mit quadratischem Ergänzen $(x+1)^2 - 1 = 8$ und $(x+1)^2 = 9$, radizieren $x + 1 = \pm 3$ damit $x_{1,2} = -1 \pm 3 = \{-4, 2\}$. Die Fläche ist das Integral $A = \int_{-4}^{2} (4 - x - x^2/2)dx$ und $[4x - x^2/2 - x^3/6]_{-4}^2 = [8 - 2 - 4/3] - [-16 - 8 + 64/6] = \frac{1}{3}[24 - 6 - 4 + 48 + 24 - 32] = \frac{1}{3}[54] = 18$.



6.21 In welchem Verhältnis teilt die Gerade $y_1 = x^2$ das Flächenstück, das zwischen der Kurve $y_2 = 2x - x^3$ und der x-Achse im ersten Quadranten liegt?

21 Als erstes machen wir eine Skizze



Wo schneiden sich die Kurven? Bei $y_1 = y_2$ oder $x^2 = 2x - x^3$. Aequivalent $x = 2 - x^2$ oder $x^2 + x - 2 = 0$. Quadratisches Ergänzen bringt $(x + 1/2)^2 - 1/4 - 2 = 0$ und $(x + 1/2)^2 = 9/4$. Radizieren $x + 1/2 = \pm 3/2$ und $x = -1/2 \pm 3/2$. Im ersten Quadranten liegt nur $x = 2/2 = 1$. Wo schneidet die zweite Kurve die x-Achse? Aus $y_2 = 0 = 2x - x^3$ folgt zum einen $x = 0$ und die Gleichung $0 = 2 - x^2$. Daraus folgt die zweite Nullstelle als $x = \sqrt{2}$. Die erste Kurve muss man zwischen $[0, 1]$ integrieren, die zweite zwischen $[0, \sqrt{2}$.

Das Verhältnis ist die Fläche $A_1 = [\int (2x - x^3)dx - \int x^2 dx]\big|_0^1$ zu $A_2 = \int (2x - x^3)dx\big|_0^{\sqrt{2}} - A_1$. Denn das rote Stück über der blauen Kurve ist die rote Fläche minus die blaue Fläche. Weiter folgt $A_1 = [x^2 - x^4/4 - x^3/3]_0^1 = \frac{5}{12}$ und $A_2 = [x^2 - x^4/4]_0^{\sqrt{2}} - A_1 = 2 - 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$. Damit ist das Verhältnis $A_1 : A_2 = 5 : 7$.

6.22 Mit Substitution integrieren

(a) $\int (-5x + 8)^7 \, dx$ **(b)** $\int A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \, dt$ **(c)** $\int e^{3x-5} \, dx$ **(d)** $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

(e) $\int x \cdot e^{x^2} dx$ **(f)** $\int \cos(nx) \, dx$

22 **(a)** Setze $u = -5x + 8$, damit $\frac{du}{dx} = -5$ und $dx = -\frac{1}{5}du$ folgt $\int (-5x + 8)^7 \, dx = \int u^7 \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int u^7 du = -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^8}{8} = -\frac{1}{40}(-5x + 8)^8 + c$

(b) Setze $\omega t + \varphi = u$ und $\omega = \frac{du}{dt}$ damit $dt = \frac{1}{\omega}du$. Substituiert folgt $\int A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \, dt = \frac{A}{\omega} \cdot \int \sin u \cdot du = \frac{A}{\omega}(-\cos u) = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + c$

(c) Setze $u = 3x - 5$ und das Differential $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x - 5)$ damit folgt $dx = \frac{1}{3}du$. Eingesetzt und integriert: $\int e^{3x-5} \, dx = \int e^u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3} \cdot \int e^u du = \frac{1}{3}e^u = \frac{e^{3x-5}}{3} + c$

(d) Setze $u = \ln(x)$, das Differential $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(x))$ und nach dx aufgelöst $dx = x \cdot du$. Eingesetzt folgt $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx = \int \frac{u}{x} \cdot x \, du = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln(x))^2}{2} + c$

(e) Setze $u = nx$ und weiter $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(nx)$ umgeformt $dx = \frac{1}{n}du$, eingesetzt $\int \cos(nx) \, dx = \frac{1}{n} \int \cos(u) \, du = \frac{1}{n} \sin(u) = \frac{1}{n} \sin(nx)$

6.23 * Integriere partiell

(a) $\int (3x + 2) \cdot \sin(2x) \, dx$ **(b)** $\int e^x(2x^2 + 4)dx$ **(c)** $\int x \cdot e^{-x+1}dx$ **(d)** $\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x)dx$

(e) $\int x^2 \cdot \sin(x)dx$

23 **(a)** Setze $u = 3x + 2$ woraus $u' = 3$ und $v' = \sin 2x$ woraus $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Eingesetzt folgt $\int \underbrace{(3x + 2)}_{u} \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{v'} \, dx = \underbrace{(3x + 2)}_{u} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \cos 2x}_{v} \right) - \int \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \cos 2x}_{v} \right) \underbrace{3}_{u'} \, dx = -\frac{1}{2}(3x+2) \cos 2x + \frac{3}{2} \cdot \int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}(3x + 2) \cos 2x + \frac{3}{4} \cdot \sin 2x + c$

(b) Setze $u(x) = e^x = u'(x)$ und $v(x) = 2x^2 + 4$ $v'(x) = 4x$ folgt $\int e^x(2x^2 + 4) \, dx = e^x(2x^2 + 4) - \int e^x 4x \, dx$. Der letzte Integralterm muss wiederum partiell integriert werden, mit $w = 4x$ und $w' = 4$ wird aus $\int e^x 4x \, dx$ dann $e^x 4x - \int e^x 4 \, dx = e^x 4x + e^x 4$. Zusammen mit dem ersten Term folgt $e^x(2x^2 + 4) - e^x 4x + e^x 4 = e^x(2x^2 - 4x + 8)$

(c) Setze $u(x) = x$ und $v'(x) = e^{-x+1}$ und für die Differentiale $u'(x) = 1$ und $g(x) = -e^{-x+1}$. Eingesetzt folgt relativ einfach $\int x \cdot e^{-x+1}dx = -x \cdot e^{-x+1} - \int 1 \cdot (-1) \cdot e^{-x+1}dx = -x \cdot e^{-x+1} - e^{-x+1} = e^{-x+1} \cdot (-x - 1)$

(d) Setze $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = \frac{1}{x}$, woraus $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \ln(x)$. Eingesetzt $\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x)dx = \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x)dx$, umgeformt, denn ein Ausdruck kommt zweimal vor $2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x)dx = (\ln(x))^2$ womit dann $\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x)dx = \frac{(\ln(x))^2}{2}$. Man beachte: Dieselbe Aufgabe haben wir auch mit Substitution gelöst.

(e) Setze: $u(x) = x^2$ und $v'(x) = \sin(x)$ damit $u'(x) = 2x$ und $v(x) = -\cos(x)$, eingesetzt $A = \int x^2 \cdot \sin(x)dx = -x^2 \cos(x) + \int 2x \cos(x)dx$. Dieses letzte Integral berechnen wir wiederum partiell mit $u(x) = 2x$ und $v'(x) = \cos(x)$ sowie $u'(x) = 2$ und $v(x) = \sin(x)$ als $B = \int 2x \cos(x)dx = 2x \sin(x) - \int 2 \sin(x)dx = 2x \sin(x) + 2 \cos(x)$. Beide Teil zusammengefügt $A = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x)$

6.24 Berechnen Sie das bestimmte Integral

(a) $\displaystyle\int_1^2 |2x-3|dx$. [54‰] **(b)** $\displaystyle\int_2^1 e^{-\frac{1}{2}x-1}dx$ [48‰] **(c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(2x+\pi)dx$. [51‰]

24 **(a)** Wir erinnern, dass der Betrag $|x|$ immer positiv ist. Deshalb ist $|2x-3|$ für $x < 3/2$ dann $-(2x-3)$ und für $x \geqslant 3/2$ eben $(2x-3)$. Somit muss man das Integral in zwei Integrale aufspalten $A = A_1 + A_2 = \int_1^{3/2}(3-2x)dx + \int_{3/2}^2(2x-3)dx$ führt. Für $A_1 = \int_1^{3/2}(3-2x)dx$ gilt $A_1 = 3x - x^2\big|_1^{3/2} = 4.5 - 2.25 - 3 + 1 = 0.25$. $A_2 = x^2 - 3x\big|_{3/2}^2 = 4 - 6 - 2.25 + 4.5 = 0.25$. Damit $A = 2 \cdot 0.25 = 0.5$.

(b) Wir formen um: $e^{-1}\int_2^1 e^{-\frac{1}{2}x}dx$, mit $u = -\frac{1}{2}x$ folgt $du = -1/2dx$ und $dx = -2du$, also $-e^{-1}\int_2^1 e^u 2du = -2e^{-1}e^u\big|_2^1 = -2e^{-1}e^{-\frac{1}{2}x}\big|_2^1 = -2e^{-1}[e^{-1} - e^{-1/2} = -2(e^{-2} - e^{-3/2})$

(c) Substitution $u = 2x + \pi$, $du = 2dx$, $dx = du/2$, eingesetzt $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin(u)du$ integriert: $= -\frac{1}{2}\cos(u)\big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)\big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2}[\cos(\pi/2+\pi) - \cos(\pi)] = -\frac{1}{2}[0-1] = 1/2$.

6.25 Gegeben ist die Kurve f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$. Bestimmen Sie die Zahl $a > 2$ so, dass das Flächenstück, das durch den Graphen von f, die positive x-Achse sowie die Geraden $x = 2$ und $x = a$ begrenzt ist, den Flächeninhalt 5 hat. [70‰]

25 Substitution mit $u = x^2 - 1$ und $du = 2x\,dx$ sowie $dx = du/2x$ ergibt $3/2\displaystyle\int_2^a u^{-1}du = \frac{3}{2}\ln(u) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$ und nun

$$F = 5 = \frac{3}{2}\ln(x^2-1)\big|_2^a = \frac{3}{2}[\ln(a^2-1) - \ln(2)] = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(\frac{a^2-1}{2}) = 10/3$$

Daraus $a^2 - 1 = 2\exp(10/3)$ und $a^2 = 2\exp(10/3) + 1$ und $a = \sqrt{2\exp(10/3)+1} = 7.55$

6.26 Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - x^2 + 12$. Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das Tangente t bei $x = 0$ und Kurve f einschliessen. [52‰]

26 Tangente t: $f'(x) = 1/3x^2 - 2x$ $f'(0) = 0$, damit $y_t = 0x + f(0) = 12$. Bei $x = 0$ berührt die Tangente $f(x)$ und bei $f(b) = 12$ schneidet sie die Tangente, damit wird für Schnittpunkt $(b, 12)$ das b: $\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 12 = 12$ und $\frac{1}{9}x^3 - x^2 = 0$ und $\frac{1}{9}x - 1 = 0$ und $x = b = 9$. Wir integrieren $A = \int_0^9(1/9x^3 - x^2 + 12)dx = \left[1/36x^4 - 1/3x^3 + 12x\right]_0^9$. Numerisch $A = 182.25 - 243 + 108 = 47.25$. Nun müssen wir dies von der Fläche, Rechteck, unter der Tangente abziehen. Unter der Tangente ist $F = 9 \cdot 12 = 108$, also eingeschlossene Fläche $108 - 47.25 = 60.75$

6.27 Gegeben ist die Kurve f mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{x}$. Eine Parallele zur x-Achse begrenzt mit der Kurve f und der y-Achse ein Flächenstück mit Inhalt 9. Gesucht ist eine Gleichung für diese Parallele. [73‰]

27 Die Kurve geht durch den Ursprung, ist im 1. Quadranten immer positiv und wächst wenig als linear. Die gesuchte Fläche wird von oben begrenzt durch Parallele, unten von der Kurve und links von der y-Achse. Die Fläche ist also mit der Parallelen $y = c$: $F = c \cdot x - \int_0^x \sqrt{t}dt = cx - 2/3x^{3/2} = 9$. An dieser Stelle ist $f(x) = c = \sqrt{x}$. Damit wird die Gleichung $c \cdot c^2 - 2/3c^3 = 9$ und $1/3c^3 = 9$ sowie $c^3 = 27$ und endliche $c = 3$.

Die Alternative ist, sich die Kurve gespiegelt vorzustellen. Dann integrieren wir die Umkehrfunktion von 0 bis c. Also $y = \sqrt{x}$ daraus $x = y^2$ und $9 = \int_0^c y^2dy = c^3/3 = 9$ und $c^3 = 27$, so dass $c = 3$.

6.28 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^{0.5x}$. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches vom Grafen von f, der y-Achse und der Geraden $y = 2$ begrenzt ist. [60‰]

28 Wie vorhergehende Aufgabe: Integrationsgrenze $\exp(0.5b) = 2$, damit $0.5b = \ln(2)$ und $b = 2\ln(2)$. Damit Fläche: $A = 2b - \int_0^b \exp(0.5x)dx = 2b - [1/0.5\exp(0.5b) - 2\exp(0)]$. Mit $\exp(0.5b) = \exp(0.5 \cdot 2\ln(2)) = 2$ und $\exp(0) = 1$ folgt, alles eingesetzt $F = 2\left[2\ln(2) - 2 + 1\right] = 2[2\ln(2) - 1] = 0.773$

6.29 Der Graf der Funktion g mit $g(x) = 2e^{2x} - 1$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt. [71‰]

29 Wir müssen die Integrationsgrenzen finden. Zum einen muss $g(a) = 0$ sein und zum anderen $x = b = 0$. Deshalb $g(a) = 2\exp(2a) - 1 = 0$ und $\exp(2a) = 1/2$ woraus $2a = \ln(0.5)$ und $a = 0.5\ln(0.5)$. Die Fläche ist $A = \int_a^b (2\exp(2x) - 1)dx$ mit dem Integral $\left[\exp(2x) - x\right]_a^0$. Somit $A = (\exp(0) - 0 - \exp(\ln(0.5)) + 0.5\ln(0.5) = 1 - 0.5 + 0.5\ln(0.5) = 0.5 - 0.3466 = 0.153$

6.30 * Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4e^{-2x} - 1$ [100‰]

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.

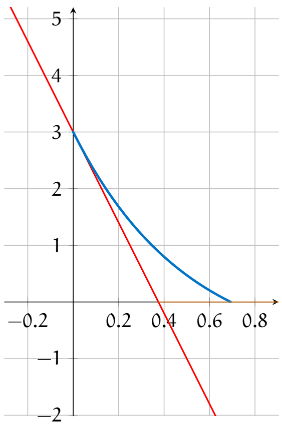
(b) Die in a) bestimmte Tangente begrenzt mit dem Graphen von f und der x-Achse ein Flächenstück. Lässt man dieses um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie seinen Volumeninhalt.

30 **(a)** Im Schnittpunkt mit y-Achse heisst, bei $x = 0$. Ableiten $f'(x) = -8\exp(-2x)$ bei $x = 0$ folgt Tangentensteigung $f' = -8$ und Tangente $y_t = -8x + b$, $b = 3$, also $y_t = -8x + 3$.

(b) Der Rotationskörper muss man als Differenz von zwei Körpern berechnen, einmal die gegebene Funktion minus den Körper erzeugt von der Tangente. Die Integrationsgrenze oben ist aus $f(b) = 4e^{-2b} - 1 = 0$ oder $e^{-2b} = 1/4$ und $-2b = \ln(1/4)$ sowie $b = -\ln(1/4)/2 = -\ln(1/2) = \ln(2) = 0.693$. Die Volumen $V_1 = \pi\int_0^b (4e^{-2x} - 1)^2 dx$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \pi\int_0^b (4e^{-2x} - 1)^2 dx \\
&= \pi\int_0^b (16e^{-4x} - 8e^{-2x} + 1)dx \\
&= \pi\int_0^b (-\frac{16}{4}e^{-4x} + 4e^{-2x} + x)dx \\
&= \pi\Big[-4e^{-4x} + 4e^{-2x} + x\Big]_0^{\ln(2)} \\
&= \pi\Big[-4\cdot\frac{1}{2^4} + 4\cdot\frac{1}{2^2} + \ln(2)\Big] - \pi\Big[-4 + 4 + 0\Big] \\
&= \pi[-\frac{1}{4} + 1 + \ln(2)] \\
&= \pi[\frac{3}{4} + \ln(2)]
\end{aligned}$$

und mit der oberen Grenze $d = 3/8$ aus der Tangente $y_t = 0 = -8d+3$, $V_2 = \pi\int_0^{3/8}(-8x+3)^2 dx = \pi\int_0^{3/8}(64x^2 - 48x + 9)dx = \left[64/3x^3 - 24x^2 + 9x\right]_0^{3/8} = \pi[\frac{64}{3}\frac{3^3}{8^3} - 24\frac{3^2}{8^2} + \frac{9\cdot 3}{8}] = \pi[\frac{1}{1}\frac{3^2}{8} - \frac{3^3}{8} + \frac{9\cdot 3}{8}] = \pi\frac{9}{8}$. (Einfacher: Dieser Körper ist ein gerader Kegel mit dem Volumen $\pi r^2 h/3$, hier $\pi 3^2\cdot 3/8/3 = \pi 9/8$.) Zusammen $V = \pi[\frac{3}{4} + \ln(2) - 9/8] = \pi[\ln(2) - 3/8] = 0.318\pi = 1$



6.31 * Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 4x^2 \ln(x)$. Die x-Achse, der Graph von f und die Vertikale $x = e$ begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (Tipp: Partielle Integration) [43‰]

31 Die Integrationsgrenzen sind 1 und e (gegeben), denn für $0 < x < 1$ idt der $\ln(x)$ negativ. Bei $x = 1$ wird $\ln(1) = 0$.
Wir setzen $u' = 4x^2$ und $v = \ln(x)$, daraus $u = 4/3x^3$ und $v' = 1/x$, also $\int f(x) = uv - \int(uv')dx = 4/3x^3 \ln(x) - \int 4/3x^3/xdx = 4/3x^3 \ln(x) - 4/3x^3/3$ und deshalb $I = 4/3(x^3 \ln(x) - x^3/3) = \frac{4}{3}x^3(\ln(x) - \frac{1}{3}) = \frac{4}{9}x^3(3\ln(x) - 1)$. Die Fläche ist $\frac{4}{9}x^3(3\ln(x) - 1)\big|_1^e$ oder $F = \frac{4}{9}e^3(3 - 1) - \frac{4}{9}(-1) = \frac{4}{9}(2e^3 + 1)$

6.32 * Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f_a(x) = a \cdot \sin(x \cdot a)$, wobei a ein reeller, nicht-negativer Parameter ist.
Der Graph dieser Funktion wird, zwischen $x = 0$ und bis zu ihrer ersten positiven Nullstelle, um die x–Achse rotiert. Wie muss a gewählt werden, damit das Volumen des dadurch begrenzten Rotationskörpers gleich 1 wird? [30‰]
Hinweis für das Integral: $\int (a\sin(ax))^2 dx = a^2(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$

32 Das Volumen ist $\pi \int_0^{x_0} f(x)^2 dx$. Die erst Nullstelle x_0 ist bei $\sin(\pi) = \sin(ax)$, also $x_0 = \pi/a$. Mit der Stammfunktion

$$V = \pi\Big[a^2(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}\Big]_0^{\pi/a} = \pi a^2\Big[\frac{\pi}{2a} - \frac{\sin(2\pi)}{4a} + \frac{\sin(0)}{4a}\Big] = \pi a^2\big[\frac{\pi}{2a}\big] = \pi\frac{1}{2}a\pi = 1$$

Denn die Sinus werden beide null. Damit $a = \frac{2}{\pi^2}$.

6.33 * Betrachten Sie die Funktion f: $y = f(x) = \dfrac{20x}{x^2 + 5}$

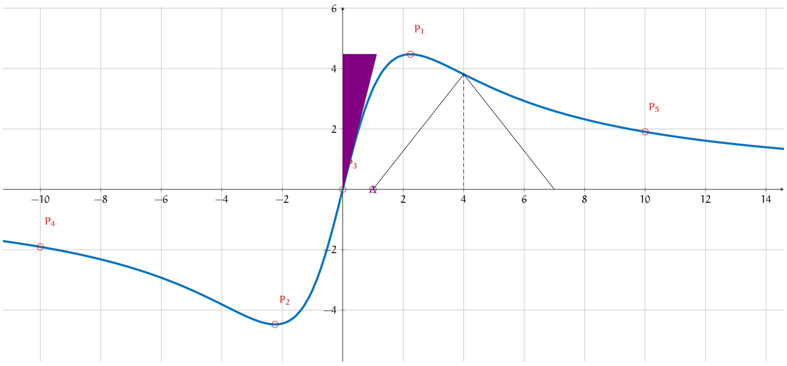
(a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich, Asymptote, Symmetrie sowie Null- und Extremstellen der Funktion f. Begründen Sie die Art der Extrema. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f für x-Werte im Intervall [–10, 10] mithilfe von mindestens 5 berechneten Punkten. [94‰]

(b) Zeigen Sie mithilfe der Substitutionsmethode, dass $F(x) = 10 \cdot \ln(x^2 + 5)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. [47‰]

(c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Tangente im Kurvenpunkt $(0, 0)$, dem Graphen der Funktion f sowie der Parallelen zur y-Achse durch das Extremum im 1.Quadranten. [47‰]

(d) Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks APB mit $A = (1, 0)$, $P = (u, v)$ und $B = (u + 3, 0)$ mit $v = f(u)$ für $u > 0$. [63‰]

33 **(a)** Definitionsbereich D und Wertebereich W sind beide $\mathbb{R}$ oder $(-\infty, \infty)$, denn es hat keine Polstellen. Asymptoten sind zweimal 0 für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ $y \to 0$, denn $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Nullstelle hat ein eine einzige bei $x = 0$.
Extrema: Ableitung ist $f'(x) = ((20x)(x^2+5)^{-1})$ mit Produktregel $f' = 20(x^2+5)^{-1} - (20x)(x^2+5)^{-2}(2x)$, gleich $\dfrac{20(x^2+5) - 40x^2}{(x^2+5)^2} = \dfrac{20(x^2+5-2x^2)}{(x^2+5)^2} = \dfrac{20(5-x^2)}{(x^2+5)^2}$. Wir setzen $x^2 = 5$ und bestimmen $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$. Bei $x = \sqrt{5}$ ist ein absolutes Maximum, bei $x = -\sqrt{5}$ ein Minimum.
Fünf Punkte: $(-10, -1.904762)$, $(-\sqrt{5}, -4.47)$, $(0, 0)$ $(\sqrt{5}, 4.47)$, $(10, 1.904762)$



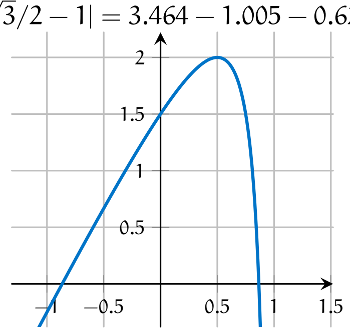
(b) Wir setzen $u = x^2 + 5$ und $du = 2xdx$ sowie $dx = du/2x$, einsetzen $\int \frac{20x}{x^2+5} dx = \int \frac{20x}{2xu} du = \int \frac{10}{u} du = 10 \ln(u) + c = 10 \ln(x^2 + 5) + c$.
(c) Tangente in $(0, 0)$: $f'(0) = \frac{20(5)}{(5)^2} = 100/25 = 4$, damit $y = 4x$, Maximum bei $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, also $4x_t = 2\sqrt{5}$ und $x_t = \sqrt{5}/2$. Fläche $F = 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}/2 =$
(d) Wir benennen ein wenig um: $P = (x, f(x))$, das Dreieck hat die Basis $(x - 1) + 3$ und die Höhe $f(x)$. Somit ist die Fläche $A = f(x)(x + 2)/2$ und ein Maximum evtl. bei $A'(x) = 0$. $A = \frac{10x(x+2)}{x^2+5}$ und somit $A'(x) = \frac{20(x+1))}{x^2+5} - \frac{10x(x+2)(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{20(x+1)(x^2+5)-20x^2(x+2)}{(x^2+5)^2} = 0$ woraus $20(x + 1)(x^2 + 5) - 20x^2(x + 2) = 0$ und

$$\begin{aligned}
20(x + 1)(x^2 + 5) - 20x^2(x + 2) &= 0 \\
20(x^3 + 5x + x^2 + 5) - 20(x^3 + 2x^2 &= 0 \\
\cancel{x^3} + 5x + x^2 + 5 - \cancel{x^3} - 2x^2 &= 0 \\
-x^2 + 5x + 5 &= 0 \\
(x - 2.5)^2 - 6.25 - 5 &= 0 \\
(x - 2.5)^2 &= 11.25 \\
x &= 2.5 \pm \sqrt{11.25}
\end{aligned}$$

Damit $x_1 = \{5.85\}$ Die Fläche ist $A = \frac{1}{2} \frac{20x(x+2)}{x^2+5} = 11.7$

6.34 * Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1.5}{x + 1}$. Der Graph von f und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt. [33‰

34 Die Nullstellen sind bei $y = 0$, also $2x^2 - 1.5 = 0$ und $x^2 = 1.5/2 = 0.75$. Damit $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}/2$. Damit ist die Fläche $A = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2x^2-1.5}{x+1} dx$. Der Integrand ist ein unechter Bruch, wir machen die Polynomdivision (mit Rest): $(2x^2 - 1.5) \div (x - 1) = 2x + 2 + \frac{0.5}{x-1}$ Nun integrieren wir $\int (2x + 2 + \frac{0.5}{x-1}) dx = x^2 + 2x + 0.5 \ln|x - 1| \Big|_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}$. Numerisch (der erste Term fällt weg): $2\sqrt{3} + 0.5 \ln|\sqrt{3}/2 - 1| - 0.5 \ln|-\sqrt{3}/2 - 1| = 3.464 - 1.005 - 0.6238 = 1.835$



6.35 * Zeigen Sie mithilfe partieller Integration, dass $F(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot \left(\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)\right)$ eine Stammfunktion von $f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot \sin(x)$ ist. [50‰]

35 Diese Aufgabe kann man nur schnell lösen, wenn man übersichtlich arbeitet. Wir sollen also $\int (e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot \sin(x)) dx$ bestimmen. Als erstes setzen wir $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ um weniger schreiben zu müssen. Dann setzen wir z.B. $u(x) = e^{ax}$ und leiten ab und integrieren:

$$u = e^{ax} \to \begin{cases} u' = ae^{ax} = au \\ U = \frac{1}{a} e^{ax} = u/a \end{cases}$$

und

$$v = -\cos(x) \to \begin{cases} v' = \sin(x) \\ V = -\sin(x) \end{cases}$$

Nun ist partiell integriert $f(x) = \int uv' = uv - \int u'v$. Ausgeschrieben

$$-e^{ax} \cos(x) + \int ae^{ax} \cos(x)$$

Der letzte Term wird nochmals partiell integriert

$$\int a e^{ax}\cos(x)dx = -a\int vu = -a[Vu - \int Vu'] = -a[-\sin(x)e^{ax} + \int \sin(x)ae^{ax}]$$

Wir setzen zusammen:

$$F(x) = -e^{ax}\cos(x) + a[\sin(x)e^{ax} - a^2 \underbrace{\int e^{ax}\sin(x)dx}_{F(x)}$$

Umgeformt

$$F(x)[1+a^2] = e^{ax}[a\sin(x) - \cos(x)]$$

Einsetzen von $a = -1/\sqrt{3}$, $1 + a^2 = 1 + 1/3 = 4/3$. Also

$$F(x) = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}[-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x) - \cos(x)]$$

Mit $3 = \sqrt{3}\sqrt{3}$ folgt

$$F(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}[\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)]$$

(Diese Aufgabe ist in 12 bis 15 Minuten kaum zu schaffen.)

Literaturverzeichnis

Bachmann, H. (1978). *Aufgabensammlung Analysis*. SABE, Zürich.

Corral, M. (2013). *Elementary Calculus*. Eigenverlag, Livonia, MI. http://mecmath.net/calculus/index.html.

Courant, R. und Robbins, H. (1973). *Was ist Mathematik?* Springer-Verlag, Berlin.

Deiser, O. (2021). *Analysis 1*. Eigenverlag, München. https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis1.

DMK/DPK (1977). *Formeln und Tafeln Mathematik, Statistik, Physik*. Orell Füssli, Zürich.

Dreetz, W. und Heise, H. (1943). *Weg zur Reifeprüfung: Mathematik*. Hirt, Breslau/Leipzig.

Fuchs, W. R. (1966). *Knauers Buch der Modernen Mathematik*. Droemersche Verlangsanstalt, München/Zürich.

Hefferon, J. (2020). *Linear Algebra*. Orthogonal Publishing. https://hefferon.net/linearalgebra/, von hier stammt das Layout, danke,.

Ineichen, R. (1972). *Arithmetik und Algebra 1 und 2*. SABE, Zürich.

Jeger, M. und Ineichen, R. (1971). *Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung: Aufgabensammlung*. Orell Füssli, Zürich.

Lietzmann, W. (1949). *Das Wesen der Mathematik*. Vieweg, Braunschweig.

Lübsen, H. (1876). *Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*. Brandstetter, Breslau.

Papula, L. (2014). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler : ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Springer, Braunschweig.

Schäfer, W., Georgi, K., und Trippler, G. (2002). *Mathematik-Vorkurs Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger*. Teubner, StuttgartLeipzigWiesbaden.

Stähli, F. und Lehmann, H. (1968). *Aufgabensammlung der Algebra*. Orell Füssli, Zürich, 14. edition.

Stitz, C. und Zeager, J. (2013). *Precalculus*. Eigenverlag, Salt Lake City. https://www.stitz-zeager.com/.

Wittmann, G. (2008). *Elementare Funktionen und ihre Anwendungen*. Spektrum, Akad.-Verl, Heidelberg.

Index