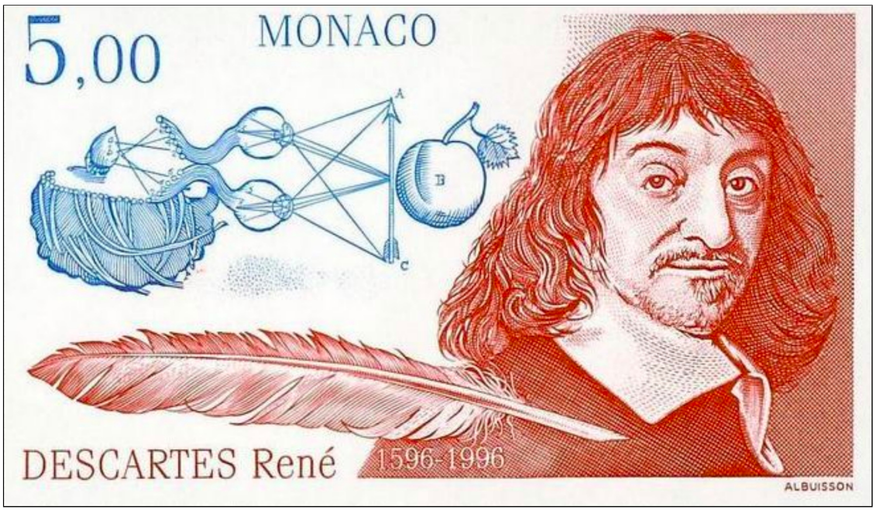
Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Teil IV
Analysis 1



9. April 2022

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Analysis 1

Kapitel 16

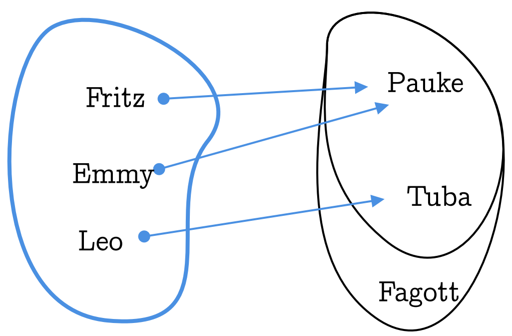
Funktionen und Graphen

16.1 Relation, Abbildung, Funktion

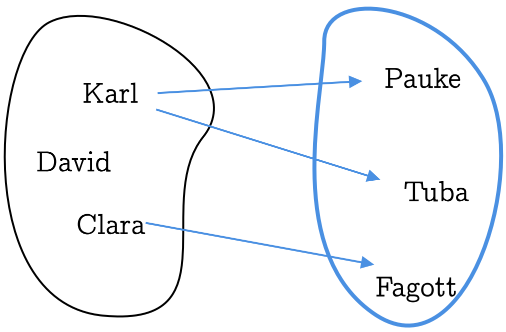
Wir beginnen mit Begriffen und Konzepten, die wir schon zu einem guten Teil eingeführt haben. Dennoch ist eine frische Erinnerung für die Weiterentwicklung sehr wichtig.
Eine Relation $R(x, y)$ drückt eine Beziehung zwischen Elementen von zwei Mengen X und Y aus. Sie bestimmt eine *Eigenschaft* der geordneten Paare (x, y). Nicht alle möglichen Paare von (x, y) besitzen diese Eigenschaft, nur die Elemente, also Paare, der sogenannte *Erfüllungsmenge* R. Damit ist R eine Teilmenge der Produktmenge $X \times Y$, die ja alle Paare umfasst. Es kann sein, dass $X = Y$ ist. Wir haben Relationen durch Pfeile dargestellt. In diesem Fall finden sich die Pfeile zwischen Elementen derselben Menge.
Beispiele, die herangezogen werden, stammen häufig aus persönlichen Beziehungen und Verhältnissen, also Eigenschaften wie "ist Mutter von" oder "ist älter als" etc.
Relationen haben selber Eigenschaften, die wir nur zum Teil schon besprochen haben. Hier zusammengefasst:

- symmetrisch $R(x, y) = R(y, x)$, "ist verheiratet mit",
- transitiv $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$, "ist älter als ",
- rechtseindeutig "x ist Sohn von Herrn y",
- linkseindeutig "x ist Vater von y",
- eineindeutig "x ist verheiratet mit y".

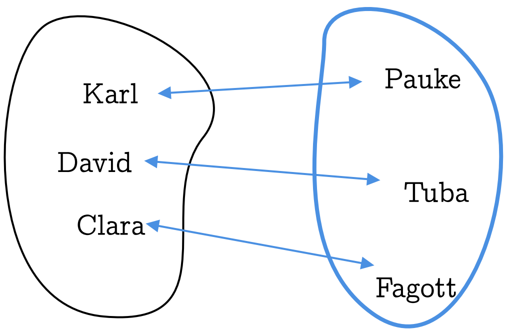
Man erkennt: Eineindeutig setzt sowohl Links- als auch Rechtseindeutigkeit voraus.



Die Richtungen links und rechts sind zu verstehen als "nach rechts" oder "nach links", ausgehend von der Grundmenge A zur Zielmenge B. In der Abbildung sieht man, dass von jedem Element genau ein Pfeil weggeht. Bei den Elementen von B können aber mehrere Pfeile ankommen. Das Fagott wird nicht zugeordnet, man sagt, die Relation sei nicht rechtsvollständig.



Die Situation ist Linkseindeutigkeit. Denn bei jedem der Elemente von B kommt nur ein Pfeil an. Dass von Karl zwei ausgehen interessiert nicht, resp. ist nicht verboten. Die Darstellung gilt ja auch für "x ist Mutter von y". Eine Frau kann ja mehrere Kinder haben, aber ein Kind hat (normalerweise) nur eine Mutter. Weil David aus A kein Instrument spielt, ist A in dieser Relation nicht linksvollständig.



In dieser Abbildung ist eine Relation gezeichnet, die sowohl links- als auch rechtseindeutig ist und somit *eineindeutig* oder *umkehrbar-eindeutig* genannt wird. Zudem ist sie links- und rechtsvollständig. Man könnte die Relation von A nach B auch umkehren und eine Zweite Relation, die von B nach A weist, zeigen. Man nennt diese Relation die *Inverse* zu $R(x, y)$.

16.1.1 Definitionen

Definition 1. Eine rechtseindeutige Relation f der Elemente x einer Menge A zu den Elementen y einer Menge B heisst *Abbildung*.

Anmerkung 16.1. Dass die Relation rechtseindeutig sein muss, bedeutet, dass jedes Element der Menge A genau einem Elemente y aus B zugeordnet ist.

Satz 16.2. Ist eine Abbildung f von X auf Y eineindeutig, dann ist auch die inverse Abbildung g von Y auf X eineindeutig.

Definition 2. Die Abbildung f in eine *Zahlenmenge* bezeichnet man als *Funktion*.

Wichtig 1. ☠ Durch eine Funktion wird eine Menge geordneter Paare (x, y) bestimmt, in der zu jedem x genau ein Paar (x, y) gehört. $\dashv$

Anmerkung 16.3. Wir haben also eine Spezialisierung von *Relation* zu *Abbildung* zu *Funktion*.

Definition 3. Die *Definitionsmenge* X einer Funktion $f : X \to Y$ ist die Menge aller x-Werte, für die die Funktion definiert ist.

Die *Wertemenge* oder *Zielmenge* Y einer Funktion $f : X \to Y$ ist die Menge aller y-Werte der Funktion.

Anmerkung 16.4. Wenn die Definitionsmenge ein reelles Intervall ist, dann spricht man auch von *Definitionsbereich*.

16.1.2 Notation

Für Funktionen gibt es mehrere Notationen oder Schreibweisen. Eine jüngere betont den mengentheoretischen Hintergrund. Davon gibt es zwei Varianten, die ausführliche und die kurze. Zu Zeiten Eulers verstand man unter einer Funktion vor allem eine Rechenvorschrift, die aus einem unabhängigen Zahlenwert den abhängigen hervorbringt.

Definition 4. Eine Funktion f kann man wie folgt bezeichnen

$$\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} f : A \to B \\ x \to 3x^2 \end{array} & f : x \to 3x^3 & f(x) = 3x^2 & y = 3x^2 \end{array}$$

Mathematiker, die es besonders genau nehmen, unterscheiden noch die Funktion f vom Funktionswert $f(x)$.

16.1.3 Rechnen mit Funktionen

Ausgangslage sind zwei Funktionen f und g, die beide die Menge M in die Menge $\mathbb{R}$ abbilden. Folgende Eigenschaften gelten für die Verknüpfung zweier Funktionen:

Eigenschaften 16.5. Funktionen

- Addition $f + g : x \to f(x) + g(x)$
- Subtraktion $f - g : x \to f(x) - g(x)$
- Produkt $fg : x \to f(x)g(x)$
- Quotient $\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)}$ für $g(x) \neq 0$.

16.6 Übung Es ist $h = f + g$ mit $f : x \to x^2$ und $g(x) = 2x$. Wie sieht h aus? Gemäss Eigenschaft gilt $h : x \to x^2 + 2x$ oder $h(x) = x^2 + 2x$. ◁

16.7 Übung Es ist $f : x \to x^3 + 2x^2$ und $g : x \to x^2$. Man bestimme $h = fg$ und $v = f/g$. Es folgt $h : x \to (x^3 + 2x^2)(x^2) = x^5 + 2x^4$ und $v : x \to (x^3 + 2x^2) : x^2 = x + 2$. ◁

Verkettung, Komposition

Eine *mittelbare* oder *verkettete* Funktion ist ein Funktion $f(\xi)$, deren Argument wiederum Funktionswerte $g(x)$ sind, also $h(x) = f(g(x))$. Aus der modernen Notation $f : A \to B$ und $g : B \to C$ entsteht mit dem allgemeinen Verknüpfungszeichen $\circ$ die Funktion $h = f \circ g : A \to C$. Damit ist ersichtlich, dass man zuerst g in Abhängigkeit von x bestimmt und dann f in Abhängigkeit von $g(x)$. Die Verkettung oder Komposition ist im allgemeinen nur dann möglich, wenn der Wertebereich der ersten Funktion W_g eine Teilmenge des Definitionsbereichs der zweiten Funktion D_f ist: $D_h = W_g \cap D_f$. Bei $f(g(x))$ nennt man f die *äussere* und g die *innere* Funktion.

16.8 Übung Es ist $f(x) = x + 1$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Dann kann man folgende zwei Kompositionen bilden: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x} + 1$ und $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x + 1}$. ◁

16.9 Übung Es ist $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = \sin(x)$. Dann ist $f \circ g = \exp(\sin(x))$ und $g \circ f = \sin(\exp(x))$. ◁

16.1.4 Operationen**

Wir kennen die Grundoperationen wie Addition und Multiplikation. Diese Operationen kann man auch unter den Funktionsbegriff vereinen mit folgender Definition.

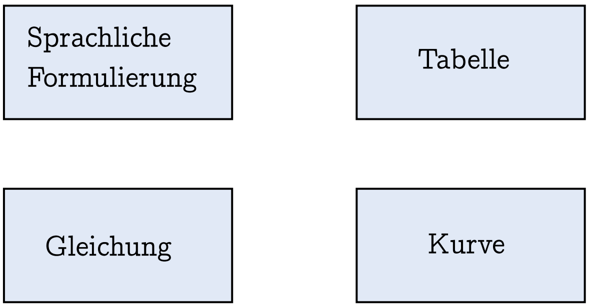
Definition 5. Eine auf der Menge M definierte *Operation* ist eine Funktion, welche die Menge $M^2 = M \times M$ in die Menge M abbildet,

$$f : M^2 \to M.$$

Zu den Operationen kann man die Frage nach den Eigenschaften wie assoziativ, kommutativ oder nach der Inversen, neutralem Element etc. stellen.
Neben den vier Grundoperationen kennen wir schon andere Operationen, nämlich den $\text{ggT}(a, b)$, den $\text{kgV}(a, b)$ und die Modulofunktion $\mathcal{M}(a, b)$.

16.2 Vier Darstellungen

Funktionen kann man auf mehrere Arten darstellen. Spontan kommen vier in Frage.



Sprachliche Formulierung

Die sprachliche kommt in der Mathematik selten vor ausser in Textaufgaben, in denen man das Problem zuerst modellieren muss bis man es in eine Gleichung oder ähnliches fasst. In Gesetzen hingegen kommen Formeln fast nie vor, weil davon ausgegangen wird, dass Formeln der Mathematik dem Bürger eher nicht zugänglich sind.
Eine sprachliche Formulierung von Funktionen kommt vor allem in Steuergesetzen vor. “Die Steuer beträgt für die ersten Fr. 10000.– Bemessungsgrundlage 3%, für die nächsten Fr. 10000.– 5% etc.”. Hier ist die Beschreibung eine *Anweisung zur Berechnung*. Sie verknüpft die Bemessungsgrundlage x, z.B. Verkaufspreis eines Grundstücks, mit dem zu zahlenden Steuerbetrag y.
Eine genauere Formulierung für eine Funktion ist z.B.: “Jeder Zahl der Definitionsmenge soll ihr Dreifaches im Quadrat zuzüglich 3 zugeordnet werden”. In dieser mehr mathematischen Formulierung wird der *Zuordnungsaspekt* betont, der zwischen Mengen bestehen kann.
Wenn die Definitionsmenge die Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$ sind, so entspricht dies der Tabelle

Definitionsmenge	1	2	3	4
Wertemenge	4	13	28	49

Wertetabelle

Die zugehörige Gleichung ist $y = 3x^2 + 3$ für $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Man kann die Paare der Wertetabelle, also $(1, 4)$, $(2, 13)$, $(3, 28)$ und $(2, 49)$ als Punkte des Koordinatensystems verstehen, so dass ihre Darstellung im Diagramm einen Ausschnitt einer Kurve wiedergibt. Hier sind alle Werte von Definitonsmenge und Wertemenge gegeben. Es gibt aber auch den Fall, in dem die Tabelle nur beispielhaft Wertepaare zeigt und es unterstellt wird, dass man Werte dazwischen annähern muss. Wenn nur die Tabelle vorliegt, dann greift man zur Vervollständigung auf die *Interpolation* zurück

Gleichung

Die Gleichung passt zur Vorstellung der Rechenvorschrift. Diese wird am besten durch $f(x)$ symbolisiert. Wenn $f(x) = 2x^2 - 3$ eine Funktion ist, dann folgt $f(0) = -3$, $f(1) = -1$ oder $f(-1) = -1$.

Kurve

Die Kurve ist eine geometrische Vorstellung einer Linie, die aus Punkten besteht. Kurven können auch geschlossene Linien sein, wie ein Kreis. Nicht jede Kurve ist eine Darstellung einer Funktion, denn diese muss ja rechtseindeutig sein.

Definition 6. Als *Graph* $\mathcal{G}$ einer Funktion f, auch *Funktionsgraph*, bezeichnet man die Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$ aus den Elementen x der Definitionsmenge und den zugehörigen Funktionswerten $f(x)$.

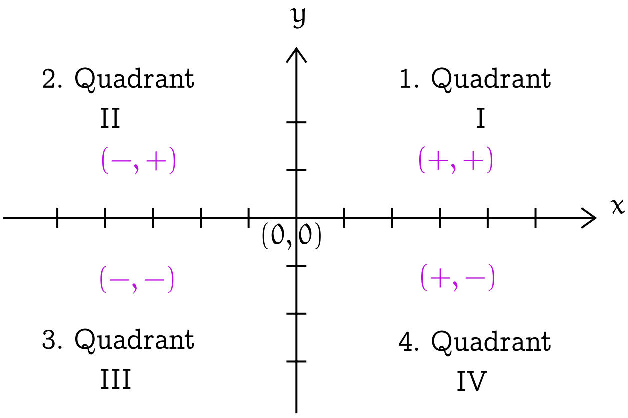
Das Wort Graph deutet zudem auf die zeichnerische Darstellung des Graphen dar. Dazu braucht es ein Konzept, wie man die Punkte visuell zeigt, eine *Zeichenebene* und Koordinaten.

16.3 Kartesische Koordinaten

Die kartesischen Koordinaten sind nach René Descartes, lateinisiert Cartesius, benannt. Deren Verwendung bedeutete einen grossen Sprung in der Mathematik, weil dadurch die Geometrie mit der Algebra verbunden wird. Geometrie wird berechenbar. Damit eröffnete sich das fruchtbare Feld der analytischen Geometrie.
Hauptmerkmele des kartesischen Koordinatensystems sind:

- der Nullpunkt, Origo oder Ursprung,
- zwei rechtwinklige Achsen, die durch den Ursprung gehen,
- Achsen, die von $-\infty$ bis ∞ laufen,
- die positive Richtung geht nach rechts und nach oben,
- vier Felder, die durch die Achsen getrennt sind,
- häufige, aber nicht zwingende Benennung als x- und y-Achsen.

Die Achsenbezeichnung ist häufig x und y. Je nach Anwendung kann das aber variieren. Beispielsweise benutzt man die Zeit t in physikalischen Betrachtungen. Anstatt y schreibt man aber auch $f(x)$.



Die horizontale Achse nennt man *Abszisse* und die vertikale Achse *Ordinate*. In der Funktionsinterpretation als Vorschrift bildet die Abszisse die Definitionsmenge der unabhängigen Variablen, wogegen die Ordinate die abhängige Variable darstellt.

Die vier Bereiche heissen *Quadraten* und werden von Nordosten im Gegenuhrzeigersinn mit 1 bis 4 nummeriert.

Punktdarstellung

Ein Graph besteht aus geordneten Wertepaaren $(x, f(x))$. Diese zwei Werte nennt man Koordinaten. Ein Punkt wie P wird mit einem Grossbuchstaben bezeichnet.

Definition 7. Ein Punkt P im kartesischen Koordinatensystem schreiben wir als $P(x_P, y_P)$, $P(x_P|y_P)$ oder $P = (x_P, y_P)$.

16.1 Beispiel Punkte können sein $(1, 2)$, $Q(3, 4)$, $P(x_1, y_1)$, $P(x_1|y_1)$, $M = (1, 2)$ etc. ◁

Ein Punkt (x_P, y_P) wird in der Zeichenebene festgelegt, welche das kartesische Koordinatensystem darstellt, indem man (1) vom Ursprung x_P Einheiten nach rechts geht und (2) von diesem Punkt um y_P nach oben geht. Dies gilt für positive Werte. Für $(1, 2)$ geht man 1 nach rechts und 2 nach oben. Für $(-2, 1)$ geht man 2 nach links und 1 nach oben und für $(-3 - 4)$ geht man 3 nach links und 4 nach unten. Jeder Quadrant hat eine eigene Vorzeichenkombination.

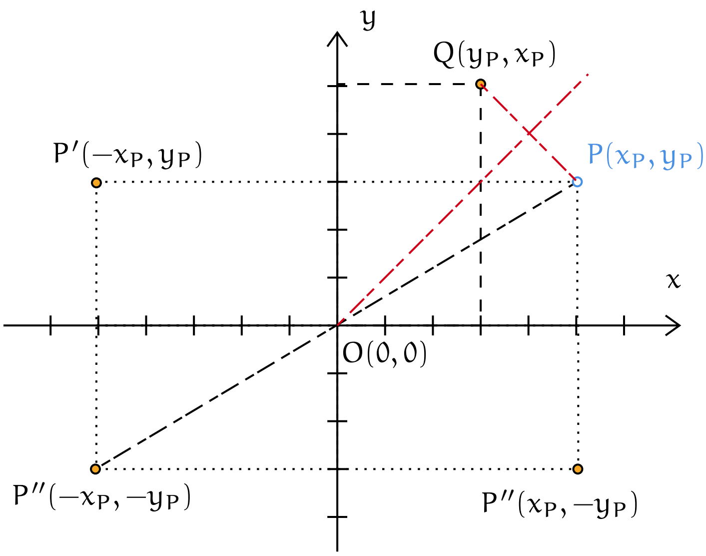


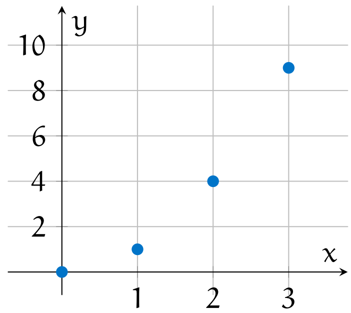
Abbildung 16.1

In der Abbildung sehen wir den Punkt P mit seinen Koordinaten x_P und y_P.

Eigenschaften 16.2. xy**-Ebene**

- Zwei Punkte (a, b) und (c, d) sind gleich, genau wenn $a = c$ und $b = d$.
- (x, y) liegt auf der x-Achse, genau dann, wenn $y = 0$.
- (x, y) liegt auf der y-Achse, genau dann, wenn $x = 0$.
- Der Ursprung ist $(0, 0)$; er alleine liegt auf beiden Achsen.

16.3 Übung Wir tragen folgende Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem ein: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ und $(3, 9)$. Wir bemerken, dass es sich um die Quadrate von x handelt. Da die Grössordnungen recht unterschiedlich sind, empfiehlt es sich, ein nicht kongruentes System zu verwenden. D.h. die Einheitsabstände auf x- und y-Achse sind nicht gleich. ◁



Symmetrien

In der Geometrie ist Symmetrie ein wichtiges Konzept. Dieses kann man auch an der geordneten Paare von unabhängiger und abhängiger Variable erkennen. Wir betrachten Abb. 16.1. Ausgehend von $P(x_P, y_P)$ kann man die Punkte P', P'' und P''' als Spiegelbilder erkennen. Die Beträge der Koordinaten bleiben fest, es ändern nur die Vorzeichen.

Eigenschaften 16.4. Symmetrie Zwei Punkte (a, b) und (c, d) in der Zeichenebene nennt man

- **symmetrisch bezüglich der x-Achse**, wenn $a = c$ und $b = -d$
- **symmetrisch bezüglich der y-Achse**, wenn $a = -c$ und $b = d$
- **punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs**, wenn $a = -c$ und $b = -d$
- **symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden** $y = x$, wenn $a = d$ und $b = c$

16.5 Übung Es ist der Punkt $P(2, -3)$ gegeben. Man finde die symmetrischen Punkte. Bezüglich der x-Achse ist dies $(2, 3)$, bezüglich y-Achse sodann $(2, 3)$. In Bezug zur Ursprung resultiert $(-2, 3)$. Bezüglich der Winkelhalbierenden des vierten Quadraten, also der Geraden $x = -y$, dann $(3, -2)$. Die Beträge werden vertauscht, die Vorzeichen nicht. ◁

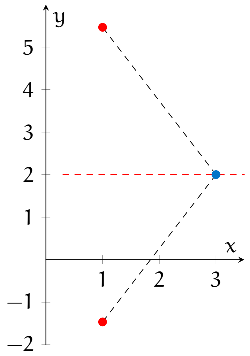
Abstand in der Zeichenebene

Aufgrund des Koordinatensystems kann man den Abstand zweier Punkte durch den Satz des Pythagoras berechnen. Zwei Punkte $P(0, 3)$ und $Q(4, 0)$ unterscheiden in der x-Komponenten durch die Differenz $4 - 0 = 4$ und der Differenz der y-Komponenten $3 - 0$. Das Vorzeichen spielt keine Rolle, denn wir werden ja quadrieren. Es folgt mit dem Satz:

$$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Formel 16.6. Abstand zweier Punkte Zwei Punkte $P(x_P, y_P)$ und $Q(x_Q, y_Q)$ haben den Abstand

$$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$



16.7 Übung Wir suchen den Punkt $(1, y)$, der vom Punkt $(3, 2)$ den Abstand 4 aufweist. Mit der Formel ergibt sich die Gleichung $4 = \sqrt{4 + (2 - y)^2}$. Wir quadrieren (und erinnern uns an die Gewinnumformung): $16 = 4 + (2 - y)^2$ oder $12 = (y - 2)^2$ und somit $\pm\sqrt{12} = y - 2$ und $y = 2 \pm \sqrt{12} = 2 \pm 2\sqrt{3} = 2(1 \pm \sqrt{3})$. Kontrolle: $d = \sqrt{2^2 + (\pm 2\sqrt{3})^2} = 4$. Beide Lösungen sind gültig. Die Frage nach einer Lösung ist im Nachhinein nicht ganz korrekt. ◁

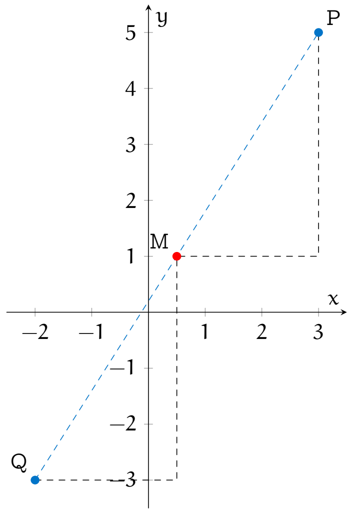
Mitte zweier Punkte

Der Mittelpunkt zweier Punkte ergibt sich als arithmetisches Mittel der x- und der y-Werte-

Formel 16.8. Mitte zweier Punkte Zwei Punkte $P(x_P, y_P)$ und $Q(x_Q, y_Q)$ besitzen den Mittelpunkt

$$(x_M, y_M) = (\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2})$$

16.9 Übung Es liegen die Punkte $P(3, 5)$ und $Q(-2, -3)$ vor. Gemäss Formel liegt die Mitte bei $M(0.5, 1)$. Ihr Abstand ist $d = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} \approx 9.43$ ◁



Die zweite Formel lässt sich mit dem Satz von Pythagoras beweisen. Es muss die Distanz zwischen P und M dieselbe sein wie zwischen Q und M. Es reicht auch dass die quadrierten Abstände gleich sind. Also

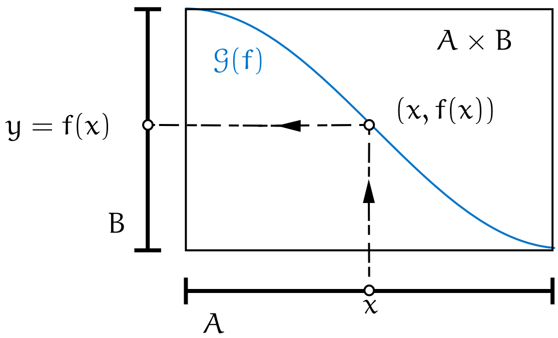
$$\begin{aligned} d_Q &= (x_Q - \frac{x_P + x_Q}{2})^2 + (y_Q - \frac{y_P + y_Q}{2})^2 \\ &= (\frac{x_Q - x_P}{2})^2 + (\frac{y_Q - y_P}{2})^2 \\ &= (\frac{x_P - x_Q}{2})^2 + (\frac{y_P - y_Q}{2})^2 \\ &= (x_P - \frac{x_P + x_Q}{2})^2 + (y_P - \frac{y_P + y_Q}{2})^2 \\ &= d_P \end{aligned}$$

16.4 Funktionsgraph

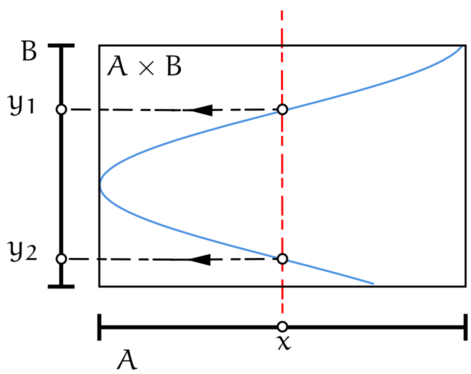
Nun haben wir die Zeichenbene genügend eingeführt, wir können also die Punktpaare (x, y) darauf einzeichnen. In präziser mathematischer Schreibweise für den Graph $\mathcal{G}(f)$:

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y)) \in A \times B \mid x \in A,\ y = f(x)\}$$

Der Graph ist die Menge der Punkte (x, y), die Teilmenge des Produkts aus Definitions- und Wertemenge $A \times B)$ ist, wobei x aus A stammt und y der Vorschrift $f(x)$ entspricht.

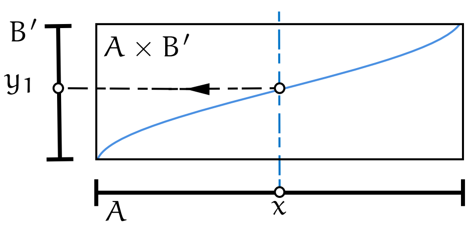


In der Abbildung sind alle wesentlichen Elemente des Funktionsgraphen gezeichnet. Was man nicht explizit sieht, ist die Tatsache, dass der Graph zu einer Funktion gehört, was wiederum impliziert, dass die Abbildung *rechtseindeutig* ist. Diese Lücke schliessen wir mit der nächsten Abbildung.

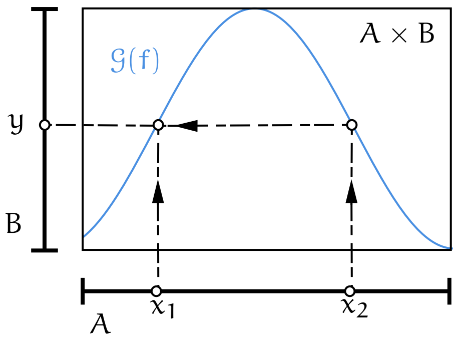


Die blaue Kurve enthält für ein bestimmtes x nicht nur einen Punkt, sondern zwei Punkte (x, y_1) und (x, y_2). Damit wird eine Element von A auf zwei Elemente von B abgebildet. Deshalb ist die Abbildung nicht rechtseindeutig. Wenn sie nicht rechtseindeutig ist, ist sie gemäss Definition keine Funktion.

Wichtig 2. ☠ Ein Graph zeigt nur dann eine Funktion, wenn sich die Kurve nicht vertikal in mehr als einem Punkt schneiden lässt ("Vertikalitätstest"). ⊣

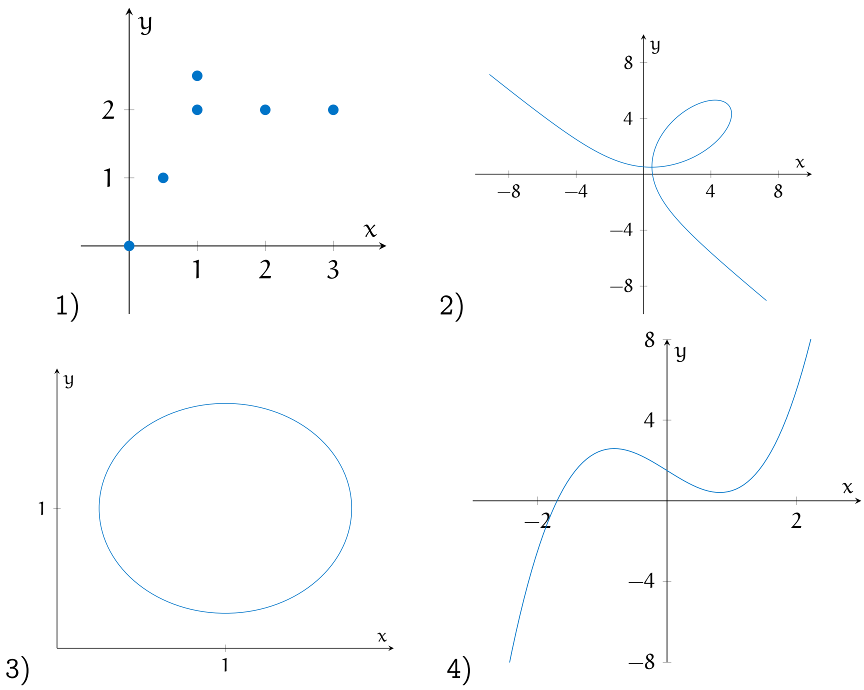


Ist eine Kurve kein Graph einer Funktion, dann kann man, sofern eine für die Untersuchung interessante Fragestellung fortbesteht, die Kurve in Graphen von Funktionen aufteilen (siehe Abbildung mit oberem Teil der Kurve). Betrachtet man die Ortskurve eines Kreises, so sind die Punktepaare nicht eindeutig. Man reduziert die Kurve auf die obere oder untere Hälfte und fährt fort.



Zur Vervollständigung zeigen wir die Kurve, die zu einer Funktion gehört, die nicht linkseindeutig ist. Aus den Mengendiagrammen wissen wir, dass damit eine Situation gemeint ist, bei der bei einem Element der Zielmenge zwei Pfeile ankommen. Das übersetzt sich hier wie in der Abbildung dargestellt. Zwei x-Werte, x_1 und x_2 haben denselben Bildpunkt y. Von nun an zeigen wir die Graphiken wieder mit den klassischen x- und y-Koordinaten anstatt den Definitions- und Wertemengen.

16.1 Übung Wir betrachten folgende Diagramme und stellen uns die Frage: Funktion oder nicht und warum.



Das Diagramm 1 zeigt keine Funktion, denn der x-Wert $x = 1$ hat zwei y-Werte und die Zuordnung ist damit nicht rechtseindeutig. Figur 2 zeigt ein sogenanntes kartesisches Blatt, auch hier sagt der Vertikalitätstest, dass es keine Funktion ist. Figur 3 ist ebenfalls keine Funktion. Nur Figur 4 zeigt eine Funktion. Sie ist nicht linkseindeutig, was aber der Funktion nicht Abbruch tut. $\triangleleft$

16.2 Übung Neben der graphischen Methode kann man auch algebraisch feststellen, ob eine Gleichung eine Funktion darstellt. Dazu muss man die Gleichung in die Form $y = f(x)$ bringen, sofern sie nicht schon so vorliegt. Dann untersuchen wir, ob für jedes y nur ein x vorliegt.
Wir betrachten 3 Gleichungen:

(1) $x^3 + y^2 = 1$ (2) $x^2 + y^3 = 1$ (3) $x^2 y = 1 - 3y$

Wir lösen nach y auf.

(1) Es folgt y:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^3}$$

Nun ist offensichtlich, dass es zu jedem x immer zwei Werte y gibt. Z.B. für $x = 0$ folgen $y_{1,2} = \{1, -1\}$. Es ist keine Funktion.

(2) Wir lösen nach y auf:

$$\begin{aligned} x^2 + y^3 &= 1 \\ y^3 &= 1 - x^2 \\ \sqrt[3]{y^3} &= \sqrt[3]{1 - x^2} \\ y &= \sqrt[3]{1 - x^2} \end{aligned}$$

Für jede Wahl von x folgt ein einziges y. Ungerade Wurzeln sind immer eindeutig. Deshalb ist es eine Funktion.

(3) Wieder lösen wir nach y auf:

$$\begin{aligned} x^2 y &= 1 - 3y \\ x^2 y + 3y &= 1 \\ y\left(x^2 + 3\right) &= 1 \\ y &= \frac{1}{x^2 + 3} \end{aligned}$$

Für jede Wahl von x folgt ein einziges y. Deshalb ist es eine Funktion.

$\triangleleft$

Impliziter Definitionsbereich

In der Kurzschreibweise der Funktion wird meist der Definitionsbereich nicht explizit, also ausführlich, angegeben sondern stillschweigend angenommen. Aus der Formel kann man aber den Definitionsbereich so bestimmen, dass nicht erlaubte Werte ausgenommen sind. Man geht also davon aus, dass der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist und nimmt die verbotenen Werte heraus. Verboten sind etwa negative Wurzelargumente, negative Potenzbasen, Nenner, die null sind, Logarithmen von negativen Zahlen etc.

16.3 Übung Wir bestimmen den Definitionsbereich folgender Funktionen.

(1) $g(x) = \sqrt{4 - 3x}$ (2) $f(x) = \dfrac{2}{1 - \dfrac{4x}{x-3}}$ (3) $h(x) = \dfrac{3x^2}{x}$

(1) Der Radikand darf nicht negativ sein. Somit muss gelten $4 - 3x \geqslant 0$ oder $4 \geqslant 3x$ und $x \leqslant 3/4$. Der Definitionsbereich folgt als $D = (-\infty, 3/4]$.

(2) Hier muss man festhalten: die verbotenen Werte muss man an der Originalformal bestimmen, oder zumindest dort ansetzen, bevor man umformt. In dieser Fassung darf der Bruch $x - 3$ nicht null sein. Damit ist $x = 3$ auszuschliessen. Nun können wir weiterrechnen. Es folgt mit Erweitern

$$f(x) = \frac{2(x-3)}{-x-3}$$

Hier muss $-3x - 3 \neq 0$ sein, also $x \neq 1$. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

(3) Dies ist nun ein interessanter Fall, denn auf ersten Blick hin, darf x nicht null sein. Würde man aber zuerst kürzen, dann ist $h(x) = 3x$ und auf der ganzen reellen Zahlengerade definiert. Strikt gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\triangleleft$

16.4.1 Umkehrfunktion, Inverse

Wir haben in der Mengenlehre den folgenden Satz angetroffen.

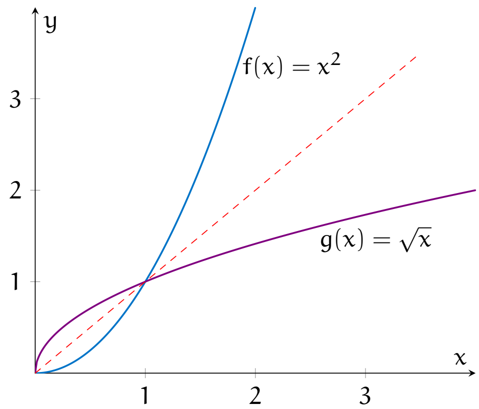
Satz 16.4. Wenn für die zwei Mengen A und B eine eineindeutige Abbildung $f : A \to B$ existiert, dann existiert auch eine *Umkehrfunktion* oder *Inverse* $g : B \to A$.

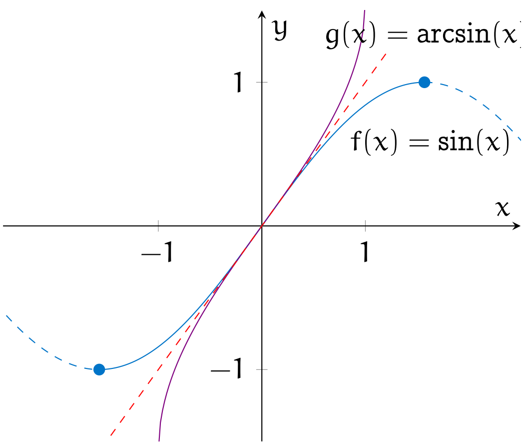
Die Eineindeutigkeit bedeutet, dass in einer Kurve, die aus den Paaren (x, y) besteht, kein x und kein y mehr als einmal auftritt. Wenn die Kurve ansteigend ist, darf sie nicht wieder fallen, ja nicht einmal eine ausgedehnte Terrasse bilden. Die Kurve muss immer entweder weiter fallen oder weiter ansteigen. Man sagt, die Funktion muss *streng monoton* sein. Formal für $a > b$ entweder immer $f(a) > f(b)$: steigend, oder $f(a) < f(b)$: fallend.

Wichtig 3. ☠ Ist eine Funktion eineindeutig und damit umkehrbar (invertierbar), dann gibt es weder eine horizontale noch eine vertikale Schnittgerade, die zwei Punkte der Kurve enthält. ⊣

In der Zeichenbene kann man die Inverse $g(y)$ aus $f(x)$ darstellen, indem man den Graphen von f an der Winkelhalbierenden, der 45°-Gerade spiegelt. Das entspricht dem Vertauschen der Achsen.

16.5 Übung Wir zeichnen die Parabel $f(x) = x^2$ im Bereich $[0, 2]$. Die Umkehrfunktion ergibt sich aus der Gleichung $y = x^2$, die man nach x auflöst, d.h. $x = \sqrt{y}$. Nun vertauscht man x und y und erhält $g(x) = \sqrt{x}$. Der Wertebereich von f wird zum Definitionsbereich von g und der Definitionsbereich von f zum Wertebereich von g. Also $D_g = W_f = [0, 4]$ und $W_g = D_f = [0, 2]$. ◁





Die Sinusfunktion ist eine sich ins Unendliche erstreckende Wellenlinie. Wenn man diese an der Winkelhalbierenden spiegelt, so erkennt man schon in Gedanken, dass das Spiegelbild keine Funktion sein kann. Man kann sich aber für einen Teil der Sinusfunktion eine Umkehrfunktion konstruieren, indem man sich auf den Teil beschränkt, dessen Spiegelbild eindeutig ist. Aus der Abbildung kann man den Definitionsbereich der Funktion $g(x)$ herauslesen, er ist $D_g = W_f = [-1, 1]$. Das entspricht dem Wertebereich von $f(x) = \sin(x)$. Der Wertebereich von $g(x)$ ist $W_g = (-\pi/2, \pi/2)$ obwohl der Definitionsbereich von $f(x)$ $D_f = (-\infty, \infty)$ bemisst.

16.6 Rezept Bestimmung Inverse

(1) Ersetze $f(x)$ durch y,

(2) Löse diese Gleichung nach x auf,

(3) Ersetze auf der einen Seite y durch x und auf der anderen x durch $g(x)$

16.7 Übung Wir suchen die Inverse $g(x)$ von $f(x) = e^{4x+2}$.

- Erster Schritt: $f(x) = e^{4x+2}$ wird $y = e^{4x+2}$
- Zweiter Schritt:

$$\begin{aligned} \ln(y) &= 4x + 2 \\ x &= (\ln(y) - 2)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln(y) - 1 \end{aligned}$$

- Dritter Schritt: $x = \frac{1}{2}\ln(y) - 1$ wird $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - 1$

◁

Wir haben angenommen, dass der grösstmögliche implizite Definitionsbereich gilt. Die Funktion $f(x)$ kann aber auch auf einem bestimmten Bereich definiert sein. Dann muss man diese Bedingung berücksichtigen.

16.8 Übung Gesucht ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2 - 4x + 5$ mit $D_f = (-\infty, 2)$. Wir rechnen: $y = x^2 - 4x + 5$,

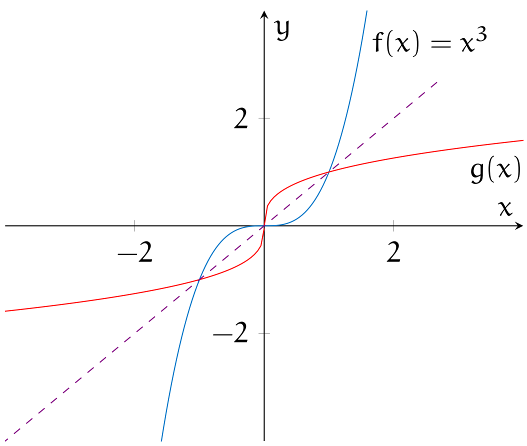
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 5 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 5 \\ (x-2)^2 &= y - 1 \\ x - 2 &= \pm\sqrt{y-1} \\ x &= 2 \pm \sqrt{y-1} \end{aligned}$$

Da x im Intervall D_f liegen und $\sqrt{y-1} \geqslant 0$ sein muss, gilt nur eine Lösung $x = 2 - \sqrt{y-1}$. Nun $g(x) = 2 - \sqrt{x-1}$. ◁

16.9 Übung Wir bestimmen die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$. Die Funktion ist streng monoton wachsend es existiert also eine Inverse. Also $y = x^3$, $x = y^{1/3}$ und $g(x) = x^{1/3}$. Nun ist die Potenzfunktion nur für positive Basen definiert. Deshalb müssen wir die Fallunterscheidung machen gemäss

$$g(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \textit{für} \quad x \geqslant 0 \\ -|x|^{1/3} & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

◁



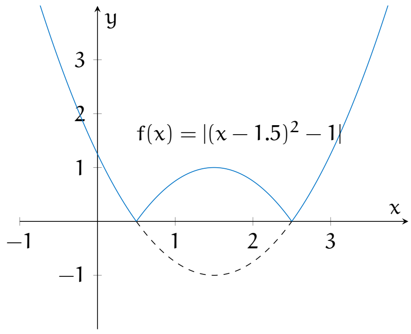
16.4.2 Spezielle Funktionsgraphen

Zusammengesetzte Funktion

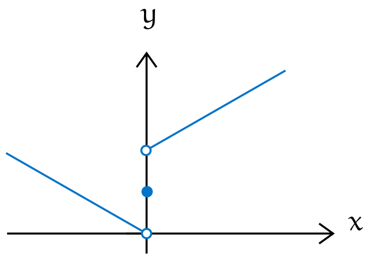
Eine Funktion kann auch stückweise definiert sein und zudem Sprünge aufweisen.

Die Abbildung zeigt eine Betragsfunktion $f(x) = |(x - 1.5)^2 - 1|$, eine nach oben geöffnete Parabel. Die Betragsschreibweise ist eine Kurzvariante von

$$f(x) = \begin{cases} (x-1.5)^2 - 1 & \textit{für} \quad x < 0.5 \\ -[(x-1.5)^2 - 1] & \textit{für} \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5 \\ (x-1.5)^2 - 1 & \textit{für} \quad x > 1.5 \end{cases}$$



Funktion mit Sprüngen

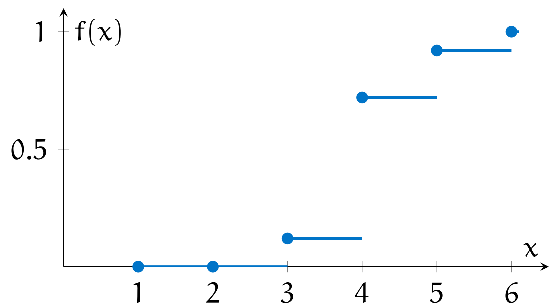


Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion $f(x)$ nach folgender Vorschrift:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \textit{falls} \quad x < 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad x = 0 \\ x + 2 & \textit{falls} \quad x > 0 \end{cases}$$

Bei $x = 0$ erfolgt ein Sprung. Hier wird an dieser Stelle ein Wert zugewiesen, der keiner der beiden Geraden zugehört.

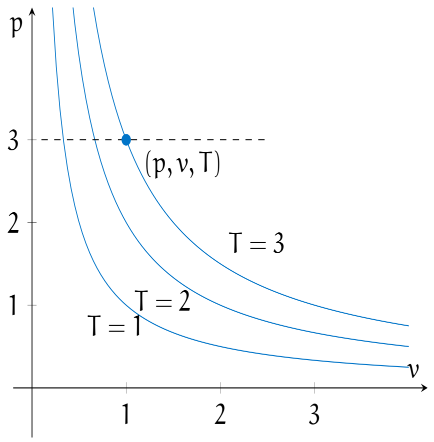
Die übliche Darstellung verlangt, dass der gültige Wert mit einem vollen Punkt dargestellt wird und der nicht mehr dazugehörige entweder gar nicht oder mit einem leeren Punkt markiert wird. Beide Varianten sind in den zwei nebenstehende Diagrammen gezeigt. Die letzte Abbildung zeigt eine sogenannten *Treppenfunktion*, wobei der Punkt an der Sprungstelle der oberen Stufe zugewiesen ist.



Parameterfunktion, Schar

Wir erinnern die Definition von Parameter: Als Parameter (Formvariable) wird eine Variable bezeichnet, die man für einen gerade betrachteten Fall konstant setzt, für den nächsten Fall aber variiert werden kann. Parameter sind “beliebig aber fest”.

Wir betrachten eine Funktion aus der Physik: $p \cdot v = R \cdot T$. Es gibt den Zusammenhang wieder zwischen dem Druck p, dem spezifischen Volumen v und der Temperatur T. R ist die Gaskonstante. Aufgelöst nach dem Druck folgt $p = \frac{RT}{v}$. Wir haben die Variable p, die von zwei unabhängigen, d.h. v und T, abhängt. Wir wählen T als Parameter, also für jetzt konstant gehalten und zeichnen die entsprechende Funktion.



Sodann setzen wir für T einen anderen Wert und zeichnen neu etc. Für jedes festgehaltene T, mit anderen Worten für jeden gewählten Parameterwert, entsteht eine Kurve. Nimmt man sie zusammen, dann nennt man diese Gruppe eine *Schar*. Weil auf jeder Kurve die Temperatur fest ist, nennt man sie auch Isothermen. Der Vorsatz "iso" bezeichnet den festen Wert. Mann kennt z.B. die Isobaren, Isoklinen, Isochoren etc. Der Kartenlesen nennt sie Höhenlinien, Linien gleicher Höhe. Wie man in der Abbildung sieht, hat jeder Punkt drei Grössen (p, v, T). Wenn man eine Horizontale zeichnet, dann haben alle Punkte darauf ein konstantes p. Man kann also mit Kenntnis der Grössen der Punkte eine neue Kurve zeichnen, die p als Parameter besitzt. Das sind dann Isobaren. Genauso ein vertikaler Schnitt produziert Isochoren.

Funktionen mit Parameter, z.B. k oder p, werden dargestellt mit dem Parameter als Index:

$$f_k(x) = k \cdot x^2 + (k-1) \qquad \text{oder} \qquad f_p(x) = \frac{x}{p-1}.$$

Generell bildet eine Gleichung wie $f(x) = ax + bx + c$ eine Schar von Funktionen, die von den Parametern a, b und c abhängt. Ob Parameter oder Variable: es ist eine Rolle, die man wählt.

16.10 Übung Es liegt die Funktion mit Parameter vor: $f_p(x) = x^3 + p \cdot (x^2 + x) + 2$. Für welche Werte von x ist $f_p(x)$ von p unabhängig? Wenn das Produkt mit p null wird, verschwindet es. D.h. $(x^2 + x) = 0 = x(x+1)$ mit den Lösungen $\{0, -1\}$ Damit folgen die zwei Punkte $(0, 2)$ und $(-1, 1)$. Was bedeutet dies aber? Die ganze Schar der Funktionen geht durch diese zwei Punkte. $\triangleleft$

16.5 Eigenschaften von Funktionen

Da wir hier vor allem Funktionsgraphen betrachten interessieren die visuellen, geometrischen Eigenschaften und Regelmässigkeiten. Wir beschreiben in diesem allgemeinen Teil nur die wichtigsten.

16.5.1 Monotonie

Definition 8. x_1 und x_2 sind zwei beliebige Werte aus dem Definitionsbereich D einer Funktion f, die der Bedingung $x_1 < x_2$ genügen. Dann heisst die Funktion

- *monoton wachsend*, falls $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,
- *streng monoton wachsend*, falls $f(x_1) < f(x_2)$,
- *monoton abnehmend*, falls $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,
- *streng monoton abnehmend*, falls $f(x_1) > f(x_2)$.

Alternativ kann man sich vorstellen, x_1 geht über zu einem Wert x_2. Dabei verändert sich x_1 um $\Delta x = x_2 - x_1$. $\Delta x > 0$ bedeutet eine Vergrösserung, $\Delta x < 0$ eine Verringerung. Bei diesem Übergang ändert sich der Funktionswert um

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$$

Dann heisst eine Funktion wachsend, wenn der Quotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$ ist und abnehmend, wenn $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$ ist. Falls $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$ ist, dann ist die Funktion konstant.

Anmerkung 16.1. Die Schreibweise Δx ist eine Kurzschreibweise für die Differenz. Dazu wird das griechische Delta verwendet. Der Ausdruck Δx ist als ein Wert zu verstehen.

Anmerkung 16.2. Ganz präzis ist der Worlaut, wonach die Funktion *wachsend* oder *abnehmend*, und die entsprechende Kurve *fallend* oder *steigend* ist.

Nur wenige Funktionen sind über den ganzen Definitionsbereich monoton. Häufig handelt es sich um eine lokale Eigenschaft, die in einem abgegrenzten Bereich von D monoton ist. Wir erwähnen nochmals, dass die strenge Monotonie eine Voraussetzung für die Inverse, die Umkehrfunktion darstellt.

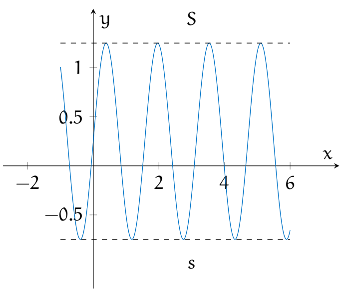
16.5.2 Beschränktheit

Definition 9. Eine Funktion f heisst *beschränkt*, wenn es zwei reelle Zahlen s und S gibt, so dass alle Funktionswerte $y = f(x)$ zwischen ihnen liegen, wenn also gilt:

$$s \leqslant f(x) \leqslant S \quad \text{für alle } x \in \mathbb{D}.$$

s wird als untere und S als obere *Schranke* der Funktion bezeichnet.

Anmerkung 16.3. Mit anderen Worten der Wertebereich W_f ist endlich.



Typischerweise ist die Wellenfunktion durch die Amplitude beschränkt, in der Abbildung $S = 1.25$ und $s = 0.75$. man kann auch $W = [-0.75, 1.25]$ schreiben.
Eine Funktion kann in einem bestimmten Bereich auch nur einseitig eine untere oder eine obere Schranke aufweisen. Gibt es keine Schranke, so ist die Funktion unbeschränkt.

16.5.3 Symmetrie

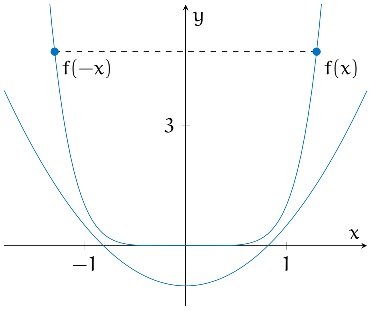
Wir unterscheiden zwei Typen von Symmetrie, die Achsen- oder Spiegelsymmetrie und die Punktsymmetrie.

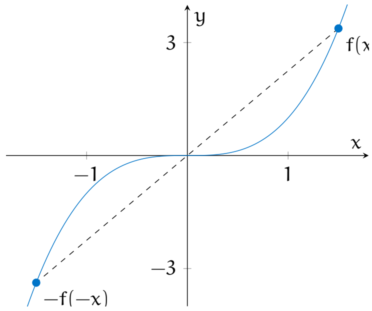
Definition 10. Eine Funktion f mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst *gerade*, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

Definition 11. Eine Funktion f mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst *ungerade*, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(x) = -f(-x)$$





Im linken Schaubild sieht man die geraden Funktionen $f(x) = x^6$ und x^2 und rechts die ungerade $f(x) = x^3$.

16.4 Übung Wir untersuchen rechnerisch die folgenden Funktionen und wollen wissen, ob sie symmetrisch sind:

$$(1)\ \ f(x) = \frac{5}{2-x^2} \qquad (2)\ \ g(x) = \frac{5x}{2-x^2} \qquad (3)\ \ h(x) = \frac{5x}{2-x^3}$$

Aus den Definitionen folgt, dass man als erstes x durch $-x$ ersetzt. Wir benennen die Funktion mit den negativen x-Werten mit einem Stern.

(1) Aus $f(x) = \dfrac{5}{2-x^2}$ folgt $f^*(x) = \dfrac{5}{2-(-x)^2} = \dfrac{5}{2-(x)^2}$. Es ist also $f(x) = f^*(x)$. Die Funktion ist gerade und symmetrisch zur y-Achse.

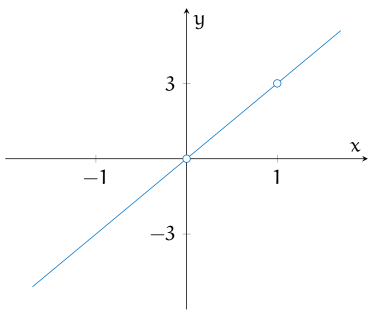
(2) $g(x) = \dfrac{5x}{2-x^2}$ ergibt $g^*(x) = \dfrac{-5x}{2-x^2} = -g(x)$. Die Funktion ist ungerade und punkt-symmetrisch.

(3) $h(x) = \dfrac{5x}{2-x^3}$ erzeugt $h^*(x) = \dfrac{-5x}{2-(-x)^3} = \dfrac{-5x}{2+x^3}$. Weder h^* noch $-h^*$ stimmen mit h überein. Diese Funktion ist nicht symmetrisch.

◁

16.5.4 Stetigkeit

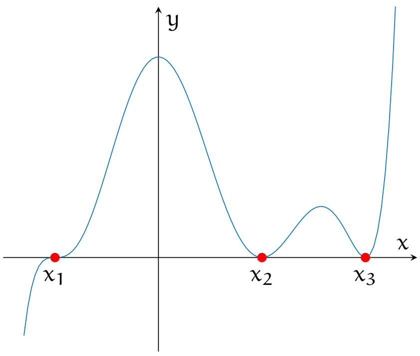
Stetig bedeutet soviel wie kontinuierlich, fortlaufend, zusammenhängend, ohne Unterbruch. Wir haben schon gesehen, dass es Funktionen mit Lücken gibt. Wir erinnern $h(x) = \dfrac{3x^2}{x}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man kann auch $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ schreiben, sodass man besser erkennt, dass D unterbrochen ist. In de Abbildung sehen wir die Funktion $g(x) = \dfrac{3x^2(x-1)}{x(x-1)}$.
Neben der Lücke gibt es noch den Sprung, also ein Bruch in y-Richtung.



16.5.5 Nullstellen

Definition 12. Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine *Nullstelle*, wenn $f(x_0) = 0$ ist.

Wichtig 4. In einer Nullstelle schneidet oder berührt die Funktionskurve die x-Achse. ⊣



In der Abbildung sehen wir drei Nullstellen, Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet oder berührt. Wir wissen von den Polynomgleichungen, dass es mehrfache Nullstellen gibt. Die Vielfachheit erkennt man an der Form der Umgebung der Nullstellen. Berühren impliziert gerade Exponenten der Linearfaktoren, d.h. $(x-c)^g$, und schneiden ungerade $(x-c)^u$.
Mit frei Nullstellen ist auch klar, dass eine Kurve, die als Polynom darstellbar ist, mindestens vom Grad 3 sein muss. Da x_2 und x_3 berühren, ist der Grad mindestens 5, d.h. 1+2+2.

16.5 Übung Angenommen die Nullstellen sind $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$. Aus den Symmetrieeigenschaften, und daraus die Vielfachheiten, könnte man eine Polynom-Funktion schätzen, welche diese Nullstellen besitzt gemäss

$$f(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)^2$$

(Wir werden noch sehen, dass die erste Nullstelle die Vielfachheit 3 hat.) ◁

16.5.6 Schnittpunkt

Definition 13. Ein *Schnittpunkt* zweier Funktionen f und g ist jener gemeinsame Punkt (x, y), an dem beide Funktionen den gleichen x-Wert und den gleichen y-Wert haben,

$$f(x) = g(x)$$

Anmerkung 16.6. Anstatt $f(x) = g(x)$ kann man auch $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ setzen. So erkennt man, dass der Schnittpunkt zur Nullstelle von $h(x)$ geworden ist. Wir wissen, dass Gleichungen mehrere Nullstellen, somit Schnittstellen, aufweisen können.

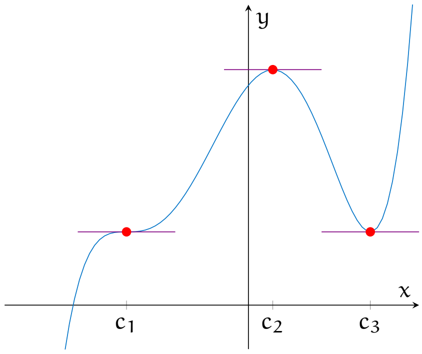
Da eine Funktion als Gleichung dargestellt werden kann, ist der Schnittpunkt zweier Funktionen eine Lösung einer Gleichung.

16.7 Übung Es ist $f(x) = x$ und $g(x) = -2x + 1$. Der x-Wert des Schnittpunkts ist die Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$ oder aequivalent $f(x) - g(x) = 0$. Also $x = -2x + 1$ oder $3x = 1$ und $x = 1/3$. Der y-Wert ergibt sich durch Einsetzen in eine der Funktionsgleichungen. z.B. $y = f(1/3) = 1/3$. ◁

16.8 Übung Wir gehen zur Erbauung umgekehrt vor. Wir konstruieren eine Polynomgleichung mit $(x-3)(x-1)^2 = 0$, rechnen aus $(x-3)(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x - 3x^2 + 6x - 3 = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ und formen um zu $x^3 - 5x^2 = -7x + 3$. Jetzt setzen wir $f(x) = x^3 - 5x^2$ und $g(x) = -7x + 3$. Was sind die Schnittpunkte von f und g? Wir haben sie ja konstruiert, also $x = \{1, 3\}$. Eingesetzt $(1, -4)$ und $(3, -18)$. Rundfahrt beendet. ◁

16.5.7 Stationäre Punkte

Stationäre oder kritische Punkt eines Funktionsgraphen sind Stellen, an denen die Tangente horizontal ist. Dies trifft an den Gipfelpunkten c_2 und den Talsohlen c_3 zu, aber auch auf sogenannten Terrassen, hier c_1.
Gipfel und Talsohlen heissen eigentlich lokales *Maximum* oder lokales *Minimum*. Und zusammen lokale *Extrema*. Sie sind sehr wichtig für Optimierungen, wenn die Kurve eine Zielfunktion ist, deren Wert man optimieren will.



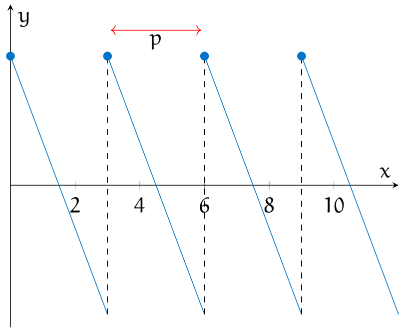
16.5.8 Periodizität

Es gibt Funktionen mit wiederkehrendem Muster. Als erstes fällt einem eine Wellenlinie mit regelmässigen Abständen zwischen den Wellenkämmen auf.

Definition 14. Eine Funktion f heisst *periodisch* mit der Periode p, wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \cdot p$ zum ihrem Definitionsbereich D gehört und gilt:

$$f(x) = f(x \pm p)$$

In der Abbildung sehen wir eine Sägezahn-Funktion. Jeder Funktionswert ist für ein um p verschobenes x gleich. Die periodische Funktion durchläuft innerhalb einer Periode den gesamten Wertebereich.
Aus der Definition folgt, dass auch Vielfache von p Periodizitäten sind, also $\pm k \cdot p$ für $k \in \mathbb{N}$.



16.6 Transformationen

Analog zur Geometrie kann man die Funktionsgraphen, also spezielle Kurven, transformieren, d.h. von einer Ausgangskurve eine gewandelte erzeugen. Die wichtigsten Transformationen sind:

- Streckungen (und Stauchungen),
- Spiegelungen und
- Verschiebungen.

Einzig die Rotation spielt hier keine Rolle. Wollte man das Pferd von hinten aufzäumen, dann könnte man die Quintessenz der Transformation anhand folgender Formel zusammenfassen:

$$g(x) = A \cdot f(Bx + C) + D$$

Die betrachteten Transformationen werden von den vier Parametern A, B, C und D vermittelt.

Anmerkung 16.1. Wir haben zwei Objekte, die Kurve und die Zeichenebene, das kartesische Koordinatensystem. Eine Transformation kann als Änderung der Kurve auf derselben Zeichenebene oder als Änderung der Zeichenebene bei gleichbleibender Kurve interpretiert werden. Die Transformation ist relativ.

Wir betrachten im Folgenden eine einfache Funktion, mit der man die Transformationen besonders gut sichtbar machen kann. Als Wertetabelle sei f gegeben als

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	1	4

oder als Gleichung:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{für} \quad x \geqslant 0 \\ -x^2 & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

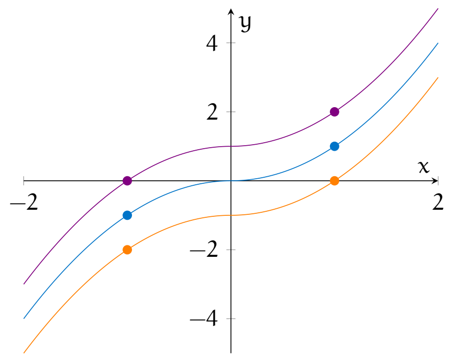
16.6.1 Verschiebung

Das Koordinatensystem hat zwei Richtungen, x- und y-Richtung. Eine Verschiebung kann in eine der zwei Richtungen erfolgen. Daraus lässt sich dann eine beliebige Verschiebung zusammensetzen. Anstatt Verschiebung kann man auch *Translation* sagen.

Vertikale Verschiebung

Die vertikale Verschiebung ist die einfachste Transformation. Ein vormaliger Punkt (x, y) wird zu $(x, y+D)$, mit $D\pm = 1$ folgt

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	1	4
$g_+(x)$	-3	-2	1	2	5
$g_-(x)$	-5	-2	-1	0	1



Eine vertikale Verschiebung der Funktion f bedeutet $g(x) = f(x) + D$ mit $D \neq 0$. Ist $D \geqslant 0$, dann geht die Kurve nach oben, ist $D < 0$, dann verschiebt sie nach unten.

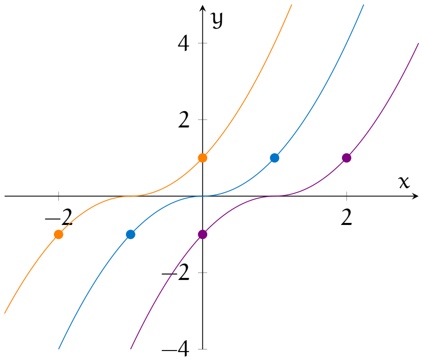
Horizontale Verschiebung

Wir gehen wieder von der Wertetabelle aus, die wir etwas erweitern. Denn nun verschieben wir ja die y-Werte und brauchen mehr Platz für die x-Werte.

x	-3	-2	-1	0	1	$\boxed{2}$	3
$f(x)$	-	-4	-1	0	1	$\boxed{4}$	-
$g_+(x)$	-	-	-4	-1	0	1	$\boxed{4}$
$g_-(x)$	-4	-1	0	1	4	-	-

Der Index bei g gibt die Verschiebungsrichtung von x an.

Wir verschieben die $y = f(x)$-Werte nach rechts und erhalten g_+. Wenn wir nun vergleichen (gerahmte Zahlen), dann folgt $g_+(3) = f(2) = 4$ oder allgemeiner $g_+(x) = f(x-1)$. Noch allgemeiner für $C > 0$: $g_+(x) = f(x - C)$. Wir werfen also x in die $g(x)$-Gleichung und suchen den $f(x)$-Wert, der diesem $g(x)$-Wert entspricht.
Dass man bei einer Rechtsverschiebung um C diesen Betrag von der x-Werten abziehen muss, ist für viele nicht intuitiv. Die horizontale Verschiebung folgt:



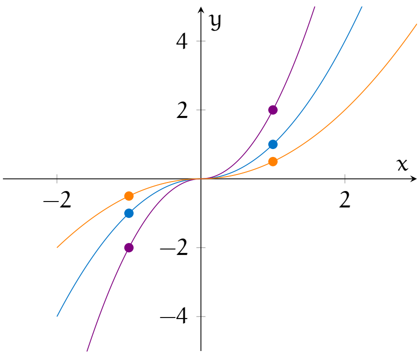
$$g_+(x) = f(x - C), \quad \text{resp.} \quad g_-(x) = f(x + C)$$

16.6.2 Streckung

Vertikale Streckung

Streckung und Stauchung ist im Prinzip dasselbe. Bei der Streckung ist der Streckungsfaktor $|A| > 1$, bei der Stauchung $|A| < 1$. Wir betrachten also $g(x) = A \cdot f(x)$ Wir verwenden zur Illustration die Werte $A = \{2, 1/2\}$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	1	4
$g_2(x)$	-8	-2	0	2	8
$g_{1/2}(x)$	-2	-0.5	0	0.5	2

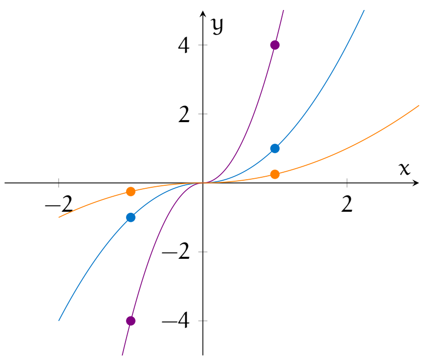


Wie man der Abbildung entnehmen kann, wirkt die Streckung als Vergrösserung der Beträge der y-Werte und die Stauchung als Verringerung. Die gestauchte Funktion liegt näher an der x-Achse. Gleichzeitig wird die gestauchte Funktion $g_{1/2}$ verbreitert, die gestreckte g_2 in x-Richtung geschmälert.
Generell lautet die Formel für die Streckung/Stauchung:

$$g(x) = A \cdot f(x)$$

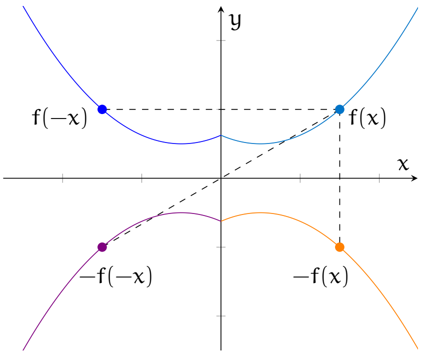
Horizontale Streckung

Wir nehmen zur Illustration wieder die Werte $B = \{2, 1/2\}$, die in der Formel $g(x) = f(Bx)$ Eingang finden. Nun strecken und stauchen wir in x-Richtung. Wir stellen uns vor, die Zeichenebene sei aus Gummi und wir ziehen und drücken in horizontaler Richtung. Es entsteht derselbe Effekt wie bei der vertikalen Streckung/Stauchung.



16.6.3 Spiegelungen

Als Spiegelung bieten sich die Achsen und der Nullpunkt an. Damit ergeben sich zwei Achs- und ein Punktspiegelung.



Zur besseren Veranschaulichung nehmen wir eine etwas andere Testfunktion. Es ist ein Parabelast mit dem Scheitelpunkt $(1, 1)$. Wir erinnern die Symmetrie-Eigenschaften 16.4 der Zeichenebene. Wir haben drei Spiegelungsmöglichkeiten: (1) an der x-Achse, (2) an der y-Achse und (3) am Ursprung. Es sind zwei Achspiegelungen und eine Punktspiegelung. Die Formeln sind in Anlehnung an die Eigenschaften 16.4 wie folgt:

- Spiegelung an x-Achse: $g(x) = f(-x)$,
- Spiegelung an y-Achse: $g(x) = -f(x)$ und
- Punktspiegelung an $(0, 0)$: $g(x) = -f(-x)$.

An diesen Formeln erkennt man, dass Spiegelungen spezielle Streckungen sind mit negativen Parametern. Für $g(x) = Af(Bx + C) + D$ sind die Parameter A und/oder B negativ.

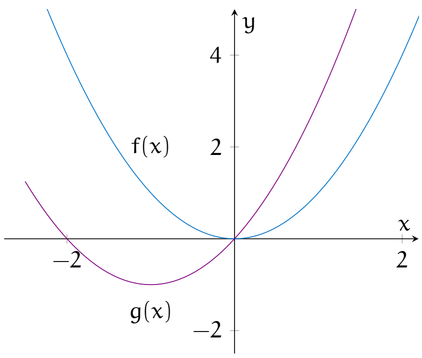
Formel 16.2. Transformation von Funktionen

$$g(x) = A \cdot f(B \cdot x + C) + D$$

mit den Parametern für folgende Transformationen:

- A: Vertikale Streckung/Stauchung, Spiegelung y-Achse
- B: Horizontale Streckung/Stauchung, Spiegelung x-Achse,
- A und B: Punktspiegelung,
- C: Horizontale Verschiebung,
- D: Vertikale Verschiebung.

16.3 Übung Es ist $f(x) = x^2$ gegeben. Gesucht ist $g(x) = 4 \cdot f(0.5x + 1) - 4$. Wie sieht die Funktion g entwickelt aus? In g ist das Argument von $f(\xi)$, $\xi = 0.5x + 1$. Eingesetzt folgt $f(\xi) = \xi^2 = (0.5x + 1)^2$. Damit ist $g(x) = 4(0.5x + 1)^2 - 4 = (x + 2)^2 - 4 = x^2 + 2x$. ◁

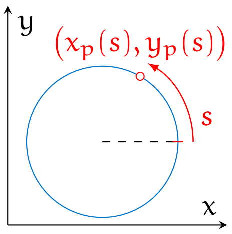


An diesem Beispiel sieht man, dass sich die Parameter A und B gegenseitig aufheben, es gibt keine Streckung.

16.7 Parámeterdarstellung**

Dass nicht alle Kurven Funktionsgraphen sind, d.h. dass einige keine Funktionsgleichung aufweisen, ist eine Herausforderung. Wir haben gesehen, dass ein Kreis in der kartesischen Zeichenebene keiner Funktion entspricht, weil zu einem bestimmen x-Wert meist zwei y-Werte gehören und damit die Rechtseindeutigkeit verletzt ist.
Wir können uns vorstellen, dass die Punkte (x, y) einer Kurve Bahnkurven sind. Eine Wanze krabbelt über den Tisch und hinterlässt eine Spur. Mit einem Massband messen wir die Spur aus und können jeder Position (x, y) einen Wert s zurordnen. Damit erhalten wir die Darstellung

$$x = x(s) \qquad \text{und} \qquad y = y(s)$$



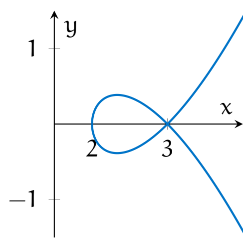
16.1 Übung Wir betrachten einen Kreis in der Zeichenebene. Es ist y_k keine Funktion. Wir wählen die Bogenlänge als Parameter. Die Zuordnung von Bogenlänge s zu Kurvenpunkt ist eineindeutig. Die Bogenlänge kennen wir, sie kann wiederum als Funktion des Winkels φ aufgefasst werden, mit dem $s = \varphi \frac{\pi}{180}$ ist. Diese Funktion ist linear-homogen. Somit ist jeder Kurvenpunkt P dargestellt als $\big(x_p(s), y_p(s)\big)$.

◁

Definition 15. Unter einer *Parameterdarstellung* versteht man eine Darstellung, bei der die Punkte einer Kurve (x, y) als Funktion eines Parameters s durchlaufen werden.

Ist eine Funktion $f(x) = x^2 + 1$ gegeben, so kann man leicht eine Parameterdarstellung der Form $x(s) = s$ und $y(s) = s^2 + 1$ herstellen. Anderseits kann man versuchen, die Parameterdarstellung in eine Funktion zu verwandeln, indem man den Parameter aus dem Gleichungssystem elimiert. Das kann aber nicht immer gelingen, weil eine Kurve nicht immer ein Funktionsgraph ist.

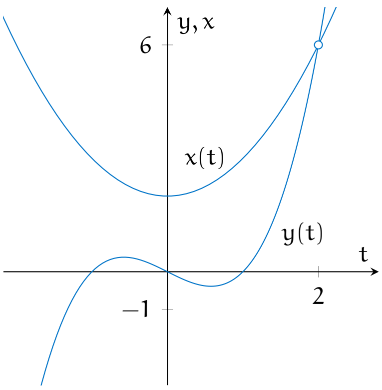
Wichtig 5. Eine Kurve mit möglicher Parameterdarstellung kann man mit dem Finger nachfahren. ⊣



16.2 Übung Es ist die Kurve in der Parámeterform gegeben

$$x(t) = t^2 + 2 \qquad \text{und} \qquad y(t) = t^3 - t$$

Mit einem Plotprogramm zeichnen wir die Kurve. Es entsteht eine Schleife. Die Ausgangskurven in Abhängigkeit vom Parameter t sind nebenstehend gezeichnet. Wie man sieht, schneiden sich die Kurven. Dort ist $x(t) = y(t)$. In der Zeichenebene ist dies der Schnittpunkt mit der ersten Winkelhalbierenden.



Wir suchen den Schnittpunkt der Kurve mit sich selbst. Hier muss gelten, dass $x(t) = x(s)$ und $y(t) = y(s)$, denn der Schnittpunkt hat zwei Darstellungen in (x, y). Es folgt das nicht lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s^2 + 2 &= t^2 + 2 \\ s^3 - s &= t^3 - t \end{aligned}$$

Es folgt aus der ersten Gleichung $s = \pm t$, denn $s = \pm\sqrt{t^2}$. Die eine Lösung $s = t$ führt nirgends hin, wir müssen nur $s = -t$ betrachten. Es folgt

$$-t^3 + t = t^3 - t \qquad \Leftrightarrow \qquad 2t^3 - 2t = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t(t^2 - 1) = 0$$

womit $t_{1,2,3} = \{0, 1, -1\}$. Aus diesen Lösungen ist nur $s = -t$, oder $s = 1$, $t = -1$ oder umgekehrt $s = -1$ und $t = 1$ sinnvoll. Es ist also der Schnittpunkt $S(3, 0)$. ◁

Diese Betrachtungen zur Parameterdarstellung werden wir noch weiter verwenden, namentlich bei den Kreisfunktionen und in der Vektorgeometrie.

16.8 Funktion mehrerer Variablen**

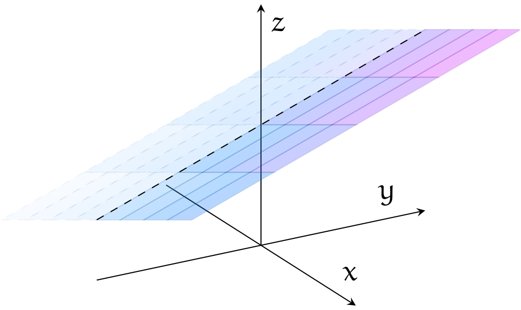
Funktionen von zwei Variablen kennen wir bereits, aber unter anderem Namen. Beispiele sind der $\text{kgV}(a, b)$ und der $\text{ggT}(a, b)$, die Restfunktion $\mathcal{M}(a, b)$. Die Grundoperationen wie die Addition $x + y$ könnte man in eine Funktion kleiden. Es sei $\mathcal{A}(x, y) = x + y$ oder $\mathcal{D}(x, y) = x - y$.
Zusätzlich habe wir Funktionen mit Parameter p eingeführt, die als Graph eine Schar von Kurven bilden. Da ein Parameter ein momentan als fest angenommene Variable ist, könnte man die Bindung lösen und von einer Funktion von zwei Variabel sprechen. Formell also anstatt $f_p(x)$ dann $f(x, p)$ schreiben. Generell bezeichnet man eine Funktion von zwei Variablen x und y als

$$f : (x, y) \mapsto z \qquad \text{oder} \qquad z = f(x, y)$$

und von n Variablen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Der Definitionsbereich ist bei zwei Variablen $D = \{(x, y)\}$. Hier ist z eine Fläche über der Zeichenebene xy. Man kann sich z als Höhe einer Landschaft vorstellen, die als Karte dargestellt ist. Die Höhen in Karten sind mit Höhenlinien (Isohypse) gekennzeichnet, in der Analysis eher *Niveaulinie* genannt. Die Landschaft kann aber auch als dreidimensionales Gebilde dargestellt werden, dass dann auf Papier als Projektion vorliegt.

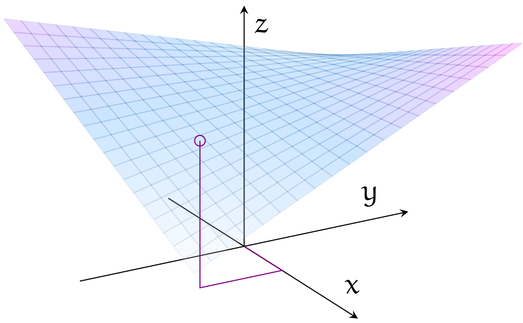


Die Einfachst Fläche ergibt sich aus der linearen Funktionsgleichung in zwei Unbekannten

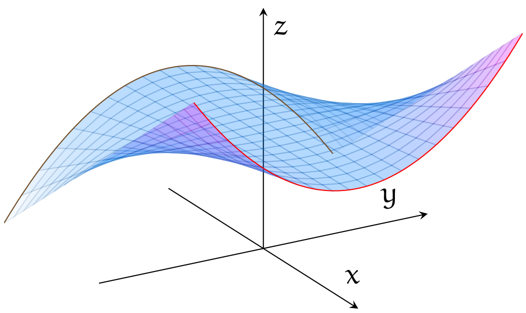
$$z = Ax + By + C$$

Es ist eine Ebene. Denn die Spuren, die Schnittgeraden der Fläche mit den Koordinatenebenen sind Geraden.

16.1 Übung Ein einfache Funktion von zwei Variablen ist $f(x, y) = xy + 3$. Wenn wir x festhalten als Parameter, dann sehen wir dass die entsprechenden Kurven Geraden sind, wobei x gerade die Steigung angibt. Variiert man x von positiv zu negativ, dann ändert die Steigung das Vorzeichen. Die so erzeugte Fläche ist in der Abbildung angegeben. Es ist ein flacher Sattel. $\triangleleft$



16.2 Übung Wir zeigen noch die Funktion $z = x \cdot y^2 + 3$. Wenn man x festhält, dann bilden die Kurven eine Schar von Parabeln, wenn man y fixiert, dann eine Schar von Geraden. $\triangleleft$



Aufgaben

0.3 Bestimme die Abstände der Punkte $(2,3)$, $(-2,-2)$ und $(5,-1)$ vom Punkt $(0,1)$.

3 Der Abstand wird mit dem Satz des Pythagoras bestimmt. Es ist $d_1 = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Für $d_2 = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}$. Und $d_3 = \sqrt{(5-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{29}$.

0.4 Verschiebe den Funktionsgraphen von f um zwei Einheiten nach rechts und drei nach oben.

4 Verschiebung nach rechts: $f(x) \mapsto f(x-2)$. Nach oben $f(x-2)+3$.

0.5 Beurteile die folgenden Kurven (so gut wie möglich) bezüglich

(1) ist Funktionsgraph

(2) Stetigkeit und Monotonie

(3) Lücken und Sprünge

(4) Symmetrie

(5) Nullstellen, Berührungspunkte

(6) Schnittpunkte

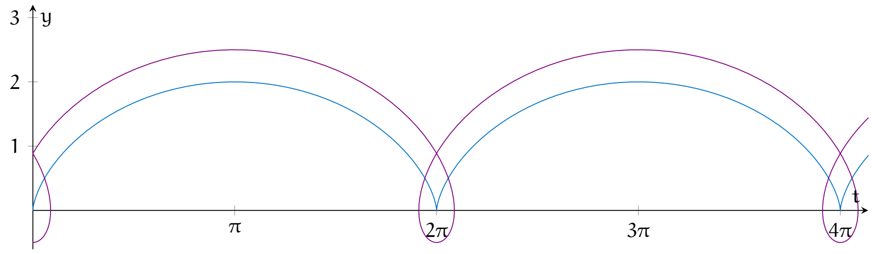
(7) Stationäre Punkte

(8) Periodizität

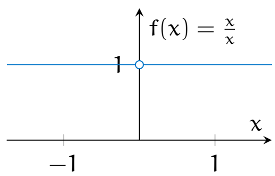
(9) Asymptoten

(10) Invertierbarkeit (Spiegelung an Winkelhalbierenden)

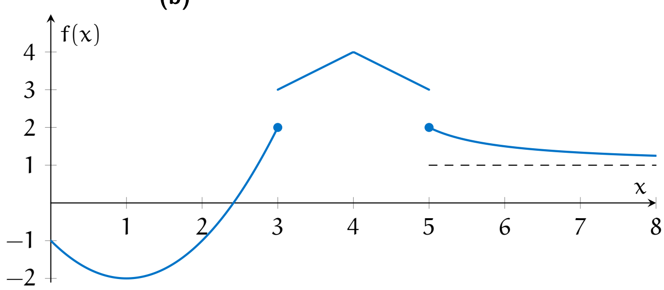
(11) Parameterdarstellung möglich.



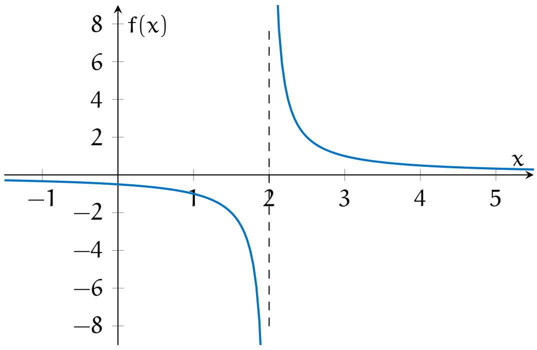
(a)



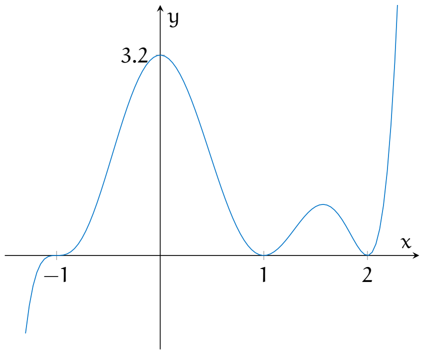
(b)



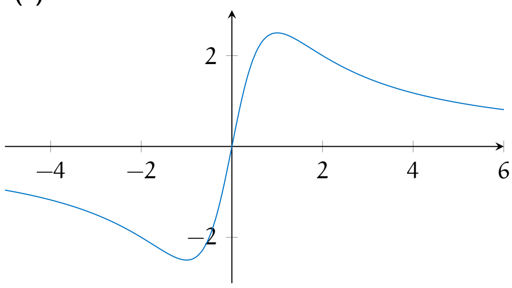
(c)



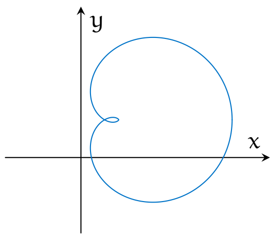
(d)



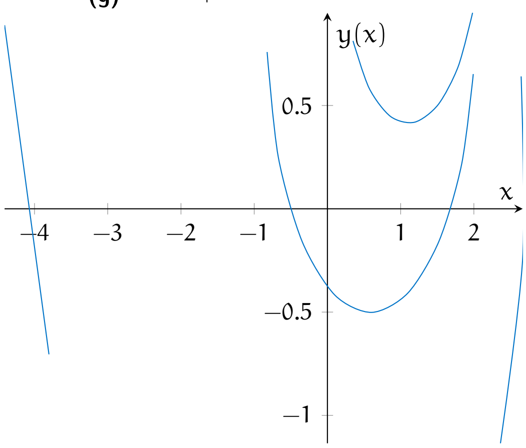
(e)



(f)



(g)



(h)

5 **(a)** Hellblau: 1) ja, 2) ja, stückweise, 3) keine, 4) ja, bezg. y-Achse, 5) berührende Nullstellne bei $x = k \cdot 2\pi$, 6) y-Achse bei $x = 0$, 7) ja, bei $x = \pi + k\cdot < pi$, 8) ja, $p = 2\pi$, 9) nein, 10), nein, 11) ja
Violett: 1) nein, (...), 11) ja
Bemerkung: Die Kurven sind Zykloiden, die durch Abrollen eines Rades entstehen (eine Fahrrads oder Autos und eines Eisenbahnrads).

(b) 1) ja, 2) nein, stückweise, 3) Lücke bei $x = 0$, kein Sprung, 4) ja, y-Achse, 5) keine, 6) nein, 7) nein, 8) nein, 9) $y = 1$, 10) ja, 11) stückweise.

(c) 1) ja, 2) nein, 3) keine Lücke, Sprünge bei $x = \{3, 5\}$, 4) nein, 5) ja, $x \approx 2.5$, 6) nein, 7) ja bei $x \approx 1$, 8) nein, 9) ja $y = 0$, 10) nein, 11) stückweise.

(d) 1) ja, 2) stückweise, 3) Lücke bei $x = 2$, 4) (punktsymmetrisch bezüglich $(2, 0)$, 5) keine, 6) ungefähr $(0, 0.5)$, 7) nein, 8) nein, 9) ja, 10) stückweise.

(e) 1) ja, 2) stetig, 3) keine, 4) keine, 5) 3, $x = \{-1, 1, 2\}$, Berührung bei $x = \{1, 2\}$, 6) $(0, 3.2)$, 7) 5 stationäre Punkte $x = \{-1, 0, 1, 1.5, 2\}$, Terrasse bei $x = -1$, andere Extrema, 8) keine, 9) nein, 10) nein, 11) ja.

(f) 1) ja, 2) ja, stückweise monoton, 3) keine, 4) punksymmetrisch bez. $(0, 0)$, 5) Nullstelle $x = 0$, 6) $x = 0$, 7) zwei bei ca. $x = \pm 1$, 8) nein, 9) ja $y = 0$, 10) ja, 11) ja.

(g) 1) nein, ..., 11) ja.

(h) 1) ja, 2) stetig, 3) möglicherweise $D = (0, \infty)$, 4) nein, 5) möglicherweise unendlich viele, 6) keinen, 7) unendlich viele, 8) ja? ($p = 2\pi$?), 9) $y = 0$, 10) nein, 11) ja.

0.6 Spiegle den Funktionsgraph von $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ zuerst an der y-Achse, dann an der x-Achse, dann am Ursprung und bestimme nun den Scheitelpunkt.

6 Der Scheitelpunkt der ursprünglichen Parabel ist $P = (1, 2)$. An der y-Achse gespiegelt wird $P'(-1, 2)$. An der y-Achse dann $P''(-1, -2)$. Sodann am Ursprung, d.h. die Koordinatenwerte mit (-1) multiplizieren. Somit $P''' = (1, 2)$. Der Scheitelpunkt ist der alte.

Kapitel 17

Elementarste Funktionen

17.1 Lineare Funktion

Linear heisst gerade. Die lineare Funktion stellt sich graphisch als Gerade dar.

17.1.1 Normalform

Definition 16. Die *lineare Funktion* f besitzt die Form

$$f(x) = a \cdot x + b$$

wobei $a \neq 0$, b und $f(x)$ reelle Zahlen sind. Der Koeffizient a ist die *Steigung* und b ist der *Nullwert* oder y-Achsenabschnitt.

Anmerkung 17.1. Der Definitionsbereich von f ist (∞, ∞).

Es gibt zwei Spezialfälle, nämlich $a = 0$ und $b = 0$.

Definition 17. Eine *konstante Funktion* f besitzt die Form

$$f(x) = b$$

wobei b und $f(x)$ reelle Zahlen sind. Ihr Definitionsbereich ist $(-\infty, \infty)$.

Anmerkung 17.2. Die Funktion $f(x) = a \cdot x$ nennt man *linear-homogen* oder in der Linearen Algebra nur linear. Die lineare Funktion $f(x) = ax + b$ nennt man präziser *linear-affin*. Bis auf weiteres bleiben wir bei der obigen Definition.

Definition 18. Die spezielle linear-homogene Funktion $y = x$ nennt man *Identität* oder (erste) *Winkelhalbierende.*

Satz 17.3. Der Graph $\mathcal{G}(f)$ einer linearen Funktion f ist eine *Gerade*.

Anmerkung 17.4. Umgekehrt ist nicht jede Gerade der Graph einer Funktion. Eine vertikale Gerade besitzt unendlich viele Werte für ein bestimmtes x. Mit dieser Ausnahme sind die restlichen Geraden Graphen von Funktionen.

Eine Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt. Zwei Punkte der kartesischen Zeichenebene mit unterschiedlichen x-Werte, also $P(x_p, y_p)$ und $Q(x_Q, y_Q)$ legen eine lineare Funktion fest. Es folgt ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten a und b:

$$\left| \begin{array}{rcl} x_p \cdot a + b & = & y_p \\ x_q \cdot a + b & = & y_q \end{array} \right|$$

Wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert resultiert

$$ax_p - ax_q = y_p - y_q$$

und daraus

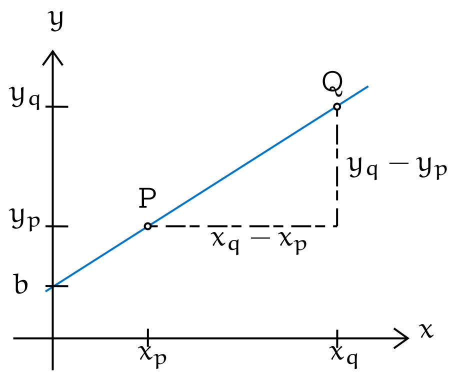
$$a = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$$

Wir lösen die erste Gleichung nach b auf und erhalten

$$b = y_p - ax_p$$

und a eingesetzt

$$b = y_p - \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} x_p = \frac{y_p(x_p - x_q) - (y_p - y_q)x_p}{x_p - x_q} = \frac{y_p x_q - y_q x_p}{x_p - x_q}$$



Formel 17.5. Geradensteigung Die *Geradensteigung* a der lineare Funktion durch zwei Punkte $P = (x_p, y_p)$ und $Q = (x_q, y_q)$ mit $x_q \neq x_p$ ist

$$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}.$$

Anmerkung 17.6. Die x-Werte der beiden Punkte dürfen nicht gleich sein, weil die Division durch Null nicht erlaubt ist und es sich um keine Funktion handelt.

Die Steigung kann auch folgendermassen dargestellt werden:

$$a = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Wichtig 6. Damit ist bekannt, dass mit $a < 0$ die Funktion abnehmend, mit $a >$ sie wachsend und mit $a = 0$ sie konstant ist. ⊣

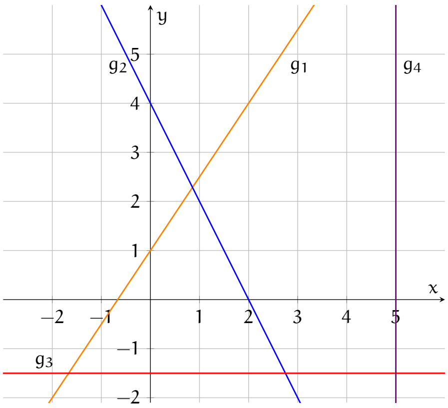
17.7 Übung Gegeben sind die zwei Punkte $(1, 2)$ und $(2, 4)$. Gesucht ist die Steigung a und der Nullwert b. Mit der Formel folgt

$$a = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

und

$$b = \frac{4 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{2-1} = 0$$

Mit $b = 0$ ist es die linear-homogene Version. ◁



17.8 Übung Bestimme aus der Graphik die Funktionsgleichungen anhand der Parameter a und b für die vier Kurven. Für g_1: anhand der Punkte $(0, 1)$ und $(2, 4)$ folgt $a_1 = 3/2$. Der Nullwert ist $b_1 = 1$. Für g_2 finden wir $b_2 = 4$ und $a_2 = -4/2 = -2$. Die Gerade g_3 hat die Steigung null, ist also konstant mit $b_3 = -1.5$. Die Gerade g_4 gehört zu keiner linearen Funktion, weil sie nicht rechtseindeutig ist. D.h. für den x-Wert 5 gibt es unendlich viele Bildpunkte. Damit sind die Parameter nicht bestimmbar. ◁

17.1.2 Punkt-Richtungsform

Mit zwei Punkten lässt sich die Steigung einfach berechnen. Die Formel für den Nullwert ist schlechter zu merken, ausser man erinnert die Determinante bei den Gleichungssystemen. Denn es ist

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x_p & y_p \\ x_q & y_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_p & 1 \\ x_q & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_p y_q - y_p x_q}{x_p - x_q}$$

Formel 17.9. Punkt-Richtungsform der Geraden Es sind Steigung a und ein Punkt (x_0, y_0) gegeben. Dann gilt die Geradengleichung

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

Anmerkung 17.10. Weil es unendlich viele Punkte auf der Geraden gibt, gibt es ebenso viele Ausprägungen von Punkt-Richtungsformen.

Die Herleitung der Formel ist ganz einfach: Zwei Punkte mit unterschiedlichen x_1 und x_2 werden in die Funktionsgleichung eingesetzt und subtrahiert:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2) = y_2 - y_1.$$

17.11 Übung Es ist $a = 1.5$ und ein Punkt auf der Geraden $(2, 4)$. Dann ist die Gerade

$$y - 4 = 1.5(x - 2).$$

Nun bestimmen wir den Nullwert b, der ja dem Punkt $(0, b)$ entspricht. Also ist speziell $x = 0$ und $y = b$. Somit

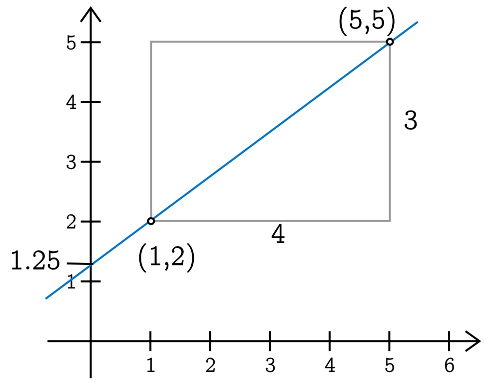
$$b - 4 = 1.5 \cdot (-2) \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 4 - 3 = 1.$$

Damit ist die Normalform

$$y = 1.5x + 1.$$

◁

17.12 Übung Es sind zwei Punkte $(1, 2)$ und $(5, 5)$ gegeben. Man bestimme Normalform und Punkt-Richtungsform und stelle sie graphisch dar. Wir beginnen mit der Steigung und bestimmen $a = \frac{3}{4}$. Eine Punkt-Richtungsform ist somit $y - 2 = 0.75(x - 1)$. Der Nullwert folgt aus $y = b$ und $x = 0$, also $b - 2 = -0.75$ und somit $b = 1.25$. Damit ist die Normalform $y = 0.75x + 1.25$. In der Abbildung werden die zwei Punkte eingetragen und eine Gerade durch sie gelegt. Diese schneidet die y-Achse bei $b = 1.25$.



◁

17.1.3 Proportionalität

Wir kommen auf einen Spezialfall der linearen Funktion zurück, bei dem $b = 0$ ist.

Definition 19. Bei der linear-homogenen Funktion $f(x) = ax$ heisst a *Proportionalitätsfaktor*.

Aus der Formel $f(x) = ax + b$ folgt allgemein

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta f(x) = a \cdot \Delta x.$$

Somit kann man zusammenfassen: Bei der linearen Funktion ist die Änderung des Funktionswertes $\Delta f(x)$ proportional zu Änderung des Argumentwertes Δx, bei der linear-homogenen Funktion ist der Funktionswert $f(x)$ proportional zum Argumentwert x.

17.13 Übung Wir betrachten die Bogenlänge eines Einheitskreissektor $s = 2 \cdot \pi \cdot \varphi/360$. Was ist der Proportionalitätsfaktor und welchen Wert hat er? Wir gehen davon aus, dass der Radius $r = 1$ ist. Die Funktion der Bogenlänge ist $s(\varphi) = \frac{2 \cdot \pi}{360} \cdot \varphi = a \cdot \varphi$. Damit ist $a = \frac{2 \cdot \pi}{360}$. Der Wert ist $a \approx 0.0175$. ◁

17.14 Übung Der Maurer Maurer mauert 2 Quadratmeter pro Stunde. Gesucht ist die Funktion von Mauerfläche F in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden. Für $t = 0$ ist $F(0) = 0$. Deshalb ist die Funktion linear-homogen der Form $F(t) = a \cdot t$. Zudem gilt $F(1) = 2$. Somit $a = 2$. Die Lösung ist $F(t) = 2t$. ◁

17.15 Übung Ein Kilogramm Äpfel kostet Fr. 2.–. Wie sieht die Funktion Kosten K in Abhängigkeit von der gekauften Menge m aus? Wieder ist $K(0) = 0$, denn wenn ich nichts kaufe, bezahle ich auch nichts. Damit ist $K(m) = a \cdot m$. Der Proportionalitätsfaktor a ist der Kilopreis, d.h. Fr. 2.–. Damit folgt $K(m) = 2 \cdot m$. ◁

17.16 Übung Frau Mustermann plant die Ferien. Der Flug kostet Fr. 650.– und jeder Tag Übernachtung mit Essen kostet Fr. 200.–. Was ist die Kostenfunktion K in Abhängigkeit der Anzahl Tage t? Wenn man nur hin- und herfliegt ohne Übernachtung, dann ist $K(0) = 650$. Die Kosten ändern sich bei jedem zusätzlichen Tag $\Delta K = a \cdot \Delta t = a = 200$. Zusammen folgt die Funktion $K(t) = 200 \cdot t + 650$. ◁

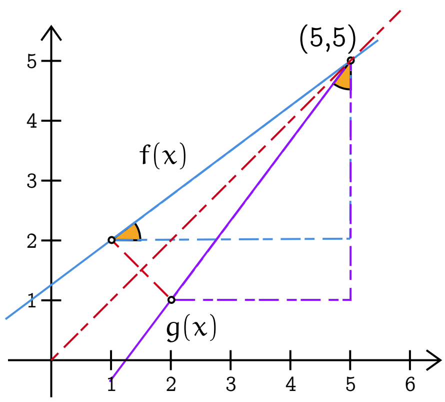
17.1.4 Eigenschaften

Inverse

Mit dem Rezept 16.6 lässt sich die Inverse leicht bestimmen. Wir ersetzen $f(x)$ mit y: $y = ax+b$, lösen nach x auf $x = (y-b)/a$ und vertauschen x und y: $g(x) = y = \dfrac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Formel 17.17. Inverse der linearen Funktkion Die Inverse $g(x)$ von $f(x) = ax+b$ mit $a \neq 0$ ist

$$g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$



Die Inverser einer linearen Funktion ist wiederum eine lineare Funktion, denn die gespiegelte Gerade ist wiederum eine Gerade. Die Steigung der Inversen ist der Kehrwert der Steigung des Urbildes. Alle Geraden, die nicht parallel zur Identität, also der Winkelhalbierenden, sind, schneiden diese und zwar im Schnittpunkt der beiden Geraden.

Nullstelle

Die lineare Funktion $f(x) = ax + b$ hat für $a \neq 0$ genau eine Nullstelle x_0. Sie ist einfach zu berechnen mit $f(x_0) = 0$. Es folgt $0 = ax_0 + b$ und damit $x_0 = \dfrac{-b}{a}$.

Formel 17.18. Nullstelle lineare Funktion Für $f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ ist die Nullstelle bei

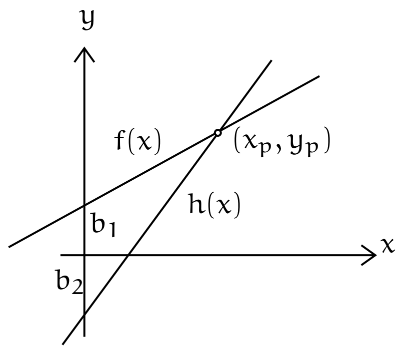
$$x_0 = \frac{-b}{a}.$$

17.19 Übung Finde die Nullstelle von $y = 2x - 1$. Mit der Formel $x_0 = -(-1)/2 = 1/2$. Der Punkt ist $S(1/2, 0)$. ◁

Schnitt zweier Geraden

Zwei Geraden schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind. Die Graphen zweier linearer Funktionen sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung a besitzen. Falls $a_1 \neq a_2$ ist, schneiden sie sich in einem Punkt P.

Der Schnittpunkt $P(x_p, y_p)$ gehört einerseits zum Funktionsgraphen $f(x) = a_1 x + b_1$ und zum Graphen $h(x) = a_2 x + b_2$. Diese Bedingung impliziert $f(x_p) = h(x_p)$, denn $y_p = h(x_p) = f(x_p)$. Somit muss man die Gleichung nach x lösen. Man findet:

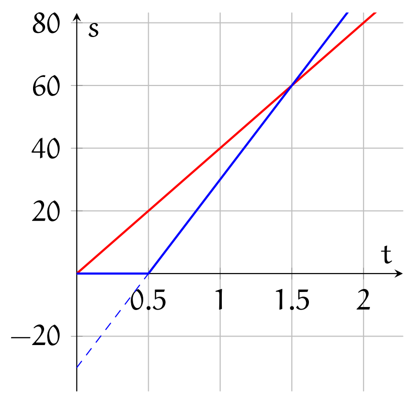


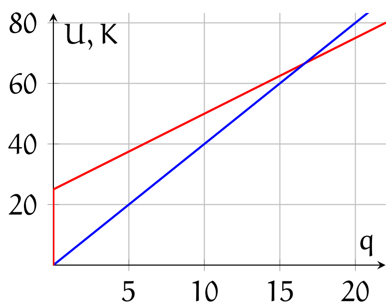
$$\begin{aligned} a_1 x_p + b_1 &= a_2 x_p + b_2 \\ x_p(a_1 - a_2) &= b_2 - b_1 \\ x_p &= -\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \end{aligned}$$

Formel 17.20. Schnittpunkt zweier Geraden Die Graphen zweier linearer Funktionen $a_1 x + b_1$ und $a_2 x + b_2$ mit $a_1 \neq a_2$ schneiden sich im Punkt mit x-Koordinate

$$x_p = -\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}.$$

17.21 Übung Sehr beliebt sind die *Zeit-Weg-Diagramme*, in die man den Weg oder Ort in Abhängigkeit der Zeit aufzeigt. Weil gilt $s = v \cdot t + s_0$ in Analogie zu $y = ax + b$, wird die Geschwindigkeit zur Steigung der Kurve. Das Problem lautet: Ein Einbrecher fährt auf dem gestohlenen Traktor mit 40km/h davon. Eine halbe Stunde später nimmt die Polizei die Verfolgung auf mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km/h. Wann wird der Einbrecher erreicht? Im Diagramm trägt man die zwei Geraden ein, wobei man mit dem zuerst abfahrenden im Ursprung beginnt. Aus der Graphik liest man heraus, dass nach einer Stunde Verfolgung man sich nach 60km trifft. Bei der zweite Gerade ist der x-Abschnitt (Nullstelle) gegeben. Für die Normalform der linearen Funktion muss man daraus den Nullwert b bestimmen zu $b = -ax_0 = -60 \cdot 0.5 = -30$. Damit $g(x) = 60t - 30$. Mit $s(t) = 40t$ gleichgesetzt folgt rechnerisch $t = 30/20 = 1.5$. ◁

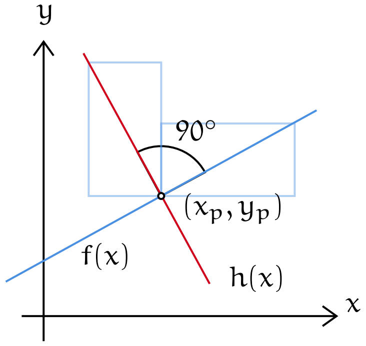




17.22 Übung In der Betriebswirtschaft muss man die sogenannte *Gewinnschwelle* bestimmen, bei welcher der Umsatz die Kosten deckt. Die Kostenfunktion ist meist linear mit $K(q) = aq + b$. Der Term b steht für die fixen Kosten, die unabhängig von der produzierten Menge q sind. Die variablen Kosten bilden den Term $a \cdot q$. Mit Umsatz, $U = q \cdot p$ Menge mal Preis p, minus Kosten $K(q)$ gleich Gewinn gibt es eine Menge q, bei der $K(q) = U(q)$. Algebraisch berechnet folgt $aq + b = pq$ und damit $(p - a)q = b$ und $q = \dfrac{b}{p - a}$. Die Werte sind $b = 25$, $a = 2.5$, $p = 4$. Damit $q = \dfrac{25}{1.5} \approx 16.7$. Der Wert wird vom Diagramm bestätigt. ◁

Normale

Die *Normale* zur Geraden f ist die Gerade h, welche auf f senkrecht steht. Sie wird erzeugt, indem die ursprüngliche Gerade genau um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht wird.



Durch die Drehung geht $\Delta x = x_1 - x_2$ in $\Delta h(x) = h(x_1) - h(x_2)$ über und gleichzeitig geht $\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_2)$ in $-\Delta x$ über. Die Steigung von $h(x)$ ist somit

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta f(x)}.$$

Mit $f(x) = ax + b$ und $h(x) = cx + d$ folgt $c = -1/a$. Die Normale im Punkte (x_p, y_p) ist dann mit der Punkt-Richtungformel

$$g(x) - y_p = -\frac{1}{a}(x - x_p)$$

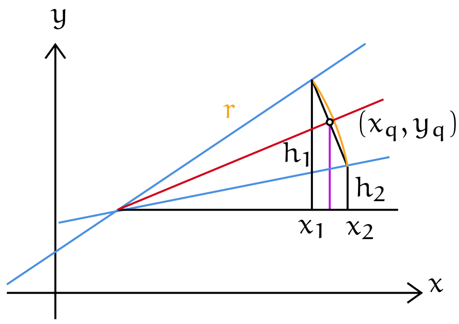
Formel 17.23. Normale zur Geraden Die Normale zur Geraden der linearen Funktion $f(x) = ax + b$ im Punkt (x_p, y_p) ist

$$h(x) = y_p - \frac{1}{a}(x - x_p)$$

17.24 Übung Finde von $P = (3, 1)$ aus den Punkt auf der Geraden $g : 2x-1$, der den kürzesten Abstand hat. Der kürzeste Abstand liegt auf der Senkrechten h auf g durch P. Diese Gerade ist mit der Punkt-Richtungsform und mit der inversen Steigung $h: y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 3)$. Wir schneiden die Geraden in Q: $y = \frac{-1}{2}(x - 3) + 1 = 2x - 1$ oder $(x - 3) + 2 = 4x - 2$ und $4 - 3 = 3x$. Damit $x_q = 1/3$ und $y_q = -1/3$. ◁

Winkelhalbierende zweier Geraden

Falls sich zwei Geraden schneiden, dann bilden sie vier Zwischenwinkel, von denen je zwei gleich sind. Der Punkt (x_q, y_q) liegt auf der Winkelhalbierenden, denn er ist der Mittelpunkt der Seite eines gleichschenkligen Dreiecks mit Seitenlänge r. Die Koordinaten (relativ zum Schnittpunkt) dieses Punktes sind die Mittelwerte von x_1 und x_2 sowie von h_1 und h_2. Die Steigung der Winkelhalbierenden ist dann



$$a = \frac{h_1 + h_2}{x_1 + x_2} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{x_1 + x_2}.$$

Nun sind diese Grössen noch näher zu bestimmen. Der Pythagoras liefert für die Hypothenusen $r = 1$ die Gleichungen mit $h_1 = a_1 x_1$ und $h_2 = a_2 x_2$:

$$1 = x_1^2 + (a_1 x_1)^2 = x_1^2(1 + a_1^2) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = (1 + a_1^2)^{-1/2}$$

und analog

$$1 = x_2^2 + (a_2 x_2)^2 = x_2^2(1 + a_2^2) \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = (1 + a_2^2)^{-1/2}$$

Alles einzusetzen macht die Sache unübersichtlich.

17.25 Übung Wir suchen die Winkelhalbierende von $f(x) = 4x$ und $g(x) = 2x$. Rechnerisch folgt $x_1 = 0.2425$ und $x_2 = 0.4472$. Damit

$$a = \frac{0.2425 \cdot 4 + 0.4472 \cdot 2}{0.2425 + 0.4472} = 2.703$$

Das Resultat ist plausibel, denn es liegt zwischen 4 und 2. $\triangleleft$

17.1.5 Lineare Interpolation, Änderungsrate

Durchschnittliche Änderung

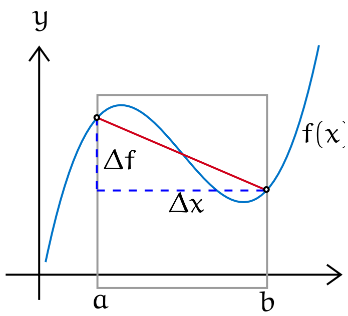
Komplizierte Funktionen kann man stückweise annähern durch lineare Funktionen, indem man die Werte an den Intervallgrenzen mit einer Geraden verbindet.

Definition 20. Es ist f eine beliebige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Die *durchschnittliche Änderungsrate* von f in $[a, b]$ ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Mit einem der zwei Punkte, $(a, f(a))$ oder $(b, f(b))$, lässt sich die Gerade als lineare Funktion mittels Punkt-Richtungsformel darstellen.

Geometrisch gesprochen ist die Gerade mit der durchschnittlichen Änderungsrate als Steigung eine Sekante durch die zwei Endpunkte der Funktion. Wiederholt man diese Prozedur, entsteht ein Streckenzug, der die Funktion f annähert. Je kleiner das Intervall desto besser die Näherung. Wenn das Intervall immer kleiner gemacht wird, nähert sich die Sekante an die Tangente an.



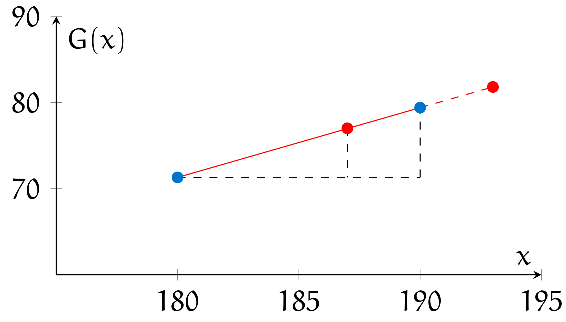
17.26 Übung Herr Giovanoli fährt von Zürich nach St. Moritz die 203 Kilometer in 2 Stunden und 25 Minuten. Was war seine Durchschnittsgeschwindikeit? Es ist $\bar{v} = \frac{2\frac{25}{60}}{203} = 84$, also 84 km/h. Was war seine Höchstgeschwindigkeit? Auf der Autobahn sehr wahrscheinlich 120 km/h. $\triangleleft$

Interpolation

Die *Interpolation* ist ein Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung eines unbekannten Funktionswertes mithilfe von bekannten Funktionswerten an benachbarten Stellen. Die lineare Interpolation verwendet dafür eine linear Funktion.

Die Interpolation tritt meist bei einer Tabelle zum Vorschein, denn darin kann man ja nicht beliebig viele Werte verzeichnen. Wir betrachten einen Ausschnitt aus einer Tabelle mit empfohlenen Gewichten in Abhängigkeit der Grösse.

Grösse [cm]	170	180	190	200	210
Gewicht [kg]	63.6	71.3	79.4	88.0	97.0



Die Tabelle ist sehr grob, denn sie weist grosse Schritte zwischen den Höhen der Personen auf. Wir möchten das Idealgewicht für die Grösse 185 bestimmen. Da es genau zwischen 180 und 190 liegt, nimmt man den Mittelwert, also $(79.4 + 71.3)/2 = 76.9$. Nun rechnen wir das Gesicht für die Grösse 187 cm aus. Wir bestimmen die Änderungsrate $\Delta f/\Delta x$ zu $(79.4 - 71.3)/10 = 0.83$. Das ist die Steigung a. Mit der Punkt-Richtungsformel $y - 71.3 = 0.83 \cdot (187 - 180)$ oder $y = 71.3 + 0.83 \cdot 7 = 77.1$.

Formel 17.27. Linear interpolierter Wert Zwischen zwei Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist der Wert bei x mit $a \leqslant x \leqslant b$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Wenn der gesuchte Wert ausserhalb der Tabelle liegt, dann spricht man von *Extrapolation*. Diesen Wert $f(x)$ mit $x > b$ bestimmt man genau gleich, d.h. mit

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Bei der Interpolation ist die Ungewissheit über den angenäherten Wert im allgemeinen besser als bei der Extrapolation, wo man in unbestimmtes Gebiet vorstösst.

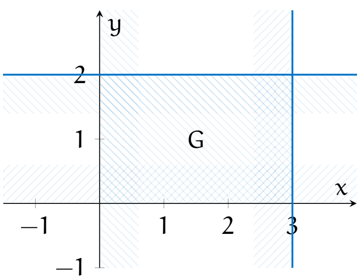
17.28 Übung Man bestimme den Wert bei $x = 1.25$ wenn die Werte $(0.5, 124)$ und $(2, 521)$ gegeben sind. Mit der Formel folgt

$$f(1.25) = 124 + \frac{521 - 124}{2 - 0.5}(1.25 - 0.5) = 198.5$$

◁

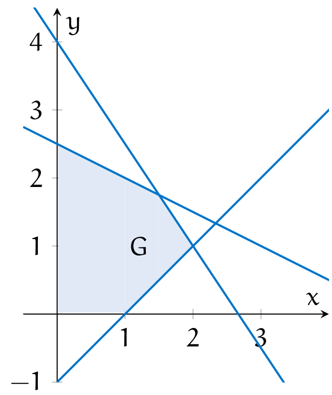
17.1.6 Graph der linearen Ungleichung

Die Funktion ist eine Zuordnung von x-Werten zu y-Werten, die in der kartesischen Zeichenebene eine Kurve darstellen. Kurven kann man auch als Grenzen von Gebieten verstehen. Wenn man das Gebiet beschreiben will, kann man Kurven mit der Ordnungsrelation verwenden. Beispielsweise ist mit $x < a$ die Halbebene gemeint, die links von a liegt und alle Punkte (x, y) mit $x \leqslant a$ umfasst.



Genauso einfach ist das abgrenzen von $y \leqslant 1$, das Gebiet einschliesslich der Grenze unterhalb von $y = 2$. Mit vier Bedingungen und Grenzen kann man dann z.B. ein Rechteck einfassen, wenn das Gebiet im 1. Quadraten liegen soll, also $x \geqslant 0$ und $y \geqslant 0$ verlangt wird. Mit $a = 3$ sieht man in der Abbildung das eingehegte Rechteck G.
Nun untersuchen wir eine lineare Ungleichung wie $y < -2x+4$. Die rechte Seite bezeichnen wir mit $g(x) = -2x + 4$.

Die Ungleichung besagt, dass für ein bestimmtes x alle y zulässig sind, für die $y < g(x)$ gilt. Das sind die Punkte, die unter der Geraden liegen. Anderseits bedeutet eine Ungleichung wie $y \geqslant h(x)$ mit $h(x) = x - 2$, dass alle Punkte oberhalb und auf dieser Geraden gemeint sind. Wenn wir dann noch verlangen $y < -0.5x + 2.5$, $x \geqslant 0$ und $y \geqslant 0$, dann folgt das Gebiet gemäss der Abbildung.



17.1.7 Lineare Programmierung**

Lineare Programmierung heisst auch lineare Optimierung. Der Name stammt aus den 40er Jahren, vor dem Begriff von Programmierung als Schreiben eines Coputercodes. Die LP wurde im Zweiten Weltkrieg entwickelt, um besten, d.h. ökonomischen und wirksamen, Gebrauch von Einsatzmitteln wie Flugzeugen und U-Booten zu machen. In der Wirtschaft ist Optimierung ein äusserst wichtiger Aspekt. In diesem Mathematikwerk ist dies die modernste Mathematik, denn das meiste stammt aus der Zeit vor dem 19. Jahrhundert.

Definition 21. Optimierungsproblem Bei einem *Optimierungsproblem* werden die Elemente aus der Menge von zulässigen Lösungen $x \in G$ mit einer *Zielfunktion* $f(x)$ bewertet und maximiert.

Anmerkung 17.29. Optimierungsprobleme können auch Minimierungsaufgaben sein. Die Zielfunktion kann man aber auch so anpassen, dass man maximiert um das Minimum zu finden.

Wir beginnen mit einem Beispiel. Eine Firma produziert zwei Produkte A und B. Für die Herstellung durchlaufen sie zwei Arbeitsstationen “Werkstatt” und “Montage”. Die Produkte benötigen unterschiedliche Kapazitäten, wie in der Tabelle wiedergegeben

	Kapazität [h]	Einsatzmenge pro Stk.		Tagesmaximum	
Produkt		A	B	A	B
Werkstatt	200	1	2	200	100
Montage	125	1	0.5	125	250

Die Arbeitsstationen können also 200, resp. 125 Arbeitsstunden leisten, ein A braucht 1 Stunde an Montage-Kapazität und ein B nur halb soviel. Zusätzlich ist bekannt, dass aufgrund von Materialknappheit höchsten 90 Produkte B hergestellt werden können. Nun zur wirtschaftlichen Seite: Produkt A erzielt einen Gewinnbeitrag von Fr. 2.– und Produkt B von Fr. 2.50. Das Ziel ist, den Gewinnbeitrag zu maximieren.
Nun formalisieren wir die Situation. Wir nennen die produzierte Menge von A x_A und die Menge von B x_B. Die Bedingungen sind zusammengefasst wie folgt:

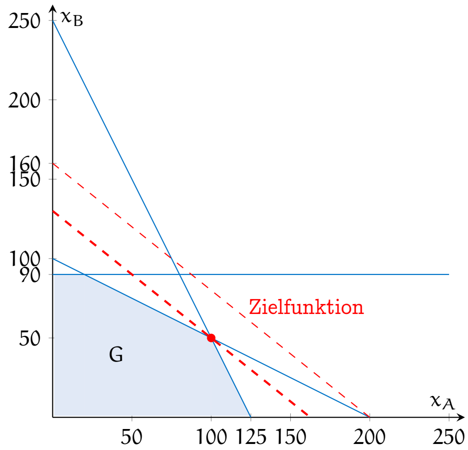
$$
\begin{aligned}
& x_A + 2x_B \leqslant 200 && \text{Beschränkung Werkstatt}\\
& x_A + 0.5x_B \leqslant 125 && \text{Beschränkung Montage}\\
& x_B \leqslant 90 && \text{Materialknappheit für B}\\
& x_A \geqslant 0 && \text{keine negative Produktion möglich}\\
& x_B \geqslant 0 && \text{keine negative Produktion möglich}
\end{aligned}
$$

Die Zielfunktion habe wir auch bereits benannt, nämlich

$$z(x_A, x_B) = 2x_A + 2.5x_B.$$

Umgeformt nach x_B und mit dem Parameter z folgt $x_B = 0.8x_A + z$. Das ist eine Schar von Geraden, woraus wir diejenige kennen wollen, deren z maximal ist und die noch im zulässigen Gebiet G liegt.

Mit unserer Kenntnis der graphischen Darstellung von linearen Ungleichungen können wir das zulässige Gebiet von (x_A, x_B) aufzeichnen. Aus der Tabelle kenne wir Punkte, die zur Ungleichung gehören, z.B. $(250, 0)$ und $(125, 0)$ oder $(0, 100)$ mit $(0, 200)$. Die dritte Restriktion ist eine Konstante bei $x_B = 90$. Die Schar der Zielfunktionen besitzen alle die Steigung $-0.8 = 2/2.5$. Wir legen nun eine Zielfunktion an das zulässige Gebiet G und finden den Punkt $(100, 50)$. Hier ist dann der Parameter $z = 325$. Das ist der optimale Punkt mit dem höchsten Gewinnbeitrag von Fr. 325.–.



Das Beispiel ist natürlich übertrieben einfach, denn es hat nur zwei Variablen. Das erlaubt es uns, eine Lösung graphisch zu bestimmen. In der Realität gibt es sehr viel mehr Variablen. Der Lösungsalgorithmus aus den 40er-Jahren heisst Simplex und arbeitet mit fortlaufenden Tabellen (Tableaux).
Eine wichtige Erkenntnis ist, dass das Optimum einer bedingten Optimierungsaufgaben immer auf dem Rand des zulässigen Gebiets ist.

17.30 Übung Ein Bauer hat 10 Schweine, die er mit Fischmehl A und/oder sterilisierten Schlachtabfällen B füttert. Fischmehl kostet Fr. 300.– pro Tonne, Schlachtabfälle Fr. 240.–. Die Schweine müssen genügend Proteine und Aminosäuren erhalte, aber nicht zu viel Kalzium. Die Tabelle zeigt die Eigenschaften

Futter	Protein [g/kg]	Aminosäure	Kalzium	Preis
Fischmehl	600	180	50	300
Schlachtabfälle	500	50	110	240

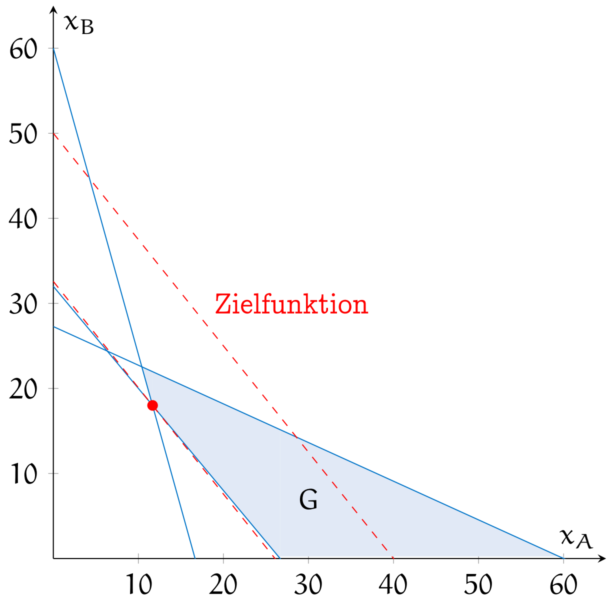
Die Anforderungen sind wie folgt: Jedes Schwein benötigt mindestens 1.6 kg Protein, 0.3 kg Aminosäure und höchstens 0.3kg Kalzium. Was ist die kostengünstigste, zulässige Futtermenge?
Wir skalieren auf zehn Schweine. Die Variablen sind x_A für Menge Fischmehl und x_B für Schlachtabfälle. Die Restriktionen sind

$$\begin{aligned} 0.6x_A + 0.5x_B &\geqslant 16 && \text{Minimum Protein} \\ 0.18x_A + 0.05x_B &\geqslant 3 && \text{Minimum Aminosäure} \\ 0.05x_A + 0.11x_B &\leqslant 3 && \text{Maximum Kalzium} \\ x_A \geqslant 0, x_B &\geqslant 0 && \text{triviale Bedingung} \end{aligned}$$

Die Zielfunktion, hier zu minimieren, ist $z(x_A, x_B) = 0.3x_A + 0.24x_B$ und mit Parameter z: $x_B = 1.25x_A + z$. Wir wandeln auch die Restriktionen in Geradengleichungen um mit x_B als abhängige Variable:

$$x_B = -1.2x_A + 32 \qquad \text{Protein}$$
$$x_B = -3.6x_A + 60 \qquad \text{Aminosäure}$$
$$x_B = -\frac{5}{11}x_A + \frac{300}{11} \qquad \text{Kalzium}$$

Wir zeichnen das Diagramm.



Die Restriktionen beschränken das Gebiet G zusammen mit der trivialen Bedingung $x_B \geqslant 0$. Die Zielfunktion hat die Steigung -1.25, die nur wenig steiler ist als die 1.2 von der Protein-Bedingung. Das Minimum ist die Zielfunktion, die am weitesten links-unten das Gebiet berührt. Dieser Punkt ist $(11\frac{2}{3}, 18)$. Rechnerisch schneidet sich hier $-3.6x_A + 60 = -1.2x_A + 32$, woraus $x_A = \frac{-28}{-2.4} = 70/6 = 11\frac{2}{3} \approx 11.67$. Diesen Wert eingesetzt ergibt $x_B = -1.2 \cdot 70/6 + 32 = 32 - 14 = 18$. Die Zielfunktion hat hier dann den Wert $z = 0.3 \cdot 70/6 + 0.24 \cdot 18 = 3.5 + 4.32 = 8.82$. $\triangleleft$

An diesem Beispiel erkennen wir, dass das Optimum auch eine Strecke sein könnte, also viele Punkte, welche denselben Zielwert aufweisen.

17.2 Quadratische Funktionen

In der Algebra haben wir ausführlich quadratische Gleichungen berechnet. Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ist eine quadratische Gleichung.

Definition 22. Eine *quadratische Funktion* besitzt die Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

wobei $a \neq 0$, b und c reelle Zahlen sind. Der Definitionsbereich ist (∞, ∞).

Satz 17.1. Der Funktionsgraph $\mathcal{G}(f)$ einer quadratische Funktion f ist eine Parabel.

Wir haben darüber diskutiert, dass solche Gleichungen unter gewissen Umständen faktorisiert werden können oder irreduzibel sind, also Nullstellen besitzen oder nicht weiter zerlegbar sind. Diese Konzepte finden wir in den Graphen wieder.

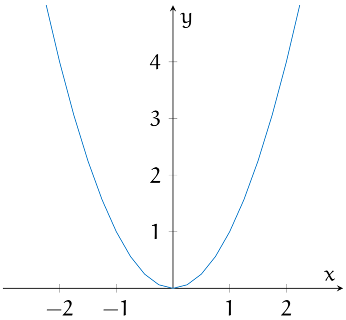


Abbildung 17.1

Der Graph der einfachsten Parabel (Normparabel) mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ sieht man in der Abbildung. Die Normparabel ist symmetrisch zur y-Achse, also $f(x) = f(-x)$. Ihr Wertebereich ist $W = [0, \infty)$. Sie berührt die x-Achse in einem Punkt. Dieser ist eine zweifache Nullstelle. Spiegelt man die Parabel an der Identität, d.h. der ersten Winkelhalbierenden, so ist ihr Bild keine Funktion und somit keine Inverse. Sie besitzt nur eine eingeschränkte Inverse.

Definition 23. Die *Scheitelpunktform* der quadratische Funktion f ist

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

mit $a \neq 0$, h und k reelle Zahlen.

Vergleicht man die zwei Formen, d.h. Scheitelpunkt- und Normalform, so folgen die Umrechnungen mittels Koeffizientenvergleich:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k = a(x^2 - 2hx + h^2) + k = ax^2 - 2axh + ah^2 + k$$

so dass

$$b = -2ah \qquad \text{und} \qquad c = ah^2 + k$$

oder

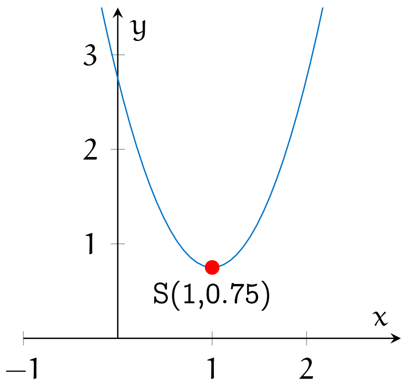
$$h = -\frac{b}{2a} \qquad \text{und} \qquad k = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Alternative kann man das Quadratische Ergänzen bemühen, indem man die Normalform ergänzt gemäss

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{-h})^2 \underbrace{-a\frac{b^2}{4a^2} + c}_{k}$$

17.2 Übung Es ist die Form $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ in Scheitelform zu bringen. Wir ergänzen $2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x-1)^2 - 2 + 5 = 2(x-1)^2 + 3$. ◁

17.3 Übung Die Form ist in Normalform zu bringen: $f(x) = 3(x-4)^2 - 2$. Entwickeln des quadratischen Terms führt zu $f(x) = 3(x^2 - 8x + 16) - 2 = 3x^3 - 24x + 46$. ◁



In der Abbildung finden wir die Funktion $f(x) = 2(x-1)^2 + 0.75$. Wie man unschwer herauslesen kann, ist der Scheitelpunkt, der stationäre Punkt mit der horizontalen Tangente und gleichzeitig Extremum der Kurve, bei $(1, 0.75)$. Vergleicht man die Werte mit den Parametern der Funktion, so ist offensichtlich, dass $S(h,k)$ gilt. Das kann man zeigen, indem man man die Koordinaten vom Punkt S in die Scheitelpunktformel einsetzt und erhält $f(h) = a(x-h)^2 + k = 0 + k = k$. Also ist $S(h,k)$ auf der Kurve. Wenn man nun $x = h \pm \delta$ wählt, dann wird in beiden Fällen der Funktionswert $f(h \pm \delta) > f(h)$ bei $a > 0$ und kleiner bei $a < 0$. Somit ist (h,k) der Scheitelpunkt.

Satz 17.4. Der Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = a(x-h)^2 + k$ mit $a \neq 0$, h und k reelle Zahlen ist der Punkt (h,k). In der Form $f(x) = ax^2+bx+c$ ist der Scheitel in $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$.

17.5 Übung Es ist die Funktionsgleichung $f(x) = 2x^2 - x + 3$ gegeben. Man finde den Scheitel. Wir wenden die Formel an und finden $S(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ mit $\frac{-b}{2a} = 1/4$ wird $S(0.25, 2.88)$. Quadratisch ergänzt als Alternative: $2(x^2 - 1/2x) + 3 = 2(x-1/4)^2 - 1/8 + 3 = 2(x-1/4)^2 + 23/8$. Also auch wieder $S(\frac{1}{4}, \frac{23}{8})$. ◁

17.2.1 Transformationen

Wir haben im vorhergehenden Kapitel die Transformationen generisch besprochen. Es sind drei Haupttransformationen, nämlich

- Streckungen (und Stauchungen),
- Spiegelungen und
- Verschiebungen,

die sich in der Formel wiederfinden:

$$g(x) = Af(Bx + C) + D.$$

Unsere Ausgangslage ist $f(x) = x^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} g(x) &= A(Bx + C)^2 + D \\ &= \underbrace{AB^2}_{a} x^2 + \underbrace{2ABC}_{b} x + \underbrace{AC^2 + D}_{c} \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Gemäss Eigenschaft 16.2 gilt:

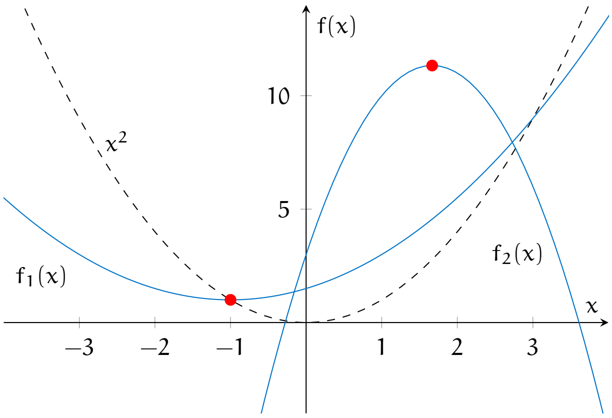
- A: Vertikale Streckung/Stauchung, Spiegelung y-Achse
- B: Horizontale Streckung/Stauchung, Spiegelung x-Achse,
- A und B: Punktspiegelung,

- C: Horizontale Verschiebung,
- D: Vertikale Verschiebung.

Wir zeigen ein paar Beispiele. Zuerst wählten wir $A = 0.5$, $B = 1$, $C = 1$ und $D = 1$. Damit wird die Funktionsgleichung zu

$$f_1(x) = 0.5(x+1)^2 + 1 = 0.5x^2 + 1x + 1.5$$

. Wir erwarten eine vertikale Stauchung und eine Verschiebung nach links oben.

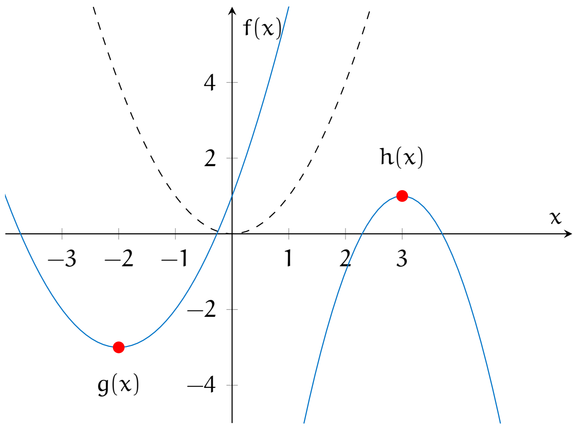


Als zweites zeigen wir $f_2(x) = -3x^2 + 10x + 3$. In Scheitelform gebracht (quadratisches Ergänzen) gilt

$$f_2(x) = -3(x - \frac{10}{6})^2 + 3\frac{100}{36} + 3 = -3(x - \frac{5}{3})^2 + \frac{34}{3}.$$

Wir habe also mit $A = -3$ eine Spiegelung an der x-Achse und eine vertikale Streckung sowie mit $D = \frac{34}{3}$ eine vertikale Verschiebung. Mit $C = -\frac{5}{3}$ haben wir eine horizontale Verschiebung zu positiven x-Werten, also nach rechts.

17.6 Übung Man diskutiere, wie die Normparabel x^2 als $g(x) = (x+2)^2 - 3$ transformiert wird. Wir sehen $C = 2$ und $D = -3$. Damit wird die Parabel nach links und nach unten verschoben. Man erkennt dies auch am Scheitel $S(-2, -3)$. ◁



17.7 Übung Wir betrachten $h(x) = -2(x-3)^2 + 1$. Also $A = -2$, $B = -3$ und $D = 1$. Der Scheitel ist bei $S(3, 1)$. Die Parabel ist nach rechst-oben verschoben, an der x-Achse gespiegelt, weil $A < 0$ und vertikal gestreckt mit $|A| > 1$. ◁

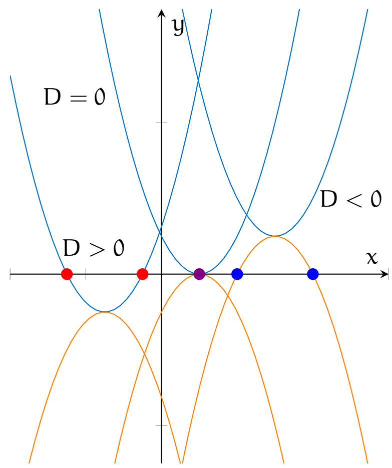
17.8 Übung Wie lautet die Funktionsgleichung $g(x)$ der am Ursprung gespiegelten Funktion $f(x) = (x-2)^2 + 2$? Es muss gelten $g(x) = -f(-x)$. Somit $g(x) = -((-x-2)^2 + 2)$ oder $-(x+2)^2 - 2$. Man erkennt, dass der Scheitel von f $S_f(2, 2)$ sodann auf $S_g(-2, -2)$ abgebildet wird. Diese zwei Punkte liegen schon mal richtig gespiegelt. f ist nach oben offen, g nach unten, denn der Leitkoeffizient ist bei f 1 und bei g -1. ◁

17.2.2 Nullstellen

Die Abb. 17.2 zeigt eine Kurve, welche die x-Achse nicht schneidet. Wir kennen das Phänomen aus der Algebra: Es gibt quadratische Gleichungen, die keine reelle Lösung haben. Man verdeutliche sich, dass die x-Achse eine reelle Zahlengerade ist. Quadratische Terme können wie Primzahlen irreduzibel sein. Wir kennen auch die Bedingungen dafür. Massgebend ist der Wert der *Diskriminanten*. Es ist

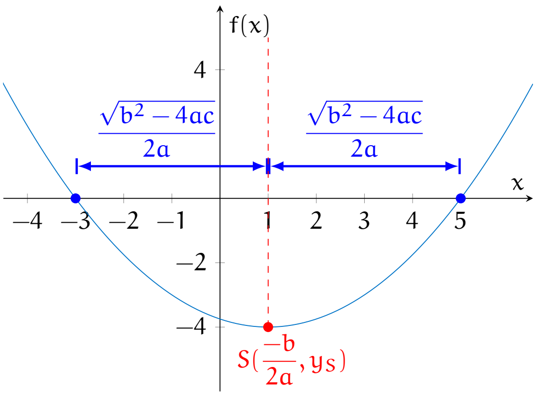
$$D = b^2 - 4ac$$

Nun schauen wir nochmals die Scheitelform an: $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Wir haben gefunden, dass $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ ist. Mit der Diskriminanten folgt $k = \frac{-D}{4ac}$.



In der Abbildung sehen wir sechs Konfigurationen, aus denen man sehr gut erkennt, wann es keine, eine oder zwei Nullstellen gibt. Es hängt davon ab, wo der Scheitelpunkt liegt und auf welche Seite die Parabel offen ist. Wenn der Scheitel auf der x-Achse liegt, dann gibt es immer eine doppelte Nullstelle.
Rechnerisch sind die Nullstellen u.a. mit der Mitternachtsformel zu bestimmen, also aus $ax^2 + bx + c = 0$ folgend die Nullstellen, sofern $D \geqslant 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



In der Abbildung sieht man die Korrespondenz von Mitternachtsformel und den graphischen Nullstellen. Diese sind vom Scheitelpunkt $S(x_S, y_S)$ mit $x_S = -b/2a$ um den Wurzelterm $d = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ verschoben. Zum einen also $x_1 = x_S + d$ und zum anderen $x_2 = x_S - d$. Wenn die Diskriminaten, der Radikand, null ist, sind $x_1 = x_2 = x_S$ identisch und bilden dann eine sogenannt doppelte Nullstelle.

17.2.3 Tangente an Parabel

Wir suchen die Tangente an die bekannte Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit der Geradengleichung $g : g(x) = mx + n$. Der einzige gemeinsame Punkt (x_b, y_b) ergibt sich aus der Gleichsetzung von $f(x_b) = g(x_b)$.
Nun wissen wir, dass eine quadratische Gleichung null, eine oder zwei Nullstellen haben kann (wenn wird an $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ denken). Wir wissen aber auch, dass eine Nullstelle vorhanden ist, wenn die Diskriminante $D = 0$ ist. Man könnte also sagen: $D < 0$ Passante, $D = 0$ Tangente und $D > 0$ Sekante. Wir haben also zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten Gleichungsparameter m und n. Wir schreiben die Gleichungen hin:

$$ax^2 + x(b-m) + c - n = 0$$
$$(b-m)^2 - 4a(c-n) = 0$$

Mit $\gamma = b - m$ und $\beta = c - n$ folgt einfacher

$$\begin{aligned} ax^2 + x\gamma + \beta &= 0 \qquad\qquad\qquad | \cdot 4a \\ \gamma^2 - 4a\beta &= 0 \end{aligned}$$

Die zwei Gleichungen addieren, so dass β wegfällt und nach γ ordnen

$$\gamma^2 + 4ax\gamma + 4a^2x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\gamma + 2ax)^2 = 0$$

Damit folgt $\gamma = -2ax$. Und weiter folgt β: $ax^2 - 2ax \cdot x + \beta = 0$:

$$\beta = ax^2$$

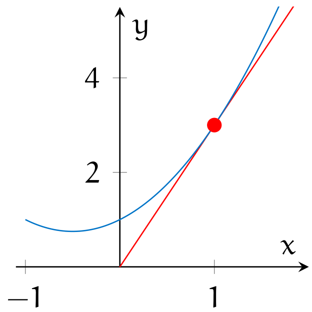
Damit dann schliesslich

$$m = b - \gamma = b + 2ax \qquad \text{und} \qquad n = c - \beta = c - ax^2.$$

Formel 17.9. Tangente an Parabel Die Parabel gemäss $f(x) = ax^2 + bx + c$ besitzt in x_p die Tangente:

$$t: \quad y = (b + 2ax_p)x + c - ax_p^2$$

17.10 Übung Wir bestimmen die Tangente an die Parabel $f(x) = x^2 + x + 1$ im Punkt $x_p = 1$. Es folgt einfach mit $a = b = c = x_p = 1$ $t: y = (1 + 2)x + 1 - 1 = 3x$. Die Abbildung zeigt die Parabel samt Tangente. ◁



17.11 Übung Von einem Punkt $Q(2, 6)$ aus sollen die Tangenten an den Graphen von $g(x) = -x^2 + 1 = ax^2 + c$ gelegt werden. Bestimme die Tangentengleichungen. Wir kennen die allgemeine Tangentengleichung. Die Parameter sind $m = (b + 2ax_p)$ und $n = c - ax_p^2$, wobei x_p nicht bekannt, resp. gesucht wird. Eingesetzt ergibt sich $m = -2x_p$ und $n = 1 + x_p^2$. Mit der Punkt-Richtungsformel durch Q: $y - 6 = -2x_p(x - 2)$ folgt $y = -2x_p x + 4x_p + 6$. Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$n = 1 + x_p^2 = 4x_p + 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_p^2 - 4x_p = 5.$$

Quadratisch ergänzt $(x_p - 2)^2 - 4 = 5$. Umgeformt $(x_p - 2) = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ und $x_p = 2 \pm 3 = \{-1, 5\}$. Damit folgen $m_1 = 2$ und $n_1 = 2$ sowie $m_2 = -10$ und $n_2 = 26$. Zusammengefasst:

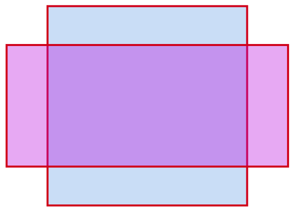
$$t_1: \quad 2x + 2 \qquad \text{und} \qquad t_2: \quad -10x + 26$$

Die Berührungspunkte sind also $T_1(1, 0)$ und $T_2(-5, 24)$. ◁

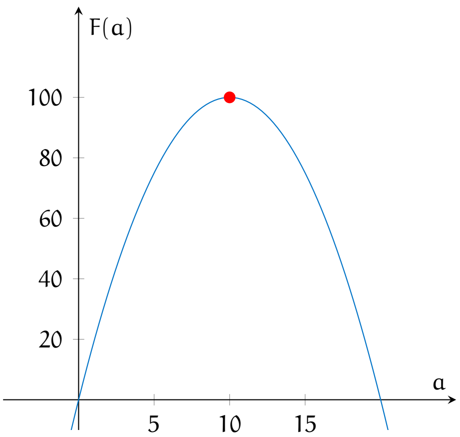
17.12 Übung Der senkrechte Wurf als Funktion der Zeit ist eine Parabel. Die Höhe der Laufbahn ist $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot t$, wobei die Anfangsgeschwindigkeit v_0 die maximale Höhe (Scheitelpunkt) festlegt. Diese ist mit der Formel $t_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-v_0}{-g} = \frac{v_0}{g}$ und damit $H = h(\frac{v_0}{g})$ gegeben. Es ist angenommen $v_0 = 20m/s$ und $g = 10m/s^2$. Damit folgt $t_S = 2$. Eingesetzt folgt $H = h(t_S) = -20 + 40 = 20$.
Nun stellen wir uns vor, dass der senkrechte Wurf auf einem offenen Bahnwagen eines fahrenden Zuges stattfindet, der auch mit v_0 gleichmässig fährt. Der Luftwiderstand ist vernachlässigt. Der Werfer auf dem Zug sieht nur ein Steigen und Fallen. Ein Beobachter neben dem Zug sieht aber eine schiefe Wurfparabel. Denn das Wurfgeschoss hat mit dem Zug eine konstante Vorwärtsgeschwindigkeit von v_0. Das Geschoss benötigt hoch und runter $2 \cdot t_S$, also 4 Sekunden. In dieser Zeit fährt der Zug $s = v_0 \cdot t = 10 \cdot 4 = 40$ Meter. ◁

17.2.4 Extremalaufgaben

Eine Extremalaufgabe ist eine Fragestellung, bei der etwas unter einer bestimmten Bedingung maximiert, oder minimiert werden soll. Das heisst, man sucht den grössten oder kleinsten Wert einer Funktion. Ein typisches Beispiel veranschaulicht das Problem.



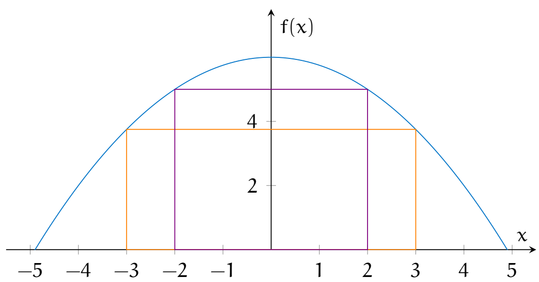
Eine Bauer hat 40m Maschendrahtzaun, mit dem er seine Ziegen einhegen will. Das Gehege soll rechteckig sein und möglichst grosse Fläche einschliessen. Wenn wir die Seiten mit a und b benennen, so muss $2a + 2b = 40$ sein oder einfacher $a + b = 20$. Die Fläche ist $F = a \cdot b$. Wir machen die Fläche abhängig von a: $F(a) = a\dot{b} = a(20-a)$. Damit folgt $F(a) = -a^2+20a$. Das ist eine quadratische Funktion ohne absolutes Glied.



Wenn es eine quadratische Funktion ist, dann ist ihr Graph eine Parabel. Die Funktion hat ihr Maximum, wenn sie nach unten offen ist, im Scheitelpunkt. Diesen können wir berechnen (oder die Formel gemäss Satz 17.4 anwenden). Die Rechnung geht über das quadratische Ergänzen, das man nie genug üben kann. Also $-a^2 + 20a = -(a^2 - 20a) = -(a-10)^2 + 100$. Das ist die Scheitelpunktform, aus der man die Koordinaten des Scheitels herauslesen kann, nämlich $S(10, 100)$. Das heisst, die Seite ist $a = 10$ und die Fläche $F(10) = 100$. Zudem findet man $b = 10$. Es handelt sich um ein Quadrat.

17.13 Übung Zwei Zahlen a und b mit $a+b = 10$ sollen so gewählt werden, dass ihr Produkt $p = a \cdot b$ maximal wird. Es ist $b = 10 - a$, damit $p = a(10 - a) = -a^2 - 10a$. Quadratisch ergänzt folgt $p = -1(a^2 - 10a) = -1(a-5)^2 + 25$. Damit ist der Scheitel bei $S(5, 25)$ und damit $a = b = 5$ optimal. Anstatt quadratisch zu ergänzen kann man auch die Formel für $x_S = \frac{-b}{2a}$ verwenden (Satz 17.4), also $x_S = \frac{-(-10)}{2(-1)} = 5$. ◁

17.14 Übung Es ist eine Parabel gegeben mit $f(x) = -0.25x^2+6$. Es ist das Rechteck gesucht, das in der positiven Parabel einbeschrieben ist und den grössten Umfang U aufweist.



Ein Punkt auf der Parabel ist $P(x, -0.25x^2+6)$. Der Umfang ist $U = 4x+2y = 4x+2(-0.25x^2+6)$. Umgeformt $U = -0.5x^2+4x+12 = -0.5(x^2-8x) + 12$. Kit der Formel ergibt sich die x-Koordinate des Scheitels zu $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-1} = 4$. Der Umfang ist $U(4) = 20$. ◁

17.3 Betragsfunktion

Wir kennen den Betrag einer reellen Zahl a, nämlich $|a|$. Für sie gilt

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0. \end{cases}$$

Der Betrag kann auch als Funktion betrachtet werden, der $\nu : x \to |x|$ zuordnet. Anstatt dem Wert x können wir auch $y = f(x)$ einsetzten und erhalten eine mittelbare oder verkettete Funktion, z.B. mit $f(x) = x^3 + 3$ folgt $\nu(x^3 + 3) = \nu(f(x))$. Die Funktion ist mit der obigen Definition

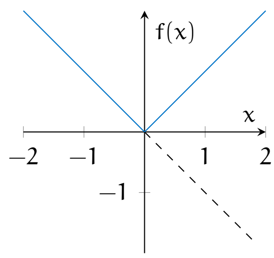
$$\nu(f(x)) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{für} \quad x^3 + 3 \geqslant 0 \\ -(x^3 + 3) & \text{für} \quad x^3 + 3 < 0. \end{cases}$$

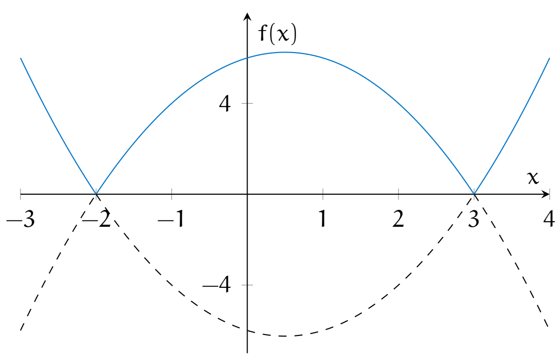
Das besondere hier ist die möglicherweise schwierige Bestimmung von $f(x) > 0$. Wir betrachtet deshalb nicht die rechnerische Seite des Problems sondern die graphische Lösung.
Wir erinnern die Transformation der Funktionen, wonach $g(x) = -f(x)$ eine Spiegelung an der x-Achse bedeutet. Diese Transformation sehen wir in der Betragsfunktion im Ast mit der Bedingung $f(x) < 0$:

$$\nu(f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{für} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Damit folgt, dass die Betragsfunktion alle Funktionswerte y, die unter der x-Achse liegen nach oben spiegeln.

17.1 Übung Wir zeichnen die Funktion $\nu(-x)$ auf. Das ist eine Gerade durch den Ursprung mit einer Steigung von -1. In der Abbildung erkennen wir, dass $\nu(-x) = \nu(x)$ ist. Die Betragsfunktion ist die Bestimmung von zwei an der x-Achse gespiegelter Funktionen. Typisch für Betragsfunktionen ist das Auftreten eines Knicks. $\triangleleft$

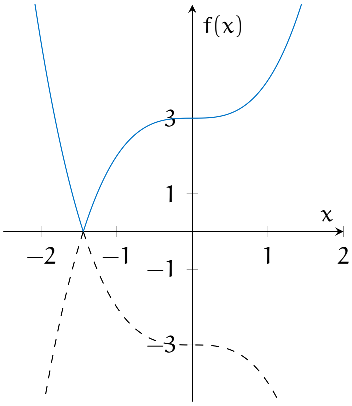




17.2 Übung Wir betrachten die Parabel $f(x) = x^2 - x - 6$ und wollen die Betragsfunktion bestimmen. Dazu müssen wir die Nullpunkte kennen, denn dort ändert der Funktionswert sein Vorzeichen.
Eine Faktorzerlegung bringt $(x-3)(x+2)$ hervor mit den Nullstellen bei $x_{1,2} = \{3, -2\}$. Der Scheitel ist bei $x_S = -b/2a = 1/2$, der y-Achsenabschnitt ist $y_0 = -6$. An den Nullstellen treten die Knicke auf. $\triangleleft$

Allgemein lässt sich sagen, dass man (1) die Nullstellen der inneren Funktion finden und (2) dann herausfinden muss, welches Vorzeichen die Funktion links und rechts der Nullstellen aufweist. Zwischen zwei benachbarten Nullstellen bleibt das Vorzeichen gleich.

Abschliessend noch ein einfaches Beispiel.



17.3 Übung Wir zeichnen die Funktion $\nu(f(x))$ mit $f(x) = x^3 + 3$ auf. Die Nullstelle befindet sich bei $x_0 = -\sqrt[3]{3} \approx -1.442$. Der y-Achsenabschnitt ist $y_0 = 3$. ◁

Aufgaben

0.4 Finde die Normalform und die Punkt-Richtungsform der Geraden mit der Steigung und einem Punkt:

(a) $a = 3, \quad P(3, -1)$ **(b)** $a = -2, \quad P(-5, 8)$ **(c)** $a = -1, \quad P(-7, -1)$
(d) $a = \frac{2}{3}, \quad P(-2, 1)$

4 **(a)** Die Punkt-Richtungsform (PRF) ist $y + 1 = 3(x - 3)$ und die Normalform $f(x) = 3x + b$ mit $-1 = 3 \cdot 3 + b$ und $b = -10$. Somit $f(x) = 3x - 10$.

(b) PRF: $y - 8 = -2(x + 5)$ und nach y aufgelöst und ausgeklammert: $y = -2x - 10 + 8 = -2x - 2$.

(c) PRF: $y + 1 = -1(x + 7)$ und daraus $y = -x - 7 - 1 = -x - 8$

(d) PRF: $y - 1 = \frac{2}{3}(x + 2)$ und $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}2 + 1 = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

0.5 Die Formel für Grad Fahrenheit f in Grad Celsius ist c ist: $f = \frac{9}{5}c + 32$. Man bestimme $f(20)$ und $f(30)$. Sodann bestimme man die Inverse.

5 Es ist $f(20) = 9/5 \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$ und $f(30) = 9/5 \cdot 30 + 32 = 54 + 32 = 86$. Die Inverse findet man, indem man nach c auflöst: $c = (f - 32) \cdot \frac{5}{9}$. Die Umbenennung schenken wir uns, weil wir nicht die üblichen x und y verwendet haben.

0.6 Ein Handwerker verlangt Fr. 50.– für die Her- und Rückfahrt und Fr. 80.– pro Stunde Arbeit. Schreibe die zugehörige Funktionsgleichung auf. Ein zweiter Handwerker verlangt nur Fr. 20.– für die Anfahrt, dafür kostet er Fr. 90.– pro Stunde. Ab welcher Arbeitsdauer ist der erste billiger als der zweite?

6 Die Gleichung ist $K(t) = 80 \cdot t + 50$ mit t der Arbeitsdauer in Stunden. Der zweite folgt $K_2(t) = 90 \cdot t + 20$. Gleichstand ist bei $80t + 50 = 90t + 20$ oder $30 = 10t$ und $t = 3$. Bei $t > 3$ ist der erste billiger.

0.7 Ein Pfannkuchenrezept verlangt für 4 Personen 4 Eier, 400g Mehl und 4dl Milch/Wasser. Wieviel braucht es für 12 Personen?

7 Es handelt sich um eine Proportionalität. Alle Angaben muss man mal 3 nehmen. Also 12 Eier, 1.2kg Mehl und 1.2l Flüssigkeit.

0.8 Finde alle Punkte auf der Geraden $y = 2x + 1$, die 4 Einheiten vom Punkt $(-1, 3)$ entfernt liegen.

8 Punkte auf der Geraden sind $(x, 2x + 1)$. Die Distanzformel ist $d = \sqrt{(x + 1)^2 + (2x + 1 - 3)^2}$. Der Radikand ist $x^2 + 2x + 1 + 4(x^2 - 2x + 1) = 5x^2 - 6x + 5$ und gleich dem quadratischen Abstand $4^2 = 16$, somit $5x^2 - 6x + 5 = 16$ und $5x^2 - 6x - 11 = 0$. Das lässt sich faktorisieren zu $(5x - 11)(x + 1) = 0$, also $x_1 = 11/5$ und $x_2 = -1$. Deshalb $P_1(-1, -1)$ und $P_2(11/5, 27/5)$. (Wenn man nicht faktorisieren mag, so wendet man die Mitternachtsformel an.)

0.9 Ein Restaurant bietet ein Buffet an für Fr. 25.– pro Person. Für Gesellschaften von 10 oder mehr Personen kostet es Fr. 22.50 pro Person. Bestimme die (stückweise) Funktion der totalen Kosten für n Besucher.

9 Die Funktion besteht aus zwei Stücken, d.h. von 0 bis $n = 9$ und von $n = 10$ bis beliebig grösser als 10.

$$f(n) = \begin{cases} n \cdot 25 & \text{für} \quad 0 \leqslant n \leqslant 9 \\ n \cdot 22.5 & \text{für} \quad n \geqslant 10 \end{cases}$$

0.10 Berechne die Änderungsrate im gegebenen Intervall.

(a) $f(x) = x^3,\ [-1, 2]$ **(b)** $f(x) = \frac{1}{x},\ [1, 5]$ **(c)** $f(x) = \sqrt{x},\ [0, 16]$

10 **(a)** $\frac{2^3 - (-1)^3}{2 - (-1)} = 3$

(b) $\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{1}}{5 - 1} = -\frac{1}{5}$

(c) $\frac{\sqrt{16} - \sqrt{0}}{16 - 0} = \frac{1}{4}$

0.11 Berechne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Vierecks ABCD mit $A(6, 2)$, $B(1, 7)$, $C(-3, -1)$ und $D(4, -2)$.

11 Die Gerade g zu $\overline{AC}$ ist mit der Punktrichtungsformel $y - 2 = \frac{2-(-1)}{6-(-3)}(x - 6) = \frac{1}{3}(x - 6)$ oder die Normalform $y = \frac{1}{3}x - 2 + 2 = \frac{1}{3}x$. Die zweite Gerade ist $y - 7 = \frac{9}{-3}(x - 1)$ oder $y = -3x + 10$. Der Schnittpunkt ist bei $\frac{1}{3}x = -3x + 10$ oder, mal 3, $x = -9x + 30$ und $10x = 30$ womit $x = 3$. Damit ist $y = \frac{1}{3}x = 1$. Der Punkt ist $S(3, 1)$.

0.12 Gesucht ist die Parallele h zur Geraden $f : y = 0.5x - 3$ durch den Punkt $P(2, 1)$. Berechne auch die Koordinaten des Schnittpunktes von h mit der x-Achse.

12 Parallel bedeutet gleiche Steigung, also $a_h = a_f = 0.5$. Punkt-Richtungsform für h: $(y - 1) = 0.5(x - 2)$ oder $y = 0.5x$. Die Nullstelle ist mit $0 = 0.5x$ $x = 0$.

0.13 Man schneide $g : y = 3x + 1$ und $f : y = 3x - 3.5$.

13 Beide Geraden haben dieselbe Steigung 3; sie sind parallel und Parallelen schneiden sich nicht.

0.14 Bestimme die Normalform bei gegebenem Scheitel und Leitkoeffizient a:
(a) $a = -1$, $S(1, 2)$ **(b)** $a = 2$, $S(0, 0)$ **(c)** $a = -3$, $S(1, -15)$

14 **(a)** Die Normalform ist $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die Scheitelform $f(x) = a(x - h)^2 + k$, hier $f(x) = -1(x - 1)^2 + 2 = -(x^2 - 2x + 1) + 2 = -x^2 + 2x + 3$.

(b) $f(x) = 2(x - 0)^2 + 0 = 2x^2$.

(c) $f(x) = -3(x - 1)^2 - 15 = -3(x^2 - 2x + 1) - 15 = -3x^2 + 6x - 18$.

0.15 Gegeben sind die Normalform. Finde die Scheitelform und den Scheitel.
(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **(b)** $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$ **(c)** $f(x) = -x^2 - 3x - 3$

15 **(a)** Zwei Möglichkeiten: entweder Formel verwenden oder selber rechnen (quadratisches Ergänzen). Zweiteres: $x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 1 - 1 = (x + 1)^2 - 2$. $S(-1, -2)$

(b) $-(x^2 + 4x) + 3 = -[(x + 2)^2 - 4] + 3 = -(x + 2)^2 + 7$, $S(-2, 7)$.

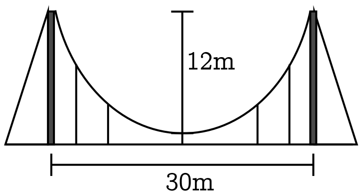
(c) $-[x^2 + 3x] - 3 = -[(x + 1.5x)^2 - 2.25] - 3 = -(x + 1)^2 - 0.75$, $S(-1, -0.75)$.

0.16 Diskutiere über Lage des Scheitels, Öffnung (Minimum, Maximum), Streckung der Parabel im Vergleich zur Normparabel x^2.

(a) $f(x) = x^2 + 2$ **(b)** $f(x) = -(x+2)^2$ **(c)** $f(x) = x^2 - 2x - 8$
(d) $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$

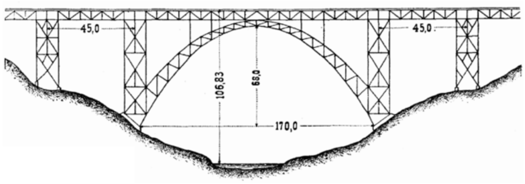
16 **(a)** Nach oben verschoben, sonst gleich Normparabel, Minimum.
(b) Nach links verschoben, Öffnung nach unten (Maximum).
(c) Umgeformt $f(x) = (x-1)^2 - 1 - 8$, nach rechst und unten verschoben, Öffnung oben (Minimum), keine Streckung.
(d) Mach links und oben verschoben, Öffnung unten (Maximum), mit 2 gestreckt.

0.17 Gegeben ist eine Hängebrücke. Das durchhängende Seil kann hier als Parabel angenommen werden. Auf eine Länge von 30 Metern hängt es maximal 12 Meter durch. Man wähle ein geeignetes Koordinatensystem und bestimme die Parabel.



17 Den Ursprung legt man in den Scheitelpunkt. Damit ist die Funktionsgleichung einfach $f(x) = ax^2$. Ein Punkt ist $(15, 12)$. Damit folgt $12 = a15^2 = 225a$ und $a = 0.00533$.

0.18 Die Müngstener Brücke (ehemals Kaiser-Wilhelm-Brücke) ist die höchste Eisenbahnbrücke Deutschlands. Sie überspannt in 107 Metern Höhe das Tal der Wupper. Sie wurde 1897 eröffnet. Die Bogenbrücke besitzt zwei übereinanderliegende Parabeln.



Die untere Parabel zeigt eine Höhe von 68 Meter bei einer Breite von 170. Die zweite hat den Scheitel 5 Meter weiter oben und ihre Spannweite ist rund 205 Meter. Bestimme die zwei Parabeln f und g in einem geeigneten Koordinatensystem.

18 Wir wählen den Ursprung unter den Scheiteln auf einer Höhe von 68 Metern. Die Form ist $f(x) = ax^2 + 68$. Ein Punkt auf der Parabel ist der Verankerungspunkt $(170/2, 0)$. Damit folgt $0 = a85^2 + 68$ und $a = \frac{-68}{85^2} = \frac{9.41}{1000} \approx \frac{-1}{106}x^2 + 68$. Für f gilt $f(x) = \frac{9.41}{1000}x^2 + 68 =$. Für g folgt $g(102.5) = 0 = a_2x^2 + 73$ und damit $a_2 = \frac{-73}{102.5^2} = \frac{-1}{144}$ und schliesslich $g(x) = \frac{-1}{144}x^2 + 73$.

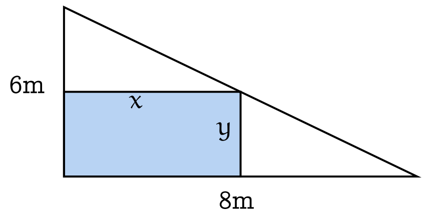
0.19 Ein frei fallender Stein hat die Ortskurve $h(t) = -4.91t^2 + 56$. Der Stein fällt vom Turm von Pisa, der 56 Meter hoch ist. Wie lange dauert der Flug und wie lautet die Steigung der Tangente im Auftreffpunkt?

19 Die Flugdauer ist gegeben durch die Bodenberührung $h(T) = 0$, also $0 = -4.91T^2 + 56$ oder $T^2 = 56/4.91 = 11.41$ und $T = 3.38$. Die Tangentensteigung in T ist gemäss Formel $(b + 2aT)$ mit $b = 0$ und $a = -4.91$ und T sodann $m_t = -4.91 \cdot 2 \cdot 3.38 = -33.16$. (Das entspricht der Geschwindigkeit.)

0.20 Frau Nöther möchte einen Gemüsegarten anlegen entlang einer Hauswand. In der Garage findet sie 20 Meter Maschenzaun. Wie sieht der rechtwinklige Garten aus, wenn die eingezäunte Fläche maximal sein soll?

20 Die Seitenlängen sind a und b, letztere parallel zur Hauswand. Die Bedingung ist $20 = 2a + b$. Die Fläche ist $F = a \cdot b$. Eingesetzt $F = a(20 - 2a) = 20a - 2a^2$. Scheitelpunktform: $F = -2(a^2 - 10a) = -2(a-5)^2 + 200$. Damit $S(5, 200)$. Mit $a = 5$ folgt $b = 10$.

0.21 Innerhalb eines dreieckigen Grundstücks soll ein möglichst grosse Rechtecksfläche eingezäunt werden.



21 Den Ursprung legen wir in die linke untere Ecke. Die Gerade hat die Gleichung $y = f(x) = -\frac{6}{8}x + 6$. Die Fläche ist $F = x \cdot y = x(\frac{-6}{8}x + 6)$ oder $F = \frac{-6}{8}x^2 + 6x$. Der Scheitel liegt bei $x_S = -b/2a = (-6/2)\frac{-8}{6} = 4$. Damit $F(4) = 24 - 12 = 12$.

0.22 Eine Pfadfindergruppe finanziert sich über den Verkauf von Bisquits an Weihnachten. Die Kosten für x Bisquits ist $K(x) = 0.1x + 25$. Die Nachfragefunktlion, also der Preis in Abhängigkeit der Menge, ist $p(x) = 10 - 0.01x$. Welche Anzahl Bisquits maximiert den Gewinn?

22 Der Gewinn ist Anzahl Bisquits mal Preis minus Kosten, also $G(x) = x(10 - 0.01x) - 0.1x - 25$. Umgeformt folgt $-0.01x^2 + 9.9x - 25$. Der x-Wert des Scheitels ist $x_S = -b/2a = -9.9/ - 0.02 = 990/2 = 495$. Der Gewinn ist $G(495) =$

0.23 Die Gerade l hat die Gleichung $y = 2x + 1$. Finde eine Funktion $d(x)$, welche die Distanz im Quadrat der Punkte auf l und dem Punkt $P(0, 0)$ beschreibt. Benutze diese Funktion, um den zu P nächsten Punkt auf l zu finden. Kontrolliere mit der Normalen durch $(0, 0)$.

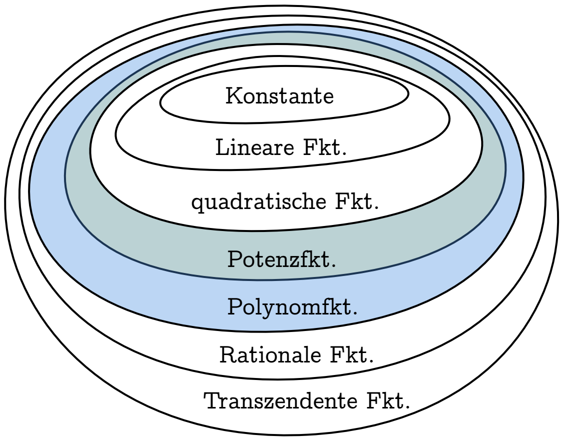
23 Punkte auf l sind $(x, 2x + 1)$. Die Distanz zu $(0, 0)$ ist $d(x)^2 = x^2 + (2x + 1)^2$ oder $d(x)^2 = x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x + 1$. Der Scheitelpunkt ist $x_S = -b/2a$ also $x_S = -4/10 = -0.4$ und damit $y_S = 5 \cdot 0.16 - 1.6 + 1 = 0.2$.

Die Normale hat die Steigung $m = -1/2$. Punkt-Richtungsform ist mit $(0, 0)$: $y = -0.5x$. Schneiden mit $2x + 1 = -0.5x$ führt zu $2.5x = -1$ und $x = -1/2.5 = -2/5 = -0.4$. Stimmt.

Kapitel 18

Polynomfunktionen

Funktionen gehören zu einer "Familie", die in Verallgemeinerung zu einer noch grösseren gehört. Die einfachste Funktion ist $f(x) = 0$, die komplizierteste kann beliebig sein. In der Abbildung sieht man die Zusammenhänge. Die transzendenten Funktionen haben wir schon angetroffen und gesagt, es sind solche, die sich durch unenedliche Reihen darstellen lassen. Bekannt sind die Logarithmus- oder die Exponentialfunktion. Weiter unten werden wir die Kreisfunktionen noch kennenlernen. In diesem Kapitel fassen wir die Polynomfunktion und die Potenzfunktion mit ganzen Exponenten zusammen.



18.1 Potenzfunktion

18.1.1 Begriff

Definition 24. Als *Potenzfunktion* bezeichnet man eine Funktion der Form

$$f\colon x \mapsto ax^r \qquad a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Anmerkung 18.1. Man beachte, dass $r \in \mathbb{Q}$, also r ein ganzzahliger Bruch ist, dann die Form einen Wurzelausdruck darstellt, wie etwa $x^{1/2}$, und wenn $r \in \mathbb{R}$, also z.B. $r = \pi$ ist, man von Exponentialfunktion spricht. Diese Funktionen sind transzendent.

18.1.2 Eigenschaften

Zwei Potenzfunktione kennen wir bereits, nämlich die lineare Funktion $f(x) = ax$ und die quadratische $f(x) = ax^2$. Die eine ist eine ungerade, die andere eine gerade Funktion.

Definitions- und Wertebereich für $r \geqslant 0$

Alle Potenzfunktionen $f(x) = ax^r$ mit $r \in \mathbb{N}$ haben $\mathbb{R}$ als maximalen Defintionsberich. Für r gerade sind alle Funktionswerte positiv oder Null, für r ungerade sind die Werte positiver

Argumente x positiv und die Werte negativer Argumente negativ.

Definition 25. Eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x) = f(-x)$ heisst *gerade*, eine Funktion mit $f(-x) = -f(x)$ *ungerade Funktion*.

Anmerkung 18.2. Gerade Funktionen sind symmetrisch zur y-Achse, ungerade sind symmetrisch bezüglich des Ursprungs (Punktsymmetrie).

Definitions- und Wertebereich für $r < 0$

Anmerkung 18.3. Die Potenzfunktion mit negativem Exponenten ist ein Bruch, denn $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Der Definitionsberech der Funktion $f(x) = x^{-n}$ ist $\mathbb{R}$ mit der Ausnahme von $x = 0$, also $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Denn die Division durch Null ist nicht gestattet. Wir erinnern $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.
Für den Wertebereich stellt sich die Frage, was geschieht in der Umgebung von $x = 0$. Um das herauszufinden, stellt man sich vor, dass wir x ein bisschen grösser als Null annehmen und es ein bisschen kleiner als Null betrachten. Dazu verwenden wir die Pfeile $x \searrow 0$: x kommt von oben gegen Null, und $x \nearrow 0$: x kommt von unten gegen Null. Wir betrachten nun zwei Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{x^3}$ und $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$. Wenn x von oben nach Null geht, dann ist das Argument positiv und der Funktionswert ebenso. Da die Differenz $x - 0$ mit $x \searrow 0$ immer kleiner wird, wird der Funktionswert immer grösser und geht nach Unendlich.
Kommt x von unten nach Null, so ist der Funktionswert für positive r grösser als Null und für negative kleiner als Null. Der Betrag allerdings geht für beide Fälle gegen Unendlich.

Satz 18.4. Für $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \searrow 0 \Rightarrow f(x) \nearrow \infty$$

und

$$x \nearrow 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \nearrow \infty & \text{für} \quad n \quad \text{gerade} \\ f(x) \nearrow -\infty & \text{für} \quad n \quad \text{ungerade} \end{cases}$$

Dieses Verhalten führt zum folgenden Begriff.

Definition 26. Eine *Unendlichkeitsstelle* einer Funktion $f(x)$ ist der Argumentwerte x_0, für den gilt

$$x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \to \infty.$$

Man nennt sie auch *Polstelle* oder *Pol*.

Symmetrie

Die Potenzfunktionen sind symmetrisch, entweder bezüglich des Ursprungs oder der y-Achse. Dabei spielt die Parität des Exponenten die wesentliche Rolle. Ist der Exponent gerade, dann ist die Kurve achssymetrisch bezüglich y. Ist der Exponent ungerade, dann ist die Kurve punktsymmetrisch.

Fernverhalten und Nullstellen

Für Exponenten $n \geqslant 1$ gibt es eine Nullstelle. Ist n gerade, so berührt die Kurve die x-Achse. Ist n ungerade, so schneidet sie die x-Achse.
Potenzfunktktionen mit $n < 0$ haben keine Nullstellen.

Stationäre Punkte

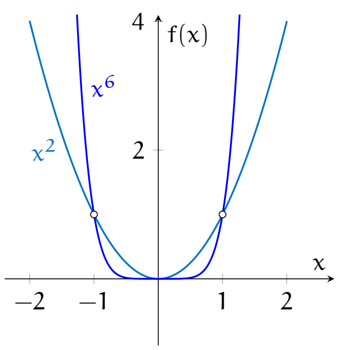
Stationäre Punkte sind solche, die eine horizontale Tangente aufweisen. Gerade Potenzfunktionen mit $n > 1$ und $a > 0$ haben ein Minimum und für $a < 0$ ein Maximum, ungerade einen Terrassenpunkt.

18.1.3 Funktionsgraphen

Wir haben vier Typen von Funktionsgraphen in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Potenzfunktion und der *Parität*, d.h. ob gerade oder ungerade. Funktionen mit $n \geqslant 0$ sind Parabeln n-ten Grades, Funktionen mit $n < 0$ sind Hyperbeln n-ten Grades. Gerade Funktionen liegen im ersten und zweiten Quadranten und sind symmetrisch zur y-Achse. Ungerade Funktionen liegen im ersten und dritten Quadranten und sind punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Alle Funktionen $f(x) = x^n$ gehen durch den Punkte $(1, 1)$.

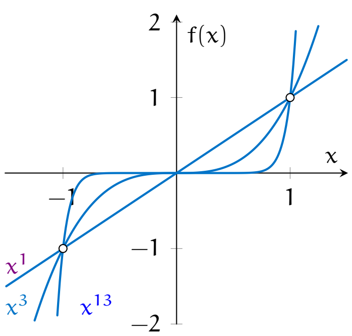
Definition 27. Der Funktionsgraph einer Potenz n-ten Grades mit $n \geqslant 0$ heisst *Parabel* n-ter Ordnung, der einer Potenz n-ten Grades mit $n < 0$ heisst *Hyperbel* n-ter Ordnung.

Gerade Parabeln



Die gerade Parabel n-ter Ordnung ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und besitzt ein Extremum, das ein stationärer Punkt ist. Dieses Extremum ist der Scheitelpunkt. Je höher der Grad desto steiler die Kurve bei $x > \pm 1$ und desto flacher beim Scheitelpunkt. Die (nicht transformierte) Parabel berührt die x-Achse im Scheitelpunkt.

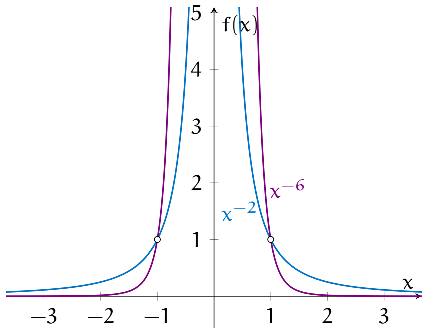
Ungerade Parabeln



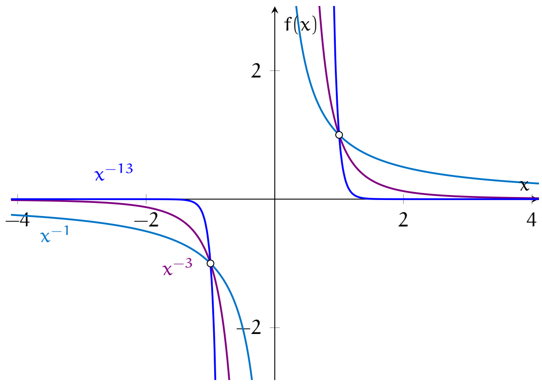
Die ungerade Parabel ist symmetrisch in Bezug auf den Ursprung und durchstösst die x-Achse dort. Der Ursprung ist ein stationärer Punkt, wo die Tangente horizontal verläuft. Man spricht von Terrassenpunkt oder horizontalem Wendepunkt. Je höher der Grad der Potenzfunktion desto steiler die Kurve bei $|x| > 1$ und desto flacher im Intervall $(-1, 1)$.

Gerade Hyperbeln

Die Hyperbel besitzt zwei getrennte Äste, die durch die y-Achse getrennt sind. Bei $x = 0$ besteht eine Unendlichkeits- oder Polstelle, bei der der y-Wert gegen ∞ strebt. Eine gerade Potenzfunktion liegt im ersten und zweiten Quadranten. Die x-Achse, wo $y = 0$ herrscht, bildet den Grenzwert, zu dem hin die Kurve für $|x| \to \infty$ strebt.



Ungerade Hyperbeln



Ungerade bedeutet, dass die Werte im ersten und dritten Quadranten liegen. Die Funktion ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, besitzt bei $x = 0$ eine Polstelle und die x-Achse als Grenzkurve der Potenzfunktion für gegen Unendlich strebende x-Werte. Der Punkt $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ sind dadurch ausgezeichnet, dass alle Graphen durch sie durchlaufen. Für $x \in (-1, 1)$ ist die Kurve mit zunehmendem $|n|$ steiler, ausserhalb dieses Intervalls flacher.

Die Transformationen gemäss

$$g(x) = A\boldsymbol{f}(Bx + C) + D \qquad \text{oder} \qquad g(x) = Af(B(x + C)) + D$$

sparen wir uns für den nächsten Abschnitt auf. Es muss aber klar sein, dass die hier angegebenen Eigenschaften nur für $f(x) = ax^n$ gelten.

18.5 Übung Die Gravitationskraft zwischen zwei Massen ist $K = Gm_1m_2x^{-2}$, wobei G eine Konstante ist, m_1 und m_2 Massen und x der Abstand. Was ist $K(x)$ mathematisch? Die Kraft gehorcht einer Potenzfunktion, deren Bild eine gerade Hyperbel ist. ◁

18.6 Übung Ein Grossversuch zu den Ursachen von Strassenverschleiss aus den 1950er Jahren zeigte, dass das Schädigungsausmass mit der vierten Potenz der Achslast ansteigt. Ein Auto habe eine Achslast von 500 kg und ein Lastwagen von 11.5 Tonnen. Um wieviel mehr schädigt ein Lastwagen die Strasse? Das Verhältnis der Lasten ist $1 : 23$. Zur vierten Potenz $1 : 280'000$. Autos sollten eigentlich keine Gebühren für Verschleiss zahlen. ◁

18.2 Polynomfunktionen

18.2.1 Begriff

Die Konstante, die lineare, die quadratische Funktion und die Potenzfunktion mit $n \geqslant 0$ sind auch Polynomfunktionen. Die Definition kennen wir bereits. Zur Erinnerung:

Definition 28. Eine *Polynomfunktion* ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

wobei a_0, a_1, ..., a_n reelle Zahlen sind und n eine natürliche Zahlen mit $n \geqslant 1$ ist. $a_n x^n$ ist der *Leitterm*, a_n ist der *Leitkoeffizient*, a_0 das *Absolutglied* und n gibt den *Grad* des Polynoms.

Anmerkung 18.1. Der Definitionsbereich der Polynomfunktion ist maximal $(-\infty, \infty)$.

Anmerkung 18.2. Die Polynomfunktion besteht aus einer Summe von Potenzfunktionen mit dem Exponenten $n \geqslant 0$. Somit ist der Funktionsgraph einer Überlagerung solcher Parabeln.

Anmerkung 18.3. ** Man sollte nicht glauben, dass $a_0 = a_0 x^0$ ist. Denn für $x = 0$ ist x^0 nicht definiert.

18.4 Übung Wir betrachten die Funktion $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 2x - 5$. Ist das eine Polynomfunktion gemäss Definition? Ja, denn die fehlenden Glieder besitzen die Koeffizienten Null. Z.B. $0 \cdot x^4$ und $0 \cdot x^3$ oder ausgeschrieben $f(x) = 4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + (-3)x^2 + 2x + (-5)$. Diese Funktion ist vom Grad 5, denn dies ist der höchste Exponent. $\triangleleft$

18.2.2 Eigenschaften

Wir gehen den Standardkatalog durch und setzen Schwerpunkte.

Monotonie, Beschränktheit, Periodizität

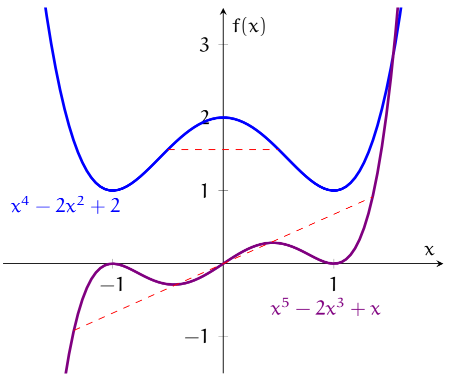
Die Polynomfunktionen sind nicht periodisch. Auf dem ganzen Definitionsbereich sind nur spezielle ungerade Funktionen monoton, z.B. $f(x) = x$ oder $f(x) = x^3$. Die meisten sind nur stückweise monoton.
Die geraden Funktionen sind einseitig beschränkt, denn beide Enden gehen entweder nach $-\infty$ oder ∞. Beispielsweise ist die Normparabel $f(x) = x^2$ bei $y = 0$ beschränkt.

Stetigkeit

Die Polynomfunktionen sind stetig, es gibt keine Lücken oder Sprünge, denn der Definitionsbereich ist maximal $(-\infty, \infty)$. Man erinnere, dass hier nur natürliche Zahlen als Exponenten berücksichtigt werden. Bildlich gesprochen nur Parabeln n-ter Ordnung.

Symmetrie

Da gewisse Potenzfunktionen auch Polynomfunktionen sind und Potenzfunktionen punkt- oder achssysmmetrisch sind, gibt es Polynomfunktionen, die symmetrisch sind. Aber allgemein sind die Polynomfunktionen nicht symmetrisch. Was sind die Ausnahmen?



Enthält ein Polynom nur Terme mit geraden Exponenten, dann ist sie zur y-Achse symmetrisch. Enthält das Polynom nur Terme mit ungeraden Exponenten, dann ist sie *punktsymmetrisch*.
Das ist einsichtig, denn man kann sich den Funktionsgraph einer Polynomfunktion als Überlagerung von mehreren Potenzfunktionen vorstellen. Sind alle diese Potenzfunktionen achssymmetrisch, dann gilt das auch für die Überlagerung. Analog für die Punktsymmetrie.

Wichtig 7. Enthält eine Polynomfunktion sowohl gerade als auch ungerade Exponenten, so ist sie weder punktsymmetrisch noch achsensymmetrisch. ⊣

Fernverhalten

Das Fernverhalten beschreibt die Lage, wenn die unabhängige Variable x gegen plus oder minus Unendlich geht.

Satz 18.5. Das Fernverhalten der Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ stimmt mit dem von $y = a_n x^n$ überein.

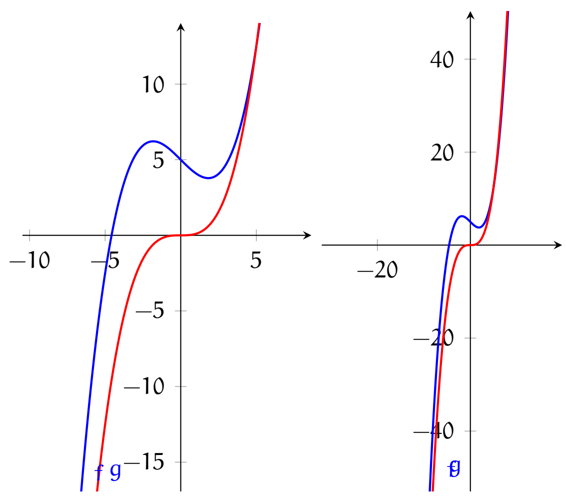
Die Begründung ist einfach. Wir klammern den Term $a_n x^n$ aus und erhalten

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Der Ausdruck in der Klammer geht gegen eins, wenn $|x| \to \infty$ strebt. Damit wir für $|x| \to \infty$ dann $f(x) = a_n x^n$.

Wichtig 8. Für das Fernverhalten der Polynomfunktion ist nur der Leitterm massgebend. ⊣

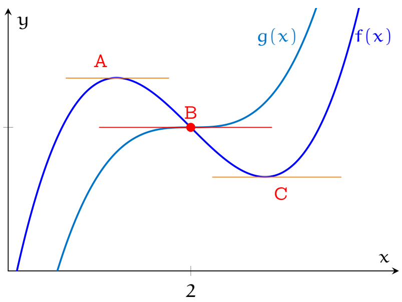
18.6 Übung Wir betrachten die Funktion $f(x) = 0.1x^3 - x + 5$ (blau). Wir zeigen zwei Graphiken mit einer Nahaufnahmen im Bereich um $x = 0$ und eine Fernaufnahme mit grossem Massstab. Gemäss obigem Satz sollten für gross x die Funktion mit $g(x) = 0.1x^3$ (rot) zusammenfallen.
Tatsächlich ist im rechten Bild an den Enden der Funktionen fast kein Unterschied mehr auszumachen; sie fallen zusammen. Im Bereich um den Ursprung allerdings unterscheiden sie sich stark. Damit ist gezeigt, dass die Terme mit Ausnahme des Leitterms nur lokale Wirkung entfalten. ◁



18.7 Übung Wie sieht das Fernverhalten von $f(x) = -x^7 + 100x^5 + x$ aus? Für $|x| \to \infty$ bleibt nur der Leitterm übrig, also $g(x) = -x^7$. Und $g(x)$ für $x \to \infty$ ist dann $g(x) \to -\infty$ und für $x \to -\infty$ dann $g(x) \to \infty$ $\triangleleft$

Nullstellen und stationäre Punkte

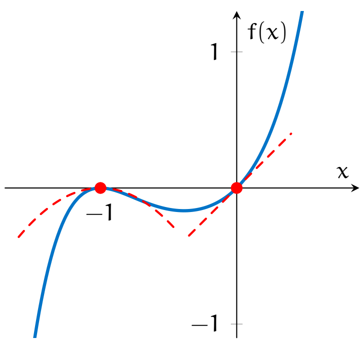
Stationäre Punkte sind von zwei Arten: entweder Extrema, also topographisch gesprochen Gipfel (Punkt A in der Abbildung) und Talsohlen (C), oder Terrassenpunkte (B). Bei Extrema sind die Werte in der nahen Umgebung beidseits gleichen Vorzeichens, beim Terrassenpunkt nicht. Beide zeichnet aus, dass die Tangente im stationären Punkte waagrecht ist.
Der typische Terrassenpunkt tritt bei $f(x) = x^3$ auf. Der Terrassenpunkt heisst auch horizontaler Wendepunkt. Es gibt zudem nicht horizontale *Wendepunkte*. Wenn wir wieder an das Gelände denken, besonders an eine Geländestufe, dann ist es der Punkt, an dem der Aufstieg nach einer flachen Passage wieder vermehrt ansteigt. Es gilt, dass ein Polynom vom Grad $\geqslant 3$ mindestens eine Wendestelle haben muss.
Nun gibt es einen Zusammenhang zwischen Extrema und Nullstellen, denn Polynomfunktionen sind stetig, haben keine Lücken oder Sprünge, so dass zwischen zwei Nullstellen mindestens ein Extremum liegen muss.



Die Bestimmung von Nullstellen kennen wir ja. Für die einfachen lineare und quadratische Gleichung gibt es Formeln wie etwas die Mitternachtsformel. Für höhere Polynome findet man Lösungen ohne Rechner mit geschicktem Raten. Sobald eine Lösung bekannt ist, wendet man die Polynomdivision an und bekommt ein Polynom, dessen Rang um eins niedriger geworden ist. Dahinter verbirgt sich die Tatsache, dass man Polynome faktorisieren kann in unzerlegbare Linearfkatoren der Form $(x - c)$ oder irreduzible quadratische Ausdrücke wie $(x^2 + 1)$. Diese haben keine reelle Lösung, wenn man sie null setzt.
Wir betrachten eine Polynomfunktion in zwei aequivalenten Darstellungen:

$$x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x \qquad \Leftrightarrow \qquad x(x+1)^2(x^2+1)$$

Während die links entwickelte Darstellung beliebig aussieht, kann man aus der faktorisierten Version viele Informationen herauslesen.



Nach dem Nullproduktsatz, wonach jeder Faktor für sich gleich null sein muss, lassen sich die Nullstellen direkt herauslesen. Der erste Faktor x null gesetzt gibt trivialerweise die Nullstelle $x_1 = 0$. Sodann $x_2 = -1$ ergibt für $(x+1)^2 = (-1+1)^2 = 0$. Der Term $x^2 + 1$ hat keine reellen Nullstellen. Nun betrachten wir den Faktor $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$, der die Vielfachheit 2 aufweist. Wenn wir hier $x = -1 \pm \delta$ in $g(x) = x^2 + 1$ einsetzen, erkenne wir, dass $g(-1+\delta)$ und $g(-1-\delta)$ dasselbe Vorzeichen haben müssen.

Definition 29. Eine Nullstelle c einer Polynomfunktion $f(x)$ besitzt die *Vielfachheit* m, wenn $(x-c)^m$ ein Faktor von $f(x)$ ist aber $(x-c)^{m+1}$ nicht.

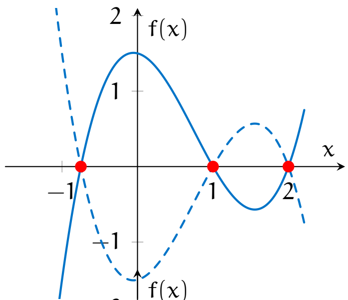
In unserem Beispiel hat die Nullstelle $x_1 = 0$ die Vielfachheit 1 und $x_2 = -1$ die Vielfachheit 2. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen, unter Berücksichtigung der Vielfachheit, aufweisen kann.

Satz 18.8. Für eine Polynomfunktion $f(x)$ mit einer Nullstelle c der Vielfachheit m gilt:

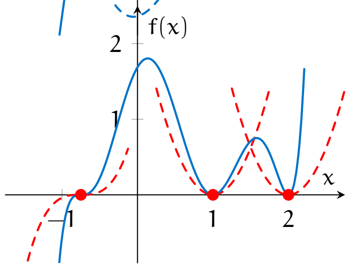
- falls m *gerade*, berührt $f(x)$ die x-Achse in $(c, 0)$ und wird reflektiert,
- falls m *ungerade*, schneidet $f(x)$ die x-Achse in $(c, 0)$.

Aus dieser Diskussion geht hervor, dass man mit der Angabe von Nullstellen über die Faktorisierung die einfachste Funktion aus der Schar der möglichen darstellen kann. Kennt man zudem das Aussehen bei den Nullstellen, kann man die Vielfachheit zusätzlich berücksichtigen.

18.9 Übung Es sind drei Nullstellen gegeben, $x_0 = \{-0.75, 1, 2\}$. Wir bilden das einfachste Polynom, das diese Nullstellen aufweist. Jede Nullstelle bildet einene Linearfaktor $(x-c)$, der das Polynom zusammensetzt. Somit $f_1(x) = (x+0.75)(x-1)(x-2)$. Genauso aber auch $f_2(x) = -(x + 0.75)(x - 1)(x - 2)$. Man erkennt, dass das Polynom vom Grad 3 ist. ◁



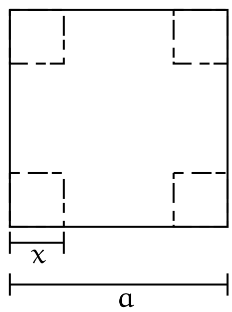
18.10 Übung Nun betrachten wir zusätzlich zu den Nullstellen noch Angaben zur Form der Nullstellen, in der Abbildung die rot strichlierten Kurven. Links erkennt man eine ungerade Funktion, denn sie schneidet die Achse. Der Terrassenpunkt deutet darauf hin, dass der Grad mindestens 3 sein muss. Eine Gerade hätte für den Exponenten 1 gesprochen. Ein Faktor ist also $(x + 0 - 75)^3$. Die Nullstellen rechts berühren von oben die x-Achse. Sie sind gerade Funktionen. Die einfachste Annahme ist Grad 2. Somit stellt sich die Funktion, die am einfachsten die Bedingungen erfüllt, als

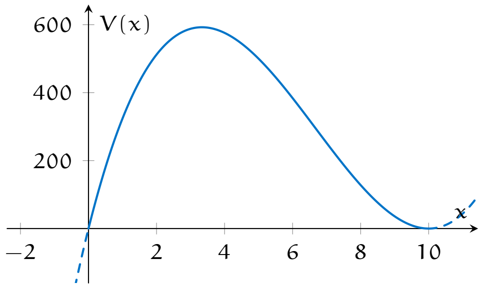


$$f(x) = (x + 0.75)^3(x - 1)^2(x - 2)^2$$

dar. ◁

18.11 Übung Aus einem quadratischen Blechstück soll ein nach oben offener Kasten hergestellt werden, indem die vier Ecken weggeschnitten und die Seiten hochgebogen werden. Es soll der Kasten mit maximalem Volumen entstehen. Die Kantelänge ist $a = 20$. Das Volumen V ist Höhe mal Grundfläche, hier Höhe x und Grundfläche $F = (a - 2x)^2$. Zusammen also $V(x) = x(a - 2x)^2$ und eingesetzt $V(x) = x(20 - 2x)^2$. Wir zeichnen die entsprechende Kurve und bemerken, dass $0 < x < a/2$ sein muss. Das bedeutet, dass die möglichen Schnitte zwischen 0 und 10 cm liegen müssen. Die Kurvendarstellung zeigt in diesem Intervall ein maximales Volumen bei ca. 3.33. Damit begnügen wir uns. ◁





18.12 Übung Wir wollen ohne Rechner die Funktion $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ darstellen. Dazu brauchen wir zuerst die Nullstellen. Wir raten $x_0 = 1$ und erhalten $2 + 5 + -4 - 3 = 0$. Somit ist ein Faktor $(x - 1)$ bekannt und man kann das Polynom damit dividieren.

Die Polynomdivision ergibt

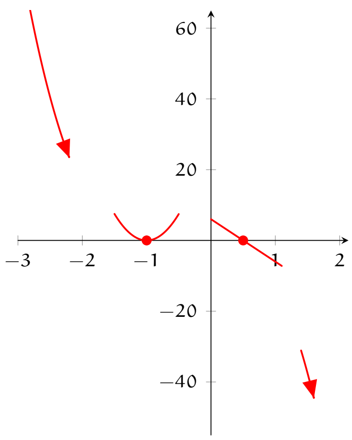
$$
\begin{array}{l}
\left(\;2x^3 + 5x^2 - 4x - 3\right) : \left(x - 1\right) = 2x^2 + 7x + 3 \\
\underline{-\,2x^3 + 2x^2} \\
\qquad\qquad 7x^2 - 4x \\
\qquad\quad \underline{-\,7x^2 + 7x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x - 3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,3x + 3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Das Restpolynom $2x^2 + 7x + 3$ kann man z.B. mit der Mitternachtsformel erledigen,

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} = \{-3, -1/2\}$$

Damit lässt sich $f(x)$ schreiben als $f(x) = 2(x+3)(x+\frac{1}{2})(x-1)$. Das Fernverhalten ist wie $2x^3$, d.h. vom dritten Quadranten steigt die Kurve hoch in den ersten, also von Südwest nach Nordost. Die Kurve geht von unten links durch $(-3, 0)$ steigt hoch, kehrt zurück von oben durch $(-0.5, 0)$ und wieder hoch durch $(1, 0)$. $\triangleleft$

18.13 Übung Wir analysieren die Funktion $f(x) = -3(2x-1)(x+1)^2$ in Hinblick auf eine händische Darstellung des Graphen. Als ersten bestimmen wir den Leitterm und dessen Fernverhalten. Der Leitterm ist $-6x^3$. Die Kurve läuft von Nordosten nach Südwesten oder vom zweite zum vierten Quadranten.
Sodann suchen wir die Nullstellen und deren Vielfachheit. Es ist $(2x-1) = 0$, also $x_1 = 1/2$. Die zweite hat die Vielfachheit 2 und ergibt sich aus $x + 1 = 0$ und $x_2 = -1$. Die Punkte auf der x-Achse sind also $(1/2, 0)$ und $(-1, 0)$. In aufsteigender Reihenfolge sind die Nullstellen -1 (zweifach) und $1/2$. Bei $(-1, 0)$ berührt die Kurve die Achse und wird wieder nach oben reflektiert, und schneidet dann bei $(1/2, 0)$ die Achse. $\triangleleft$



18.14 Übung Bestimme Leitkoeffizient, Leitterm, Absolutglied und Fernverhalten von $f(x) = 4 - x - 3x^2$. Antwort:

Leitkoeffizient	-3
Leitterm:	$-3x^2$
Absolutglied:	4
Verhalten $x \to \infty$:	$f(x) \to -\infty$
$x \to -\infty$:	$f(x) \to -\infty$

$\triangleleft$

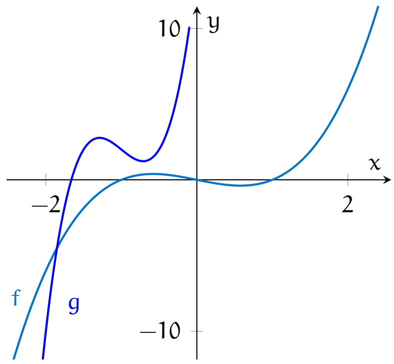
18.2.3 Transformationen

Diesen Abschnitt können wir kurz halten, denn Transformationen nach der Vorgaben

$$g(x) = Af(Bx + C) + D$$

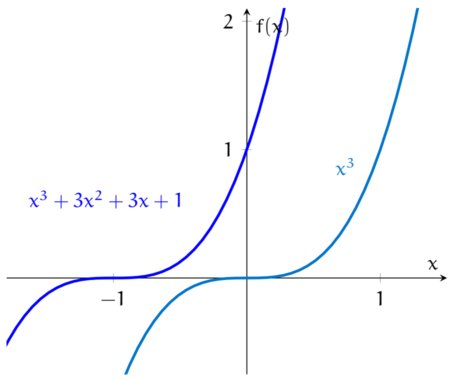
ergeben für Polynome wieder Polynome. Es ist $f(x) = x^3 - x$. Wir setzen $g(x) = A[(Bx + C)^3 - Bx - C]$. Mit $A = B = C = 2$ folgt

$$g(x) = A[B^3x^3 + 3B^2Cx^2 + 3BC^2x + C^3 - Bx - C] = 16x^3 + 48x^2 + 44x + 14$$



Transformationen sind wie Kurven, die man auf eine durchsichtige Gummihaut zeichnet und dann zieht und staucht und sogar umwendet.

18.15 Übung Wir betrachten die Potenzfunktion, die ja auch eine Polynomfunktion ist, nämlich $f(x) = x^3$. Sie ist ungerade, hat mindestens eine Nullstelle, verläuft von Südwest nach Nordost etc. Wir transformieren $x \to x + 1$. Damit $g(x) = (x + 1)^3$. Entwickelt folgt $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Nun sieht der Ausdruck wesentlich komplizierter aus. $\triangleleft$



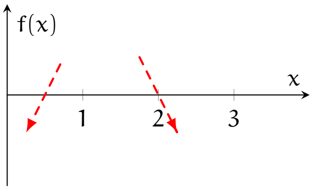
Es gilt auch hier:

- A: Vertikale Streckung/Stauchung, Spiegelung y-Achse
- B: Horizontale Streckung/Stauchung, Spiegelung x-Achse,
- A und B: Punktspiegelung,
- C: Horizontale Verschiebung,
- D: Vertikale Verschiebung.

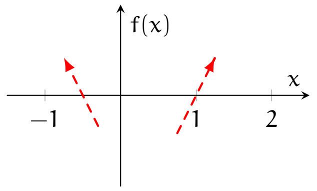
Aufgaben

3.16 Man schätze die Funktion mit den niedrigsten Exponenten aus den gegebenen Skizzen

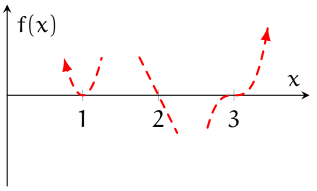
(a)



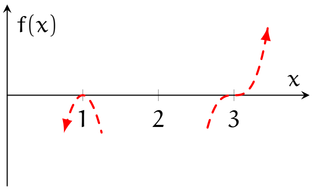
(b)



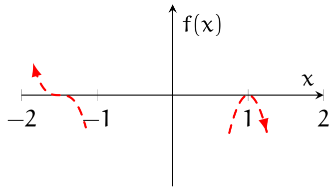
(c)



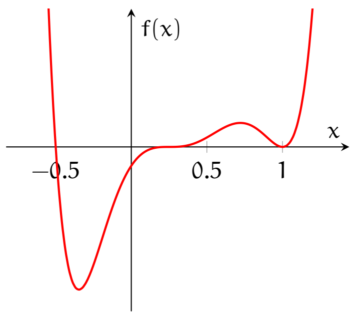
(d)



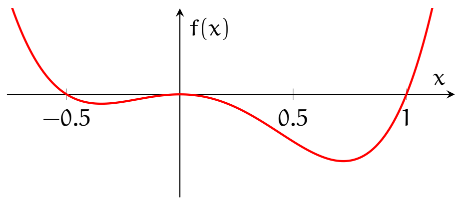
(e)



(f)



(g)



16 **(a)** Zwei einfache Nullstellen: $f(x) = -(x - 0.5)(x - 2)$

(b) Zwei einfache Nullstellen: $f(x) = (x - 0.5)(x - 2)$

(c) Doppelte Nullstelle bei $x = 1$, einfache bei $x = 2$ und dreifache bei $x = 3$. Somit $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)^3$. Das Fernverhalten ist wie $g(x) = x^6$

(d) zweifach bei $x = 1$ und dreifach bei $x = 3$, somit $f(x) = (x - 1)^2(x - 3 =^3$

(e) dreifache bei $x = -1.5$ und doppelte bei $x = 1$, Vorzeichen negativ, denn ungerade ($n = 5$) verläuft von Nordwest nach Südost, $f(x) = -(x + 1.5)^3(x - 2)^2$

(f) einfache bei $x = -0.5$, dreifache bei $x \approx 0.25$ und doppelte bei $x = 1$, somit $f(x) = (x + 0.5)(x - 0.25)^3(x - 1)^2$

(g) einfache bei $x = -0.5$, zweifache bei $x = 0$ und einfache bei $x = 1$, somit $f(x) = (x+0.5)x^2(x-1)$

3.17 Gegeben die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Gesucht ist $g(x)$, die aus f hervorgeht, wenn man sie um 1 nach rechts verschiebt.

17 Anstatt x setzen wir $(x-1)$ ein: $g(x) = (x-1)^3 - 2(x-1) + 1$. Entwickelt folgt $g(x) = [x^3 - 3x^2 + 3x - 1] - [2x - 2] + 1 = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

3.18 Bestimme das Fernverhalten von $f(x) = (x - 1)^3x^2(x - 5)$.

18 Das Fernverhalten bestimmt der höchste Exponent. $g(x) = x^3x^2x = x^6$. Funktion ist gerade, für $x \to -\infty$ geht $g(x) \to \infty$, ebenso für $x \to \infty$.

3.19 Finde die Nullstellen und ihre Vielfachheit

(a) $a(x) = x(x + 2)^2$ **(b)** $g(x) = x(x + 2)^3$ **(c)** $f(x) = -2(x - 2)^2(x + 1)$

(d) $g(x) = (2x + 1)^2(x - 3)$ **(e)** $F(x) = x^3(x + 2)^2$ **(f)** $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

19 **(a)** Nullstellen $x_0 = \{0, -2\}$, Vielfachheit 1,2.

(b) Nullstellen $x_0 = \{0, -2\}$, Vielfachheit 1, 3.

(c) Nullstellen $x_0 = \{-1, 2\}$, Vielfachheit 1 und 2.

(d) Nullstellen $x_0 = \{-0.5, 3\}$, Vielfachheit 2, 1.

(e) Nullstellen $x_0 = \{-2, 0\}$, Vielfachheit 2, 3.

(f) Nullstellen $x_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, Vielfachheit alle 1.

3.20 Bestimme Leitterm und Absolutglied von ...

(a) $q(r) = 1 - 16r^4$ **(b)** $Z(b) = 42b - b^3$ **(c)** $f(x) = \sqrt{3}x^{17} + 22.5x^{10} - \pi x^7 + \frac{1}{3}$

(d) $s(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0$ **(e)** $p(t) = -t^2(3 - 5t)(t^2 + t + 4)$

20 **(a)** Leitterm $-16r^4$, Absolutglied 1.

(b) Leitterm $-b^3$, Absolutglied 0.

(c) Leitterm $\sqrt{3}x^{17}$, Absolutglied 1/3.

(d) Leitterm $-4.9t^2$, Absolutglied s_0.

(e) Leitterm $5t^5$, Absolutglied 0.

3.21 Diskutiere die Transformation von f zu g.

(a) $f(x) = x^3$, $g(x) = (x + 2)^3 + 1$

(b) $f(x) = x^4$, $g(x) = (x + 2)^4 + 1$

(c) $f(x) = x^4$, $g(x) = 2 - 3(x - 1)^4$

(d) $f(x) = x^5$, $g(x) = -x^5 - 3$

21 **(a)** Verschiebung um 2 nach links, Verschiebung um 1 nach oben.

(b) Verschiebung um 2 nach links, Verschiebung um 1 nach oben.

(c) Verschiebung um 1 nach rechts, vertikale Streckung um 3 plus Spiegelung an x-Achse, Verschiebung um 2 nach oben.

(d) Spiegelung an x-Achse, Verschiebung um 3 nach unten.

3.22 Diskutiere folgende Fragen

(a) Wieviele lokale Extrema kann eine Polynomfunktion vom Grad n maximal haben?

(b) Wieso muss eine Polynomfunktion von ungeradem Grad eine Nullstelle haben?

(c) Kann eine Polynomfunktion zwei lokale Minima haben ohne lokales Maximum?

(d) Kann eine Polynomfunktion zwei unterschiedliche Nullstellen besitzen ohne lokales Extremum?

22 **(a)** Eine Polynomfunktion kann höchstens n Nullstellen besitzen. Es gibt $n-1$ Intervalle zwischen den Nullstellen, wo ein Extremum liegen muss. Somit ist die maximale Anzahl Extrema $n-1$.

(b) Weil für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ das Vorzeichen von $g(x)$ wechselt, sodass ein Durchgang durch die x-Achse zwingend ist.

(c) Nein, denn zwischen zwei Tälern muss ein Berg liegen.

(d) Nein, denn zwischen den zwei Nullstellen muss der Graph seine Richtung ändern, um wieder zur x-Achse zurückzukehren. Beim Extremum erfolgt die Richtungsänderung.

3.23 Finde die Nullstellen

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **(b)** $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ **(c)** $f(x) = -17x^3 + 5x^2 + 34x - 10$

(d) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x + 8$ **(e)** $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$ **(f)** $f(x) = x^4 - 9x^2 + 14$

23 **(a)** Erste Lösung erraten $x = 1$, damit $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$, Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \right) : \left(x - 1 \right) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad -x^2 - 5x \\
\qquad \underline{\;\; x^2 \;\; - x} \\
\qquad\qquad -6x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Faktorisieren von $x^2 - x - 6 = 0$ (Faktorzerlegung von $6 = 3 \cdot 2$) ergibt $(x-3)(x+2)$. Also Nullstellen $x_0 = \{1, 3, -2\}$.

(b) Umformen von $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ mit 2. Binomialformel für die ersten zwei Terme $f(x) = (x^2 - 3x)(x^2 + 3x) - 4x + 12 = (x^2 - 3x)(x^2 + 3x) - 4(x - 3)$, ausklammern $x^2(x-3)(x+3) - 4(x-3) = x^2(x-3)(x+3-4) = x^2(x-3)(x-1)$. Somit Nullstellen $x_0 = \{0, 1, 3\}$

(c) $f(x) = -17x^3 + 5x^2 + 34x - 10 = x^2(5 - 17x) + 2(17x - 5) = (17x - 5)(-x^2 + 2) = 0$. Nullproduktsatz: $17x - 5 = 0$ woraus $x = 5/17$ und $x^2 - 2 = 0$ woraus $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Nullstellen $x_0 = \{5/17, \pm\sqrt{2}\}$.

(d) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x + 8$ je zwei zusammenfassen $f(x) = x^4(x-2) - 4(x-2)$ oder $f(x) = (x-2)(x^4 - 4)$. Somit $x - 2 = 0$ und $x = 2$, und $x^4 = 4$ und $x^2 = \pm 2$, negative Wurzel weglassen also $x^2 = 2$. Damit $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, zusammen $x_0\{2, \pm\sqrt{2}\}$.

(e) Für $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$ substituieren $u = x^2$ und Mitternachtsformel an $2u^2 - 7u + 6 = 0$, somit $u_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \{6/4, 2\}$. Daraus $x_{1,2} = \pm\sqrt{6/4}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

(f) Wieder $u = x^2$, $f(x) = u^2 - 9u + 14$ entweder Mitternachtsformel oder Faktoren "raten". Ansatz mit Faktorzerlegung $14 = 2 \cdot 7$, $(u-2)(u-7) = 0$, also $u_{1,2} = \{2, 7\}$ und zurücksubstituiert $x^2 = u$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{7}$.

Kapitel 19

Rationale Funktionen

19.1 Begriffe

Rationale Funktionen sind eine neue Klasse von Funktionen, die sich aus den Polynomfunktionen ableitet. *Ratio* heisst Verhältnis, was wiederum mit Bruch gleichgesetzt werden kann.

Definition 30. Eine *rationale Funktion* (auch gebrochen rationale Funktion) r ist ein echter Bruch von Polynomfunktionen.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynomfunktionen sind.

Anmerkung 19.1. Aus der Definition folgt, dass mit $q(x) = 1$ r eine Polynomfunktion wird.

Wir erinnern die Polynomfunktion: Eine *Polynomfunktion* ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

wobei a_0, a_1, ..., a_n reelle Zahlen sind und n eine natürliche Zahlen mit $n \geqslant 1$ ist. Damit ist eine rationale Funktion

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

Definition 31. Eine rationale Funktion heisst *echt gebrochen*, wenn $m > n$ und *unecht gebrochen*, wenn $n \geqslant m$.

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich mittels Polynomdivision in die Summe aus Polynomfunktion und echt gebrochener rationaler Funktion überführen.

19.2 Übung Wir betrachten die Funktion $r(x) = \frac{x^5-2x^3+x-1}{2x^3+x^2+1}$

$$\begin{array}{l}
\left(x^5 \qquad -2x^3 \qquad +x-1\right) : \left(x^3+x^2+1\right) = x^2 - x - 1 + \dfrac{2x}{x^3+x^2+1} \\
\underline{-x^5 - x^4 \qquad -x^2} \\
\qquad -x^4 - 2x^3 - x^2 \; + x \\
\qquad \underline{x^4 \; + x^3 \qquad\quad + x} \\
\qquad\qquad -x^3 - x^2 + 2x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{x^3 + x^2 \qquad + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x
\end{array}$$

Die Polynomfunktion ist dann $x^2 - x - 1$. ◁

19.2 Eigenschaften

19.2.1 Definitionsbereich

Nenner und Zählerpolynom habe natürlich maximal den ganzen reellen Zahlenbestand als Definitionsmenge. Was aber vom Bruch her kommt ist die Kenntnis, dass der Nenner nicht Null sein darf. Dort ist der Bruch und damit die rationale Funktion nicht definiert. Der Nennern wird bei seinen Nullstellen Null.

19.1 Übung Die rationale Funktion $r(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 1}$ besitzt folgende Nennernullstellen: $q(x) = x^2 + 2x - 1$, faktorisiert $q(x) = (x+1)^2$. Damit die doppelte Nullstelle $x = -1$. Somit ist der Definitionsbereich von $r(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $\triangleleft$

Nun kann es sein, dass der Zähler ebenfalls gleiche Nullstellen besitzt wie der Nenner. Das würde implizieren, dass eine Faktorzerlegung denselben Faktor sowohl im Nenner als auch im Zähler aufweist. Diese könnte man ja kürzen. Beispielsweise:

$$r_1(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)(x^2+1)}{(x-3)(x-2)} \qquad \text{und} \qquad r_2(x) = \frac{(x-2)(x+1)(x^2+1)}{(x-3)}$$

Die Frage ist, sind $r_1(x)$ und $r_2(x)$ dieselbe Funktion? Die fragen noch spitzer: ist $f_1(x) = \frac{x}{x}$ und $f_2(x) = 1$ gleich? Die Antwort ist nein, denn Gleichheit von zwei Funktionen bedeutet, dass jedes Paar von Punkten übereinstimmt, also $(x, f_1(x)) = (x, f_2(x))$ für jedes x. Aber dies stimme in einem Punkt nicht, denn $(0, f_1(0)) \neq (0, 1)$. Nun hat man sich einen Trick einfallen lassen, den man *Hebung* nennt. Diese singuläre Lücke im Definitionsbereich, *Definitionslücke* genannt, lässt sich beheben, indem man dort den Wert der lückenlosen Form einsetzt. Also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Man setzt in die Lücke den Wert, den die gekürzte Form an der Stelle hat. Wir werden uns im weiteren nicht mehr damit befassen.

19.2 Übung Wir bestimmen den Definitionsbereich von $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Die allfälligen Nullstellen des Nennern sind auszunehmen. Für $x + 1 = 0$ folgt $x_0 = -1$. Somit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $\triangleleft$

19.3 Übung Gesucht der Definitionsbereich von $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$. Nennernullstelle aus $x^2+1 = 0$. Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, also auch keine reelle Nullstelle. Damit ist die Definitionsmenge maximal, d.h. $D = \mathbb{R}$. $\triangleleft$

19.4 Übung Wir suchen den Träger, wie man die Definitionsmenge auch nennt, von $r(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1} \div \dfrac{3x-2}{x^2-1}$. Bevor man irgendetwas umformt, muss man die Nenner betrachten der vorhandenen Terme. Hier muss also schon mal $x^2 - 1$ herangezogen werden. Die nicht erlaubte Stelle ist $x_0 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$. Sodann bringen wir den Ausdruck in die Form einer rationalen Funktion, indem wir mit dem Kehrwert multiplizieren

$$r(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-1} \div \frac{3x-2}{x^2-1} = \frac{2x^2-1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{3x-2}$$

Hieraus folgern wir, dass die Stelle $3x - 2$ auch ausgenommen werden muss, also $x_1 = -2/3$. Zusammen folgt $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, -2/3\}$. Eine alternative Darstellung des Definitionsbereichs ist $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)$. $\triangleleft$

19.2.2 Fernverhalten, Grenzgeraden, Asymptoten

Wir haben die Frage nach dem Fernverhalten schon bei den Polynomfunktionen gestellt, und die Antwort gefunden, dass das Verhalten dem des Leitterms entspricht. Nun sollten wir die Leitterme von Zähler und Nenner betrachten und uns fragen, ob sie das Fernverhalten steuern.

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

Wir klammern den Leitterm aus und schreiben

$$r(x) = \frac{a_n x^n [1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots]}{b_m x^m [1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \frac{b_{m-2}}{b_m x^2} + \ldots]}$$

Mit $x \to \infty$ werden die Brüche in den Klammerausdrücke klein und gehen gegen Null, sodass die Klammer gegen 1 geht. Somit ist der "Leitquotient"

$$\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^r$$

massgebend. Wir schreiben $a_n b_m > 0$, wenn beide Koeffizienten dasselbe Vorzeichen haben und $a_n b_m < 0$, wenn einer negativ ist (unter der Annahme, dass $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$).

Formel 19.5. Fernverhalten Es gibt also vier Fälle für $x \to \infty$:

$$\frac{a_n x^n}{b_m x^m} \to \begin{cases} \infty & \text{für} \quad n > m \quad \text{und} \quad a_n b_m > 0 \\ -\infty & \text{für} \quad n > m \quad \text{und} \quad a_n b_m < 0 \\ a_n / b_m & \text{für} \quad n = m \quad \text{und} \quad a_n b_m \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad n < m \quad \text{und} \quad a_n b_m \neq 0 \end{cases}$$

Drei Fälle betreffen unechte rationale Funktionen. Für echt rationale Funktionen ist der Grenzwert $f(x \to \infty) = 0$.

Polstelle

Bei der Behandlung der Potenzfunktionen mit negativem Exponenten x^{-n} sind wir auf Unendlichkeitsstellen oder Polstellen gestossen. Wir haben definiert: Eine *Unendlichkeitsstelle* oder *Polstelle* einer Funktion $f(x)$ ist der Argumentwerte x_0, für den gilt

$$x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \to \infty.$$

Wir berücksichtigen hierbei nicht $x \to \infty$.

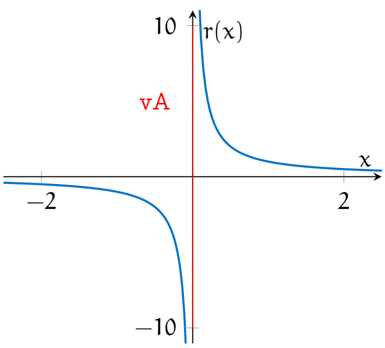
19.6 Übung Wir betrachten die Funktion $r(x) = \frac{x}{x^2}$ mit der offensichtlichen Nennernullstelle und somit Definitionslücke bei $x = 0$. Wir machen eine Tabelle mit Funktionswerten, wobei x sich von -1 und von 1, also von oben an $x = 0$ annähert.

x	$r(x)$	x	$r(x)$
1	1	-1	-1
0.5	2	-0.5	-2
0.25	4	-0.25	-4
0.125	8	-0.125	-8
0.0625	16	-0.0625	-16
0.03125	32	-0.03125	-32
0.015625	64	-0.015625	-64
0.0078125	128	-0.0078125	-128
0.00390625	256	-0.00390625	-256
0.001953125	512	-0.001953125	-512
0.0009765625	1024	-0.0009765625	-1024

Aus dieser Tabelle ist gut ersichtlich, wie sich der Funktionswert $r(x)$ von oben angenähert immer grösser und von unten immer kleiner wird. Es ist stark zu vermuten, dass $r(x)$ für $x \searrow 0$ zu $r(x) \to \infty$ und $x \nearrow 0$ zu $r(x) \to -\infty$ strebt. $\triangleleft$

Definition 32. Die Gerade $x = c$ nennt man *vertikale Asymptote* eines Graphen der Funktion r, falls $x \nearrow c$ oder $x \searrow c$ und dabei $|r(x)| \to \infty$.

Satz 19.7. Polstelle Die rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Nullstelle $q(c) = 0$ und $p(c) \neq 0$ hat eine vertikale Asymptote $x = c$.

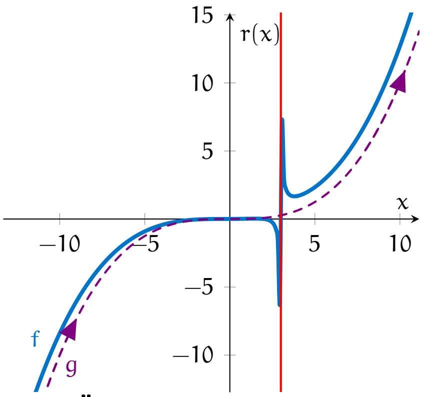


In der Abbildung ist die Funktion $r(x) = \frac{x}{x^2}$ dargestellt, die an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle aufweist und deshalb eine vertikale Asymptote zeitigt. Zudem ist erkennbar, dass das Fernverhalten darauf hindeutet, dass die Werte in beide Richtungen des Zahlenstrahls gegen Null tendieren. Deshalb spricht man von einer horizontalen Grenzgeraden oder Asymptoten.

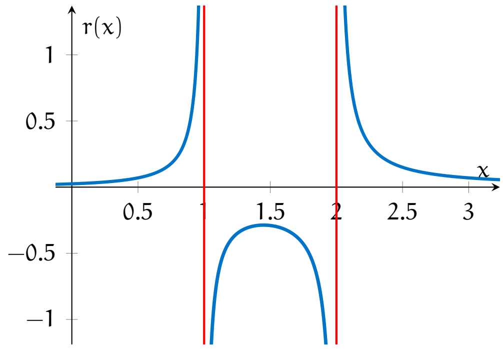
Definition 33. Die Gerade $y = c$ nennt man *horizontale Asymptote* (oder Grenzgerade) des Graphen der Funktion f, falls für $|x| \to \infty$ dann $f(x) \to c$.

Wichtig 9. Echt rationale Funktionen haben eine horizontale Asymptote $y = 0$. $\dashv$

19.8 Übung Welche Funktion hat eine horizontale Asymptote? $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$, $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ und $h(x) = \dfrac{6x^3-3x+1}{5-2x^3}$. Es ist f eine echt rationale Funktion, denn der Nenner hat einen höheren Exponenten als der Zähler. Somit hat f eine Asymptote $y = 0$. g hat keine horizontale Asymptote, denn $n > m$. Bei h sind die höchsten Exponenten gleich, es hat keine horizontale Asymptote bei $y = 0$. Aber h hat ein horizontale Asymptote bei $y = -3 = \frac{6x^3}{-2x^3}$. $\triangleleft$



19.9 Übung In der Abbildung ist die schon verwendete Funktion $r(x) = \frac{(x-2)(x+1)(x^2+1)}{x-3}$ dargestellt. Das Fernverhalten ist von $g(x) = \frac{x^4}{x} = x^3$, also von Südwest nach Nordost. Bei $x = 3$ hat der Nenner eine Nullstelle, so dass eine Asymptote folgt. Diese ist wie eine undurchdringliche Wand, durch die der Graph nicht hindurch geht. Hier wird er nach unten gebogen. Jenseits der Wand taucht der Graph von oben auf und setzt den Lauf gemäss dem Fernverhalten fort. ◁



19.10 Übung Wir zeichnen die Funktion $r(x) = 0.01\frac{x^2+5}{(x-1)(x-3)}$ mit den Polstellen $x = \{1, 3\}$. Fernverhalten ist wie $g(x) = 0.01\frac{x^2}{x^2} = 0.01$. Der Wert ist > 0 also liegt in der Ferne die Kurve im ersten und zweiten Quadranten. Der Graph trifft auf die erste Asymptote und um positiv zu bleiben, muss er nach oben abzweigen. Auf der anderen Seite der Asymptote sind die Werte bis $x = 2$ negativ, sodass die Kurve von $-\infty$ wieder nach $-\infty$ verlaufen muss. Hinter der zweiten Asymptote wechselt wieder das Vorzeichen der Funktionswerte, weshalb die Kurve aus ∞ herabkommen und wieder zum Wert 0.01 folgen muss. ◁

Schiefe Asymptote

Wir haben bis jetzt die horizontale und die vertikale Asymptote angesprochen. Für unechte rationale Funktionen gibt es aber auch noch weitere Grenzkurven, die sich aus dem Fernverhalten erklären. Angenommen die unechte rationale Funktion

$$r(x) = \frac{3(x+1)(x^2+1)(x-1)^2}{2x^4-1} = \frac{3x^5-3x^4-6x+3}{2x^4-1} \tag{19.1}$$

sei gegeben. Das Fernverhalten ist wie $g(x) = \frac{3x^5}{2x^4} = \frac{3}{2}x = Ax$. Der Grad des Zählers ist also um 1 grösser als der des Nenners. Die Funktion g ist eine lineare Funktion, dargestellt als Gerade. Nun könnten wir noch die Funktion $h(x) = g(x) + B$ bestimmen, mit der Bedingung:

$$b = r(x) - ax \qquad \text{für} \qquad x \to \infty$$

Wir müssen also den "Leitterm" von $r(x) - Ax$ bestimmen. Wir führen die Polynomdivision aus und erhalten

$$\begin{array}{l}
\left(\;3x^5 - 3x^4 - 6x + 3\right) : \left(2x^4 - 1\right) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \dfrac{-\frac{9}{2}x + \frac{3}{2}}{2x^4 - 1} \\
\underline{-3x^5 \qquad\quad + \frac{3}{2}x} \\
\qquad\; -3x^4 - \frac{9}{2}x + 3 \\
\qquad\; \underline{3x^4 \qquad\quad - \frac{3}{2}} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{9}{2}x + \frac{3}{2}
\end{array}$$

Der Restterm geht mit $x \to \infty$ nach Null. Die Gerade ist also $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$. Nun betrachten wir einen leicht anderen Nenner, der auch ein Glied mit x^3 besitzt und erhalten aus der Division

$$\begin{array}{rl} \big(\quad 3x^5 - 3x^4 \qquad\qquad - 6x + 3\big) : \big(2x^4 - x^3 - 1\big) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + \dfrac{-\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{4}}{2x^4 - x^3 - 1} \\ \underline{- 3x^5 + \frac{3}{2}x^4 \qquad\qquad + \frac{3}{2}x} \\ - \frac{3}{2}x^4 \qquad - \frac{9}{2}x + 3 \\ \underline{\frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 \qquad - \frac{3}{4}} \\ - \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{4} \end{array}$$

Weil $A = \frac{a_n}{b_m}$ ist, bleibt er gleich wie im ersten Beispiel. Nun ist aber $B = -\frac{3}{4}$, hat sich also geändert.

Wir bestimmen B aus der Division allgemein. Für die Gerade brauchen wir nur die ersten zwei Terme des Bruchs, also

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}}{b_m x^{n-1} + b_{m-1}x^{n-2}}$$

oder

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}) : (b_m x^{n-1} + b_{m-1}x^{n-2}) = \frac{a_n}{b_m}x + \frac{a_{n-1}x^{n-1} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-1}x^{n-1}}{b_m x^{n-1}} + R$$

Nun folgt, da $R \to 0$ geht mit $x \to \infty$:

$$\frac{a_n}{b_m}x + \frac{a_{n-1}x^{n-1} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-1}x^{n-1}}{b_m x^{n-1}} = \frac{a_n}{b_m}x + \frac{a_{n-1}}{b_m} - \frac{\frac{a_n}{b_m}b_{m-1}}{b_m}$$

Wir testen diese Formal an der Gleichung 19.1:

$$g(x) = \frac{a_n}{b_m}x + \frac{a_{n-1}}{b_m} - \frac{\frac{a_n}{b_m}b_{m-1}}{b_m} = \frac{3}{2}x + \frac{-3}{2} - \frac{\frac{3}{2}0}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{-3}{2}$$

Und nun an der modifizierten Gleichung mit $b_{m-1} = -1$

$$g(x) = \frac{a_n}{b_m}x + \frac{a_{n-1}}{b_m} - \frac{\frac{a_n}{b_m}b_{m-1}}{b_m} = \frac{3}{2}x + \frac{-3}{2} - \frac{\frac{3}{2}(-1)}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$$

Formel 19.11. Schiefe Asymptote Für eine rationale Funktion mit Zählergrad n und Nennergrad $m = n - 1$ hat die schiefe Asymptote die Geradengleichung $g(x) = Ax + B$ mit

$$A = \frac{a_n}{b_m} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{a_{n-1}}{b_m} - A \cdot \frac{b_{m-1}}{b_m}$$

Wir zeigen die Kurve von Gleichung 19.1 in der folgenden Abbildung 19.2.2.

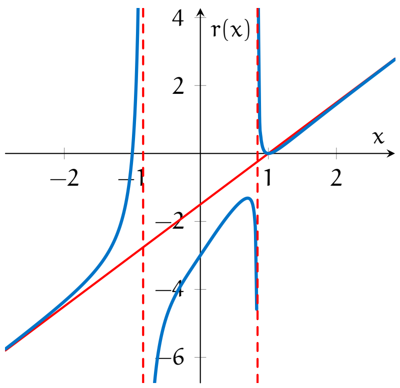
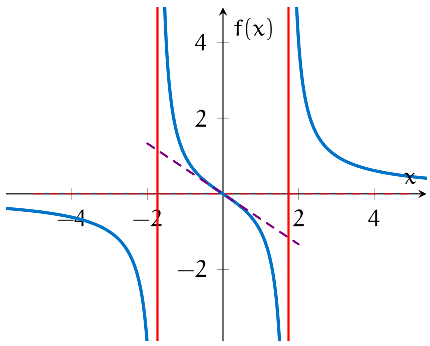


Abbildung 19.1

Die schiefe Asymptote gibt das Fernverhalten wieder für unechte rationale Funktionen, wo der Zählerexponent um eins grösser ist als der Nennerexponent. Genauso würde bei einer unechten rationalen Funktion, bei der die Differenz der Exponenten zwei ist, eine Grenzparabel aufweisen. Diese zu suchen ist aber nicht üblich.

19.12 Übung Bestimme die Geradengleichung der schiefen Asymptote von $r(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$. Es ist $g(x) = Ax + B$ mit $A = \frac{a_2}{b_1} = \frac{1}{1} = 1$ und $B = 0 - 0 = 0$. Somit $g(x) = x$. ◁

19.13 Übung Finde die schiefe Asymptote von $f(x) = \frac{x^2-4x+2}{1-x}$. Die Koeffizienten der Geradengleichung sind $A = \frac{1}{-1} = -1$ und $B = \frac{-4}{-1} - 1 = 5$. Somit $g(x) = -x + 3$. ◁



19.14 Übung Finde Asymptoten oder Definitionslücken der folgender Funktion: $f(x) = \frac{2x}{x^2-3}$. Die Nullstellen des Nenners folgen aus $x^2 - 3 = 0$, nämlich $x = \pm\sqrt{3}$. Die zwei vertikalen Asymptoten teilen die Zeichenfläche in drei Abschnitte. Ganz links sind die Werte $f(x) < 0$, ganz rechts $f(x) > 0$. Zwischen den Polstellen wechselt der Funktionswert das Vorzeichen. Bei $x = 0$ ist $f(x) \approx \frac{-2}{3}x$, eine fallende Gerade. Da es eine echt rationale Funktion ist, gibt es die horizontale Asymptote $y = 0$. ◁

19.15 Übung Finde die Asymptoten von $\frac{x^2-x-6}{x^2+9}$. Der Nennen hat keine reelle Nullstelle und somit keine Pole. Das Fernverhalten ist wie $\frac{x^2}{x^2} = 1$. Es gibt die horizontale Asymptote $y = 1$. ◁

19.16 Übung Asymptoten und Lücken gesucht für $r(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}$. Zähler und Nenner sind quadratische Terme. Man könnte die Nullstellen mit der Mitternachtsformel finden. Oder die Faktorisierung versuchen. Der Zähler ist $(x+2)(x-3)$ und der Nenner $(x+2)^2$. Es gibt eine Definitionslücke bei $x = -2$, die aber auch Polstelle ist. Der gekürzte Ausdruck ist

$$r(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

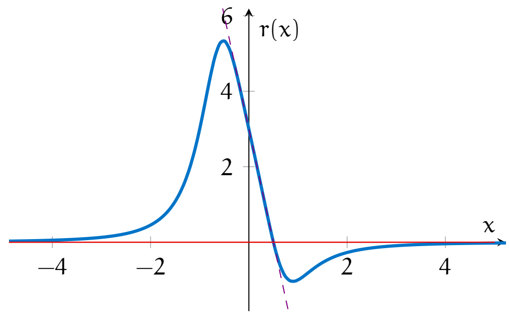
Bei der Polstelle $x = -2$ gibt es eine vertikale Asymptote. Zudem gibt es die horizontale Asymptote $y = 1$. ◁

Keine Polstellen

Eine rationale Funktion weist kein Polstellen auf, wenn der Nenner keine reellen Nullstellen besitzt. Wenn wir also vorangehende Funktion leicht abändern, dann folgt eine solche. Beispielsweise

$$r(x) = \frac{-6x+3}{2x^4+1}$$

Die Funktion hat eine horizontale Asymptote, weil echter Bruch. Für $|x| < 1$ dominiert der Term $-6x$ als Gerade den Term x^4, der sehr klein wird. Deshalb muss im Intervall $(-1, 1)$ eine abfallende Gerade annähernd feststellbar sein.



19.3 Funktionsgraph

19.3.1 Diagramm erstellen

Das erstellen von Funktionsgraphen wird heute immer mehr von speziellen Zeichenprogrammen im Netz oder sogar von Taschenrechnern übernommen. Deshalb ist das Zeichnen von Diagrammen von Hand immer weniger notwendig. Sind keine Hilfsmittel vorhanden, so muss man wie von Alters her die Diagramme anhand besonderer Punkte skizzieren. Bei rationalen Funktionen hat es besonders viele solcher spezieller Punkte. Wir geben deshalb ein Rezept als Handreichung.

19.1 Rezept Zeichnen rationaler Funktionen Gegeben ist die rationale Funktion $r(x)$

(1) Bestimme den Definitionsbereich von r.

(2) kürze $r(x)$ so weit wie möglich.

(3) finde die Schnittstellen der x- und y-Achse von $y = r(x)$, falls vorhanden,

(4) bestimme Lücken und vertikale Asymptoten (Pole), bestimme Verlauf links und rechts der Asymptoten,

(5) analysiere das Fernverhalten von r, finde horizontale und schiefe Asymptoten,

(6) bestimme die Vorzeichen der Funktkion $r(x)$ zwischen den speziellen Stellen der x-Achse.

Anmerkung 19.2. Mit dem Kürzen werden Definitionslücken behoben. Erinnere die Funktion $g(x) = \frac{x}{x}$, die ja bei $x = 0$ nicht definiert ist. Mit dem Kürzen wird diese Stelle behoben und mit $g(0) = 1$ ersetzt.

19.3 Übung Wir betrachten die Funktion $g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - x - 6} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. An ihr wollen wir das Rezept durcharbeiten.

(1) Für den Definitionsbereich müssen wir die Nullstellen des Nenners kennen. Diese ergeben sich aus $x^2 - x - 6 = 0$. Faktorisiert ist $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$ und deshalb $x_0 = \{3, -2\}$. Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$.

(2) Kann man kürzen? Dazu faktorisieren wir den Zähler $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Mit der Mitternachtsformel folgt $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8 \cdot (-5)}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \{2.5, -1\}$ Es ist der Zähler $p(x) = (x - 2.5)(x + 1) = \frac{1}{2}(2x - 5)(x + 1)$. Man kann nichts kürzen, denn es gibt keine gemeinsamen Faktoren im Nenner und Zähler.

(3) Für die Schnittpunkte mit der x-Achse setzen wir $g(x) = 0$. Die Nullstellen des Zählers haben wir bereits bestimmt, es sind $x_0 = \{-1, 2.5\}$. Beide sind im Definitionsbereich. Den Schnittpunkt mit der y-Achse finden wir mit $x = 0$, $y_0 = \frac{5}{6}$.

(4) Da $r(x)$ schon gekürzt ist, sind die Nennernullstellen Polstellen mit vertikalen Asymptoten. Die faktorisierte Funktion ist $r(x) = \frac{(2x-5)(x+1}{(x-3)(x+2)}$

- Für $x = -2$ interessiert $x \to -2$, $g(x) \to ?$ Das x kann sich von oben oder von unten näher. Von oben: Wir setzen $x = -2 + u$ mit u sehr klein (und damit $1/u$ sehr gross) im Nenner an der Stelle ein, wo $x = 2$ nicht erlaubt ist, und überlegen

  $$g(x) \approx \frac{(-9)(-1)}{(-5)u} \approx -\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{u} \approx -\frac{1}{u}$$

  Die Kurve geht nach unten ins Unendliche. Nun für $x = -2 - u$. Wir ändern nur das Vorzeichen

  $$g(x) \approx \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{-u} \approx \frac{1}{u}$$

  Der Verlauf der Kurve links der Polstelle geht ins Unendliche nach oben.

- $x = 3$: Wir setzen $x = 3 + u$ und erhalten

  $$g(x) \approx \frac{(1)(4)}{(-u)(5)} \approx -\frac{4}{u} \approx -\frac{1}{u}$$

  Der Wert wird sehr gross ins Negative, nach unten. Analog für $x = 3 - u$

  $$g(x) \approx \frac{(1)(4)}{(u)(5)} \approx \frac{4}{u} \approx +\frac{1}{u}$$

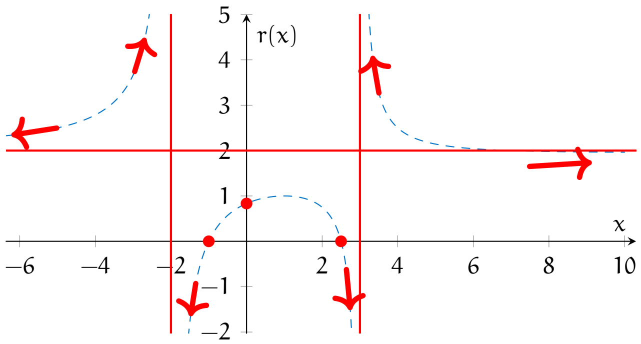
  Also links der Polstelle geht $g(x) \to \infty$.

(5) Das Fernverhalten wird durch die höchsten Exponenten bestimmt, also $f(x) = \frac{2x^2}{x^2} = 2$. Wir haben eine horizontale Asymptote bei $y = 2$. Nun fragen wir für jedes Ende, ob die Kurve von unten oder von oben sich annähert. Dazu müssen wir die Polynomdivision ausführen, damit wir den Restterm von 2 betrachten können. Es ist

$$\begin{array}{l} \left(\;\; 2x^2 - 3x \;\; - 5\right) : \left(x^2 - x - 6\right) = 2 + \dfrac{-x+7}{x^2-x-6} \\ \underline{-\, 2x^2 + 2x + 12} \\ \qquad\quad -x \;\; + 7 \end{array}$$

Für positive x wird der Restterm $\frac{-x+7}{x^2-x-6}$ negativ. Somit wird für $x \to \infty$ die Asymptote von unten angenähert. Für $x \to -\infty$ ist der Restterm positiv, d.h. die Asymptote wird von oben angenähert.

Nun haben wir einen Haufen Punkte und Anhaltspunkte gesammelt, um ein Skelett der Kurve zu skizzieren. $\triangleleft$



19.3.2 Überlagerung, Partialbrüche**

Graphen werden überlagert, superponiert, indem man die Werte der Funktionen addiert. Nun gibt es die Möglichkeit, dass eine rationale Funktion als Summe zweier Funktionen dargestellt werden kann. Wir nehmen ein Beispiel:

$$r(x) = \frac{5}{(x-3)(x+2)}$$

soll auf die Form

$$r(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

gebracht werden. Die Variablen A und B bestimmt man durch Koeffizientevergleich. Also

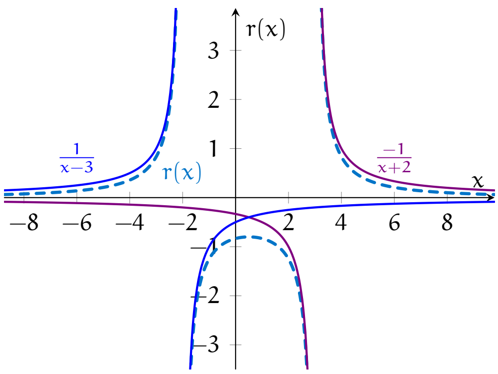
$$\frac{5}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A-3B}{(x-3)(x+2)}$$

Der Koeffizientenvergleich führt zu

$$A + B = 0$$
$$2A - 3B = 5$$

Die Lösungen sind $A = -B$ und damit $B = -1$ und $A = 1$. Somit gilt

$$r(x) = \frac{5}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}$$



Die Abbildung zeigt, wie die rationale Funktion $r(x)$, strichliert gezeichnet, durch die zwei Hyperbeln zusammengesetzt werden kann.

19.4 Übung Wir zerlegen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Die Faktoren sind $(x-3)(x-2)$. Daraus folgt der Ansatz

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Gleichnamig gemacht folgt

$$A(x-2) + B(x-3) = x(A+B) - (2A+3B)$$

Koeffizientenvergleich erbringt aus $A+B = 0$ dann $A = -B$ und $2A+3B = -1$, $-2B+3B = -1$, $B = -1$ und somit $A = 1$. ◁

Diese Zerlegung gelingt auch für Nennerpolynome höheren Grades. Das Gleichungssystem wird entsprechend grösser.

Aufgaben

2.1 Kürze folgende Funktionen $\dfrac{2x^3+5x^2-10x-21}{x^3+4x^2+4x+3}$

1 Man betrachte die zwei Absolutglieder 21 und 3 mit den Faktorzerlegungen $21 = 3\cdot 7$ und $3 = 3\cdot 1$. Man kann also 3 oder -3 vermuten. Proben: Zähler $-2\cdot 27+5\cdot 9+30-21 = 0$ und Nenner $-27+4\cdot 9-12+3 = 0$. Somit Linearfaktor $(x+3)$ kann gekürzt werden. Nun Polynomdivisionen:

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad 2x^3+5x^2-10x-21\Big) : \Big(x+3\Big) = 2x^2-x-7\\
\underline{-2x^3-6x^2}\\
\qquad\quad -x^2-10x\\
\qquad\quad \underline{\;\;x^2\;\;+3x}\\
\qquad\qquad\qquad -7x-21\\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\;7x+21}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad x^3+4x^2+4x+3\Big) : \Big(x+3\Big) = x^2+x+1\\
\underline{-x^3-3x^2}\\
\qquad\quad x^2+4x\\
\qquad \underline{-x^2-3x}\\
\qquad\qquad\quad x+3\\
\qquad\qquad \underline{-x-3}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Somit folgt die gekürzte Umformung

$$\frac{2x^2-x-7}{x^2+x+1}$$

Wir sind fertig, denn der Nenner hat keine reelle Nullstelle mehr.

2.2 Bestimme Nullstellen, Pole, Definitionsbereich und Asymptoten

(a) $f(x) = \dfrac{x}{3x-6}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x+7}{(x+3)^2}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{-5x^4-3x^3+x^2-10}{x^3-3x^2+3x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3-3x+1}{x^2+1}$ **(e)** $f(x) = \dfrac{18-2x^2}{x^2-9}$ **(f)** $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+3x}{2x^2+2}$

(g) $f(x) = \dfrac{-x^3+4x}{x^2-9}$

2 **(a)** Polstelle bei $3x-6 = 0$ woraus $x = 2$. Nullstelle bei $x = 0$. Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Fernverhalten wie $\frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$, $y = 1/3$ horizontale Asymptote. Bei Polstelle vertikale Asymptote $x = 2$.

(b) Polstelle und vertikale Asymptote bei $x = -3$. Echt rationale Funktion $(\frac{x}{x^2})$, somit horizontale Asymptote $y = 0$

(c) Erste Nennernullstelle (durch probieren) $x = 1$. Da nicht Zählernullstelle, dann auch Polstelle und vertikale Asymptote. Polynomdivision $(x^3-3x^2+3x-1) : (x-1) = x^2-2x+1$ und somit $x^2-2x+1 = (x-1)^2$. (Alternative hätte man merken können, dass Nenner $(x-1)^3$ ist.) Grad Zähler um 1 höher als Nenner, deshalb schiefe Asymptote. Der Faktor A ist $A = -5$ und $B = \frac{a_{n-1}}{b_m} - A\cdot\frac{b_{m-1}}{b_m} = \frac{-3}{1} + 5A\mathrm{cdot}\frac{-3}{1} = -18$ also $g(x) = -5x-18$.

(d) Keine Pole, Nullstellen bei $x_{1,2} = 3\pm\sqrt{9-4} = 3\pm\sqrt{5}$. Schiefe Asymptote mit $A = 1$ und $B = 0$, d.h. $g(x) = x$. $f(x)$ geht nach ∞ für $x\to\infty$ und gegen $-\infty$ für $x\to-\infty$.

(e) Polstellen bei $x = \{-3, 3\}$, die gehoben werden können, weil Zählernullstellen ebenfalls $\{-3, 3\}$. Die Punkte der Form $\frac{0}{0}$ sind Definitionslücken. Horizontale Asymptote bei $y = -2$.

(f) Nullstellen von $Z = x^3-2x^2+3x = x(x^2-2x+3) = 0$, damit $x_0 = 0$ und quadratisch ergänzt $(x-1)^2-1+3 = 0$ oder $(x-1)^2 = -2$ hat keine Lösungen, somit nur x_0. Polstellen = Nullstellen Nenner: $x^2+1 = 0$ hat keine Lösung, also keine Pole, Asymptote schief, $A = 1/2$, $B = (-2)/2 - 1/2(0/1) = -1$, somit $g(x) = 0.5x-1$

(g) Nullstellen Zähler $-x(x^2-4) = -x(x+2)(x-2)$, also $x_0 = \{0, -2, 2\}$. Polstellen, d.h. Nullstellen Nenner: $x^2 - 9 = 0$ oder $x^2 = 9$ womit $x = \pm 3$. Asymptote schief, $A = -1$, $B = 0 + 1 \cdot (0) = 0$ womit $g(x) = -1x$.

2.3 Man such eine Funktion, welche die Funktion $\dfrac{x^4+4}{4x^2}$ für a) x-Werte mit sehr grossem und b) mir sehr kleinen Absolutbetrag annähert.

3 a) Für grosse x-Werte ist das Fernverhalten massgebend, also $g(x) = \frac{x^2}{4}$, eine Parabel. Für Werte um Null herum mit $|x| < 1$ wird $x^2 > x^4$ und somit $h(x) = \frac{1}{x^2}$.

2.4 Finde eine rationale Funktion, die keine geradlinige Asymptote aufweist.

4 Keine vertikale Asymptote, wenn keine Polstellen. Also Nenner z.B $N = x^2 + 1$. Keine Horizontale wenn Zählergrad grösser als Nennergrad. Bei $n = m + 1$ schiefe Asymptote, deshalb Unterschied mindestens 2 Grade. Somit $Z = x^4$. Deshalb $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$ hat keine Asymptoten.

2.5 Finde die einfachste Funktion, welche die Asymptoten $y = 2$ und $x = 3$ besitzt.

5 Aus $x = 3$ folgern wir eine vertikale Asymptote und somit eine Polstelle und weiter eine Nullstelle bei $x = 3$. Also $N = x - 3$. Für $y = 2$ muss $\frac{ax^n}{x^n} = 2$ sein, somit $Z = 2x$ und $f(x) = \frac{2x}{x-3}$.

Kapitel 20

Exponential- und Logarithmusfunktion

20.1 Begriffe und Grundlagen

In seinem Buch “Im Gold- und Silberland” schreibt Mark Twain:

> Dann wurde der alte Mann wild und fing an zu schimpfen. Er gab Ollendorff allerhand schlimme Namen, sagte, in seinem Leben hätte er keinen solchen dämlichen Pinsel gesehen wie ihn, und machte zum Schluß die ganz besonders giftige Bemerkung, er wisse nicht einmal so viel wie ein Logarithmus!

20.1.1 Definitionen

Definition 34. Als *Exponentialfunktion* bezeichnet man eine Funktion der Form $f(x) = b^x$ mit einer reellen Zahl $b > 0$ und $b \neq 1$ als Basis (Grundzahl). Man kann auch $\exp_b(x) = b^x$ schreiben.

Anmerkung 20.1. Speziell ist $\exp_e(x) = \exp(x) = e^x$. Die Basis e, Euler'sche Zahl, kann man weglassen. Man bezeichnet die Euler'sche Zahl auch als *natürliche Basis* der Exponentialfunktion.

Definition 35. Die *Logarithmusfunktion* $g(x) = \log_b(x)$ ist die Umkehrfunktion oder inverse Funktion der Exponentialfunktion $f(x) = b^x = \exp_b(x)$.

Alternative Definitionen

Man kann, ausgehend von geometrischen Überlegungen diese zwei Funktionen aus einer bestimmten Eigenschaft heraus definieren. Aequivalent kann man setzen:

Definition 36. Jede stetige Funktion f, die der Funktionsgleichung

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

mit x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ genügt, heisst *Exponentialfunktion*.

Weil $b^{x_1+x_2} = b^{x_1}b^{x_2}$ ist, ist b^x eine solche Funktion.

Definition 37. Jede stetige Funktion f, die der Funktionsgleichung

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

mit $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ und x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ genügt, heisst *Logarithmusfunktion*.

Diese Definitionen werten den Logarithmus aus seiner eingeschränkten Rolle als Inverser auf. Die hier beschriebenen Eigenschaften schlagen sich bei den Transformationen nieder.

20.1.2 Die Euler'sche Zahl

Die Euler'sche Zahl ist eine sehr spezielle Zahl, vergleichbar mit π. Während π die einfache Definition besitzt als Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser und schon den Babyloniern aufgefallen ist, taucht e im frühen 17. Jahrhundert auf mit der Erstellung der Logarithmentafeln. In einer Fragestellung von Jakob Bernoulli zur augenblicklichen Verzinsung kommt die Zahl auch zum Vorschein, ebenso als Begrenzung der Fläche unter der Hyperbel. Wegen dieser Häufigkeit des Auftretens, kann man die Zahl aus verschiedenen Betrachtungen definieren. Die einfachste ist die Festlegung als Grenzwert einer speziellen Reihe.

Definition 38. Die *Euler'sche Zahl* e ist der Grenzwert

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Der Wert ist $e \approx 2.718281$.

Wenn wir diese Zahl als Definition wählen, dann sind andere Darstellungen der Zahl mit dieser Definition herleitbar. Andere wichtige Darstellungen sind hier zusammengefasst

Formel 20.2. Euler'sche Zahl Alternative Darstellungen sind:

$$(n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

oder

$$(n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e.$$

Anmerkung 20.3. Es gilt auch der Grenzwert für $n \to \infty$ dann $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$. Wenn x der Zinssatz ist, z.B. $5\% = 0.05$ pro Jahr und wir betrachten k Jahre, dann folgt $(1+\frac{x}{n})^{n \cdot k} \to e^{x \cdot k}$. Diese Art der Verzinsung nennt man kontinuierlich.

Die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ kann man in Analogie zur Definition ebenfalls als Reihe darstellen.

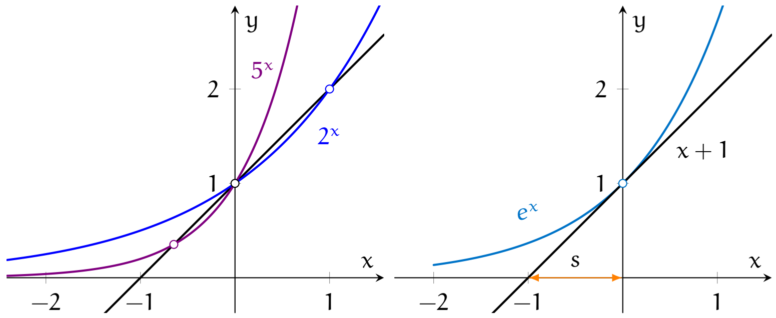
Formel 20.4. Exponentialfunktion mit Basis e Es gilt

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Für $\exp(cx)$ ist die Reihe analog, indem man x durch $\xi = cx$ ersetzt.

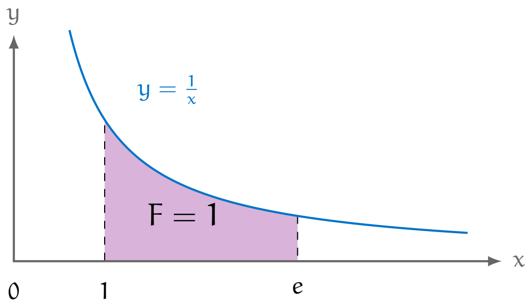
Graphische Definition

Wir betrachten die Exponentialfunktionen in der Abbildung. Im linken Teilbild sieht man die Funktionen 5^x und 2^x. Sie schneiden die Gerade $g(x) = x - 1$ jeweils in zwei Punkten. Zum einen immer in $(0, 1)$, denn $b^0 = 1$. Zum anderen in einem weiteren Pubnkt. für die Basis 5 unterhalb von $(0, 1)$, für $b = 2$ oberhalb. Nun gibt es einen Wert b, für den die Kurve die Gerade nur einmal berührt und zwar in $(0, 1)$. Damit ist die Gerade auch die Tangente an den Graphen der Exponentialfunktion mit diesem speziellen Wert b. Es stellt sich heraus, dass $b = e$ ist. Zudem kann man festhalten, dass $e^x \geqslant x + 1$ ist.



In der Abbildung sehen wir die sogenannte *Subtangente*, der x-Achsenabschnitt, der das Steigungsdreieck der Tangente bildet. Es stellt sich heraus, dass für jeden Punkt von e^x die Subtangente s die Länge 1 hat. Das impliziert, dass die Steigung der Tangente an die Kurve e^x eben genau dieser Wert e^x ist.

Ein weiteres Auftauchen der Zahl e betrifft die obere Grenze der Fläche unter der Einheitshyperbel $y = 1/x$. Von 1 bis e wird die Fläche 1, die zwischen Hyperbel und x-Achse eingeschlossen ist. Später werden wir noch sehen, wie der Zusammenhang zwischen der Hyperbel, Logarithmus und Exponentialfunktion ist.



20.2 Eigenschaften

Wir beschreiben die Funktion vor möglichen Transformationen. Allgemein gesagt, haben die zwei Funktionen gutmütige Eigenschaften. Was wir hier schon ausschliessen können, ist dass die Funktionen periodisch sind.

Die grundlegende Eigenschaft der Exponentialfunktion ist, dass eine Erhöhung von x um einen bestimmten Wert u auf $x + u$, die entsprechende Änderung des Funktionswerts von $\exp_b(x)$ auf $\exp_b(x+u)$ eine Multiplikation mit dem Faktor $\exp(u)$ entspricht. Also Addition bei der unabhängigen Variablen führt zu Multiplikation bei der anhängigen. Formal

$$(x \to x+u) \qquad \Rightarrow \qquad \big(\exp_b(x) \to \exp_b(x) \cdot \exp_b(u)\big)$$

Im Vergleich: Bei der linearen Funktion führt die Addition zu einer Addition.

Wichtig 10. ☠ In gleich grossen Intervallen ändert sich der Funktionswert um den gleichen Faktor. ⊣

20.2.1 Definitions- und Wertebereich

Es gelten folgenden Eigenschaften:

- Exponentialfunktion: Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$, Wertebereich $(0, \infty)$

- Logaritmusfunktion: Definitionsbereich $(0, \infty)$, Wertebereich $(-\infty, \infty)$

Da die Funktionen gegenseitig invers sind, muss des einen Definitionsbereich des andern Wertebereich sein. Für die Modellierung eines exponentiellen Prozesses, wie Vermehrung von Bakterien, wird in der Regel nur ein Teil dieses Bereichs, üblicherweise $x \geqslant 0$, benötigt, da jeder reale Prozess irgendwann beginnen muss.

20.2.2 Stetigkeit, Monotonie, Eineindeutigkeit

Exponential- und Logarithmusfunktion besitzen keine Lücken oder Sprünge. Sie sind in ihrem Definitionsbereich stetig. Darüberhinaus sind sie *streng monoton*. Kein Wert des Wertebereichs erscheint mehrmals, sie sind alle geordnet. Es sind die drei Fälle $b > 1$, $0 < b < 1$ und $b = 1$ zu unterscheiden. Für den ersten Fall gilt

$$(x_2 > x_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (\exp_b(x_2) > \exp_b(x_1)) \\ (\log_b(x_2) > \log_b(x_1)) \end{cases}$$

Anderseits für $0 < b < 1$:

$$(x_2 > x_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (\exp_b(x_2) < \exp_b(x_1)) \\ (\log_b(x_2) < \log_b(x_1)) \end{cases}$$

Für $b = 1$ haben wir den Spezialfall, dass die Funktionen Konstanten sind. Für $b > 1$ mit x und $x + u$ folgt $\exp_b(x + u) = \exp_b(x) \exp_b(u)$. Weil $\exp_b(u)$ mit $u > 0$ grösser als 1 ist, folgt, dass $\exp_b(x) \exp_b(u) > \exp_b(x)$ ist. Das gilt analog für den Logarithmus, der ja der an der Winkelhalbierenden gespiegelte Wert ist. Die beiden Funktionen sind eineindeutig, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} (\log_b(u) = \log_b(w)) &\Leftrightarrow (u = w) \\ (b^u = b^w) &\Leftrightarrow (u = w) \end{aligned}$$

Aufgrund der Monotonie gibt es auch keine stationären Punkte, d.h Extrema oder Terrassenpunkte.

20.2.3 Nullstelle

Die Exponentialfunktion, immer in ihrer Standardform b^x, besitzt keine Nullstelle.
Die Logarithmusfunktion $\log_b(x)$ besitzt die einzige Nullstelle bei $x = 1$, wo $\log_b(1) = 0$ ist. Der Punkt ist $(1, 0)$. Diese Nullstelle ist das Spiegelbild des Schnittpunkts der Exponentialfunktion mit der y-Achse, dem Punkt $(0, 1)$. Man beachte, dass die Nullstelle von b unabhängig ist, für jedes $b > 0$ gilt.

20.2.4 Fernverhalten, Unendlichkeitsstelle, Asymptote

Auch hier wieder die Fallunterscheidung $b > 1$ und $0 < b < 1$. Die Exponentialfunktion mit $b > 1$ wird für immer kleinere x-Werte immer kleiner und nähert mit $x \to -\infty$ dann $y = 0$ an. Für $0 < b < 1$ gilt, dass $y = 0$ für $x \to \infty$, also nach rechts, gilt. Die Asymptoten sind für den Logarithmus einfach die an der Identität gespiegelten. Somit werden aus den horizontalen dann vertikale Asymptoten bei $x = 0$.

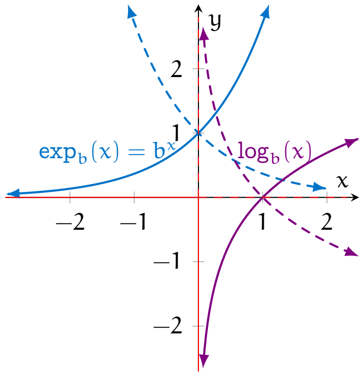


Abbildung 20.1

20.2.5 Symmetrie

Wie man bereits in der Abbildung 20.2.4 ersieht, gibt es zwei Symmetrien. Für die Exponentialfunktion gilt

$$\exp_b(x) = \exp_b(-x) \qquad \text{symmetrisch bezüglich } y\text{-Achse}$$

Die Logarithmusfunktion hat keine Symmetrien.

Anmerkung 20.1. Man beachte, weil $b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ ist, könnte man auch schreiben

$$\begin{aligned}\exp_b(-x) &= \exp_{1/b}(x)\\ \log_b(x) &= -\log_{1/b}(x)\end{aligned}$$

Formel 20.2. Symmetrie Es gilt bezüglich der Basis b:

$$\begin{aligned}\exp_b(-x) &= \exp_{1/b}(x)\\ \log_b(x) &= -\log_{1/b}(x)\end{aligned}$$

20.3 Übung Wir vergleichen die Terme $\log_2(x)$ mit $-\log_{0.5}(x)$ bei $x = 3$. Es ist $\log_2(x) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{1.0986}{0.6931} = 1.585$ und $-\log_{0.5}(3) = -\frac{\ln(3)}{\ln(0.5)} = -\frac{1.0986}{-0.6931} = 1.585$. ◁

20.2.6 Spezielles, Tangente

Wir haben weiter oben schon behauptet, dass die Steigung der Tangente an die Kurve e^x wiederum e^x sei. Wir betrachten zuerst die Sekante, gegeben durch die zwei Stellen x und $x + u$. Die Steigung ist dann $a = \frac{e^{x+u} - e^x}{u}$. Wenn wir Formel 20.4 heranziehen, dann können wir schreiben

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{e^{x+u} - e^{x}}{u} \\
&= \frac{1}{u}\Big[1 + \frac{x+u}{1} + \frac{(x+u)^2}{1\cdot 2} + \frac{(x+u)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(x+u)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Big] \\
&= \frac{1}{u}\Big[\frac{x+u}{1} + \frac{x^2+2ux+u^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3+3x^2u+\ldots}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4+4x^3u+6x^2u^2+\ldots}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \\
&\quad - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\Big] \\
&= \frac{1}{u}\Big[\frac{u}{1} + \frac{2ux+u^2}{1\cdot 2} - \frac{3x^2u+3x^2u^2+\ldots}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4x^3u+6x^2u^2+\ldots}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\Big] \\
&= 1 + \frac{2x+u}{1\cdot 2} + \frac{3x^2+3xu}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4x^3+6x^2u}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots
\end{aligned}
$$

Nun wählen wir $u = 0$, womit die Sekante in die Tangente übergeht. Es folgt

$$a = 1 + \frac{2x}{1\cdot 2} + \frac{3x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

und weiter mit Kürzen und der Formel 20.4:

$$a = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = e^x.$$

Somit fassen wir zusammen.

Formel 20.4. Tangente an Exponentialfunktion Die Tangente an die Funktion $f(x) = \exp(x) = e^x$ an der Stelle x_0 ist

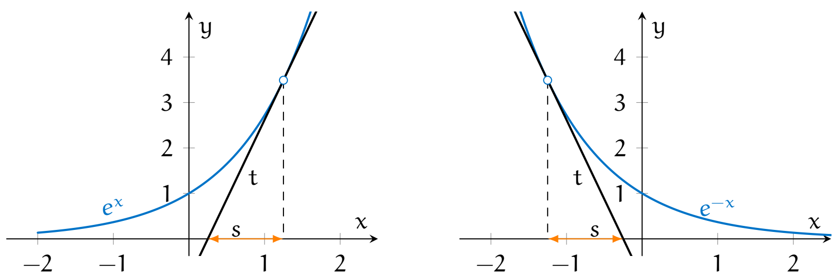
$$t: \qquad y - \exp(x_0) = \exp(x_0)(x - x_0)$$

Die Steigung der Tangente an $f(x) = e^x$ ist e^x.

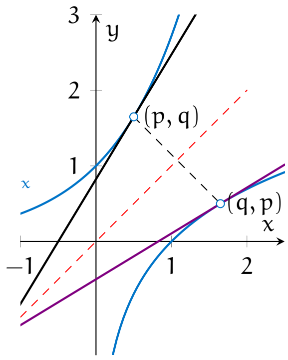
Die Nullstelle der Geraden ist bei $y = 0$ oder, die Tangentengleichung durch $\exp(x_0)$ dividieren,

$$0 - \exp(x_0) = \exp(x_0)(x_s - x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_s - x_0 = 1$$

Der Abstand $s = x_s - x_0$ ist die Subtangente, die immer 1 ist. Das gilt auch für $f(x) = e^{-x}$.



Wenn wir die Tangentsteigung an die e-Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ kennen, so kann man daraus auch die Tangentensteigung an die Inverse, also der $\ln(x)$-Funktion bestimmen.



In der Abbildung sieht man gut, wie die Tangenten von Exponentialfunktion zur Basis e und der natürliche Logarithmus, sein Inverse, zusammengehören. Die Tangentengleichung an die e-Funktion ist umgeschrieben $y = q \cdot (x - p)$, aufgelöst nach x: $x = \frac{1}{q}y + p$ und x und y vertauscht $y_t = \frac{1}{q}x + p$. Wir setzen wieder ein $q = \exp(p)$. Somit ist die Steigung der Tangente an den Logarithmus an der Stelle q:

$$a(q) = \frac{1}{q} = \frac{1}{\exp(p)}$$

Nun ist $p = \ln(q)$. Somit

$$a(q) = \frac{1}{\exp(p)} = \frac{1}{\exp(\ln(q))} = \frac{1}{q}$$

Formel 20.5. Tangente an Logarithmusfunktion Die Tangente an die Funktion $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle x_0 ist

$$t: \qquad y - \ln(x_0) = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

Die Steigung der Tangente an $f(x) = \ln(x)$ ist $\frac{1}{x}$.

Dass hier die Hyperbel $\frac{1}{x}$ auftaucht, wo doch ihre Fläche die Euler'sche Zahl enthält, kann kein purer Zufall sein. Es wird sich noch klären.

20.6 Übung Wir bestimmen die Tangentensteigung von $\exp(x)$ an der Stelle $x = 0$ und die Tangentesteigung bei $x = 1$ von $\ln(x)$. Für die Exponentialfunktion ist $a = \exp(x) = \exp(0) = 1$. Für den natürlichen Logarithmus $a = \frac{1}{x}$, hier also also $a = 1$. Die Steigungen sind beide unter dem Winkel von 45°. $\triangleleft$

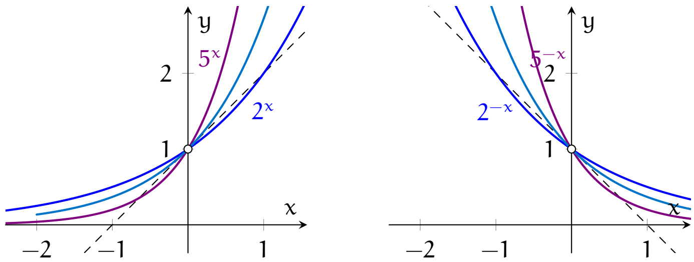
20.7 Übung Die Wachstumsgeschwindigkeit von Bakterien sei zur Zeit t der Anzahl vorhandenen Bakterien N proportional. Am Anfang der Untersuchung bei $t = 0$ sind N_0 Bakterien vorhanden und zur Zeit t_1 deren N_1. Wir suchen die Funktion $N(t)$, d.h. die Anzahl Bakterien in der Zeit. Die Bedingung, dass das Wachstum proportional zum Bestand ist, impliziert eine Exponentialfunktion, denn hier ist die Tangentensteigung gleich dem Funktionswert. Somit muss sein $N(t) = AN^{Bt}$. Mit $N(t_0) = N_0$ folgt $A = N_0$. Sodann gilt $N(t_1) = N_1 = N_0 N^{Bt_1}$. Daraus $\log(N_1) = Bt_1 \log(N_0)$ und $B = \frac{\ln(N_1)}{t_1 \ln(N_0)}$. $\triangleleft$

20.3 Funktionsgraphen

Wir haben vier verschiedene Typen von Kurven. Zum einen Exponential- und Logarithmusfunktion zum anderen die Basen grösser als eins oder zwischen eins und null.
Die Exponentialfunktion wird mit Wachstumsprozessen und Zerfallsprozessen identifiziert, je nachdem, welche Basis verwendet wird.

20.3.1 Exponentialfunktion, Transformationen

In Abhängigkeit von den zwei Bereichen $b > 1$ oder $0 < b < 1$ ergeben sich zwei typische Scharen von Graphen. Mit $b > 1$ kann man sich den Wachstumsprozess vorstellen, mit der Zeit x wird die Menge y mit Progression immer grösser. Der andere Modus stellt typischerweise den Zerfall dar, mit wachsendem x, hier Zeit, wird die Menge y immer weniger, und zwar mit abnehmender Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit wird mit der Tangentensteigung gleichgesetzt. Die Dynamik der Exponentialfunktion rührt daher, dass mit wachsendem Wert auch die Wachstumsgeschwindigkeit wächst und so das Wachstum anfacht.



Die Transformationen erfolgen mit der üblichen Gestalt

$$g(x) = Af(Bx + C) + D = A\exp(Bx + C) + D = A'\exp(Bx) + D$$

Der Parameter C ist überflüssig, weil er mit dem Koeffizienten A verrechnet werden kann.

Vertikale Verschiebung

Die vertikale Verschiebung erfolgt mit dem Parameter $D \neq 0$. Mit $D > 0$ nach oben, mit $D < 0$ nach unten zu kleineren y-Werten.

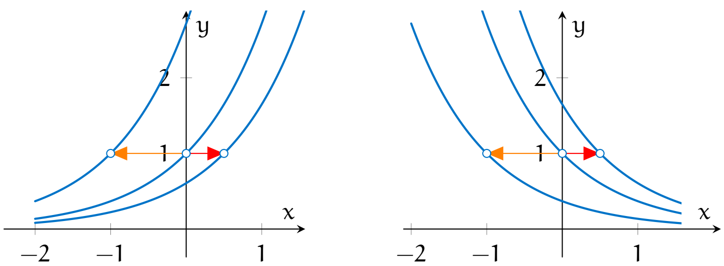
Horizontale Verschiebung

Horizontale Verschiebung benutzt den Parameter C. Da aber

$$\exp_b(x + C) = \exp_b(C)\exp_b(x)$$

ist, erfolgt eine Verschiebung nur durch eine Multiplikation mit e^C. Somit kann man auch eine Streckung und Stauchung mit A in vertikaler Richtung auch als Verschiebung auffassen, denn

$$A\exp_b(x) = \exp_b(x + \log_b(A))$$

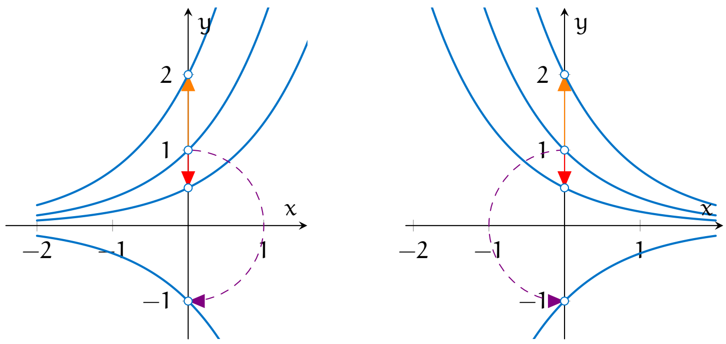


In den Abbildungen sehen wir die Wirkung der Parameter A oder C. Wir wählen $\exp(x)$, $\exp(x-0.5)$ und $\exp(x+1)$. Wie bisher verursacht ein positives C eine Verschiebung nach links. Die Werte von C kann man bei $y = 1$ ablesen. Es ist $\exp(x - 0.5) = 0.606\exp(x)$ und $\exp(x + 1) = 2.712\exp(x)$.

Vertikale Streckung oder Stauchung

Die Wirkung des Parameters A ist analog zu C. Ist $|A| > 1$, dann wird gestreckt, ist er $|A| < 1$, dann wird gestaucht. Ist $A < 0$, dann wird geklappt oder an der y-Achse gespiegelt.

Man erkennt deutlich, dass eine Streckung auch einer Verschiebung nach links entspricht und dass eine Stauchung wie eine Horizontalverschiebung nach rechts wirkt. An den Schnittpunkten der Kurven mit der y-Achse sind die Werte des Parameters A abzulesen, hier 2 und 0.5.



Horizontale Streckung

Als letztes betrachten wir den Parameter B und somit $g(x) = \exp_b(Bx)$. Es ist gleichbedeutend mit $g(x) = \left[\exp_b(x)\right]^B = \left[\exp_b(B)\right]^x = (b^B)^x$. Ist $B > 1$, dann wird gestreckt, ist $B < 1$, dann wird gestaucht.

20.3.2 Logarithmusfunktion, Transformationen

Wir betrachten nacheinander die Wirkung der Parameter der folgenden Transformationsgleichung

$$g(x) = A \cdot \log_b(Bx + C) + D$$

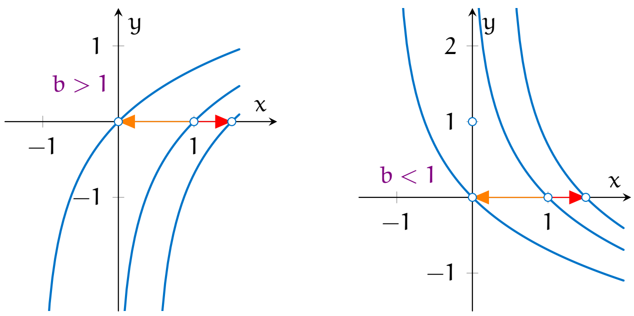
Man erinnere, dass $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ und $\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$.

Vertikale Verschiebung

Die Verschiebung in der Vertikalen erfolgt durch den Parameter D, also $g(x) = \log_b(x) + D$. Ist $D > 0$ dann verschiebt sich die Kurve nach oben, ist $D < 0$ dann nach unten. Dies ist die einfachste Transformation.

Horizontale Verschiebung

Es gilt $g(x) = \log_b(x + C)$. Ist $C > 0$, dann wird die Kurve um C nach links, zu kleineren x-Werten verschoben. Ist $C < 0$, dann wird die Kurve nach rechts verschoben.



Vertikale Streckung oder Stauchung

In y-Richtung zu Strecken heisst gemäss $g(x) = A \log_b(x)$ zu transformieren. Ist $|A| > 1$ wird gestreckt, ist $|A| < 1$, wird gestaucht. Ist das Vorzeichen von A negativ, dann wird an der x-Achse gespiegelt. Wir haben schon gesagt, dass $\log_b(x) = -\log_{1/b}(x)$ ist.

Horizontale Streckung oder Stauchung

Die horizontale Streckung oder Stauchung wird mit dem Parameter B bewerkstelligt. Es ist $g(x) = \log_b(Bx)$ oder auch $g(x) = \log_b(x) + \log_b(B)$. Es ist $\log_b(B)$ eine Konstante. Die horizontale Streckung ist also eine Verschiebung in y-Richtung und damit dasselbe wie eine vertikale Verschiebung.

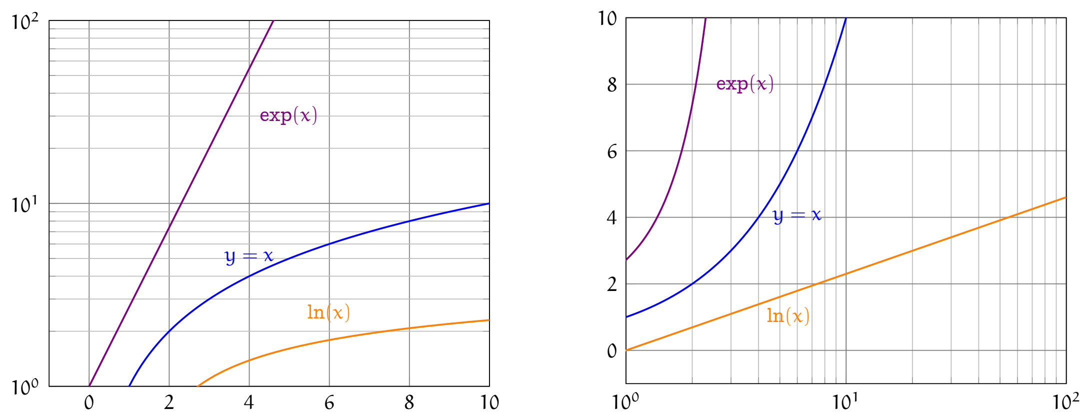
Zusammenfassend kann man sagen, dass von der Transformationsformel $g(x) = Af(Bx + C) + D$ für die Exponentialfunktion nur $g(x) = A\exp_b(Bx) + D$ interessiert und für den Logarithmus $g(x) = A\log_b(Bx + C)$. Ein Parameter ist redundant.

Anmerkung 20.1. Die transformierten Kurven sind nicht leicht auseinander zu halten. Ob Exp- oder Log-Funktion erkennt man aber an der Asymptoten, sofern auf der Darstellung erkennbar.

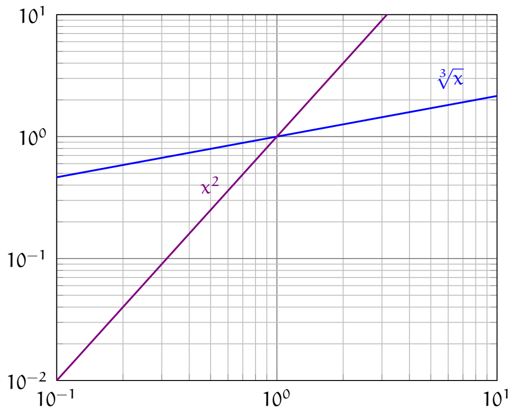
20.3.3 Spezielle Darstellungen**

Bei Funktionen mit sehr grossem Werte- oder Definitionsbereich kann es nützlich sein, den einen oder den anderen Wert oder beide zu logarithmieren. Es werden dann nicht die Punkte (x, y) aufgezeichnet sondern $(\lg(x), y)$ oder $(x, \lg(y))$.

Die früheren Papierversionen von logarithmischem Koordinatensystemen sind nun elektronisch verfügbar. Es gibt drei Versionen: (1) die senkrecht logarithmisch geteilten, (2) die waagrecht logarithmisch geteilten und (3) die doppelt logarithmisch geteilten Zeichenebenen.



In der ersten Abbildung sieht man die Kurven auf senkrecht logarithmiertem System. Eine Exponentialkurve wird dann zu einer Geraden, die Gerade zu einer Log-Funktion und die Log-Funktion noch stärker gekrümmt. Dieses Papier eignet sich für Exponentialfunktionen. Die zweite Abbildung zeigt ein waagrecht logarithmisches System, in dem die Log-Funktion zur Geraden wird und die Gerade zur Exp-Funktion. Zu guter Letzt zeigen wir noch das doppelt logarithmische System, das sich für Potenzfunktionen der Form $f(x) = Ax^b$ eignet, also $g(x) = \lg(f(x)) = b \cdot \lg(Ax) = b[\lg(x) + \lg(A)]$ darstellt.



Man beachte, dass b die Steigung der Geraden (im kartesischen System) darstellt.

20.4 Anwendungen

Das Erstaunliche an den exponentiell verlaufenden Prozessen ist der Explosionsartigkeit bei der Zunahme und der Bremswirkung bei der Abnahme. Aus

$$\exp_b(x+a) = \exp_b(a) \cdot \exp_b(x)$$

und

$$\exp_b(x+a \cdot k) = \exp_b(a)^k \cdot \exp_b(x)$$

kann man ermessen, dass der Faktor $\exp_b(a)^k$, mit $b > 1$ extrem anwächst, und mit $b < 1$ stark bremst.
Die folgenden Beispiele zeigen vor allem, wie verbreitet die exponentiellen Prozesse in Natur, Technik und Gesellschaft sind.

20.4.1 Wachstumsprozesse

Populationsdynamik

Bakterien, Pflanzen und Tiere können sich bei günstigen Bedingungen vermehren. Die Geburtenrate oder Wachstumsrate ist proportional zum Bestand. Deshalb folgt die Anzahl Elemente der Population einer Exponentialfunktion, solange genügend Ressourcen und Platz vorhanden sind. Der Prozess startet nicht bei Null, sondern sinnbildlich bei Adam und Eva. Es gilt

$$N(t) = N_0 \exp_b(ct) = N_0 \cdot b^{ct}$$

Das Wachstum wird dann gebremst, z.B. wenn die Petri-Schale voll ist, keine Nahrung mehr vorhanden ist. Es kommt zu einer Sättigung und einem neuen stabilen Punkt.

20.1 Übung Die von Seerosen bedeckte Fläche wächst um den Faktor 2 täglich. Ausgehend von einer Seerose ist nach 30 Tagen der ganze Teich bedeckt. Wir lange dauert es, bis der Teich zur Hälfte bedeckt ist? Nach 30 Tagen gilt $1 = 2^{30}P_0$, für die halbe Fläche $1/2 = 2^x P_0$. Wir dividieren die zwei Gleichungen und erhalten $\frac{0.5}{1} = \frac{2^x}{2^{30}}$, umgeformt $0.5 = 2^{x-30}$, logarithmiert und mit Potenzregel $\ln(0.5) = (x-30)\ln(2)$ und $x = \frac{\ln(0.5)}{\ln(2)} + 30$. Mit Zahlen $x = -1 + 30 = 29$. Das hätte man natürlich auch sofort wissen können, denn rückwärts betrachtet halbiert sich die Bedeckung mit jedem Tag. $\triangleleft$

Infektion

Bei Ansteckenden Krankheiten betrachtet man die sogenannte Reproduktionszahl. Sie gibt an, wie viele Menschen ein Infizierter ansteckt. Am Anfang einer Epidemie ist die Anzahl Infizierter exponentiell wachsend. Es gilt also

$$I(t) = I_0 R^t$$

Die Reproduktionsrate kann durch Massnahmen der Hygiene, der Vermeidung von Kontakten etc. verringert werden. Ist $R > 1$ dann wächst die Anzahl, ist $R < 1$, dann klingt die Infektionswelle ab.

20.2 Übung Während der Corona-Pandemie war die Reproduktionsrate anfänglich bei $R = 4$. Nehmen wir an, diese Infektionen geschehen in einem Tag. Mit 100 Infizierten geht es wielange, bis 10'000 angesteckt sind? $I(t) = I_0 4^t$ und eingesetzt $10000 = 100 \cdot 4^t$. Division durch 100 und Logarithmieren führt zu $\lg(100) = t \lg(4) = 2$ und weiter $t = \frac{2}{\lg(2)} = \frac{2}{0.3} = 6.6$. ◁

Verzinsung

Für die Überlassung von Kapital bekommt man Zinsen, die in Prozent per annum angegeben werden. Nun kann die Zinszahlung ein- oder mehrmals im Jahr erfolgen. Wir nennen die Anzahl Zahlungen pro Jahr die Frequenz h. Damit ändert sich der Wert des Kapitals gemäss

$$K(t) = K_0 \left(1 + \frac{z_h}{h}\right)^{t \cdot h}$$

Wenn man die Frequenz gegen ∞ gehen lässt, also augenblicklich verzinst, dann sieht die Formel folgendermassen aus

$$K(t) = K_0 \exp(z_\infty t)$$

Der Zinssatz ist nominal, also nicht um die Inflation, die Wertminderung korrigiert. Die Differenz zwischen nominalem Zinssatz und Inflationsrate nennt man realer Zinssatz. Dieser gibt den wirklichen Wertzuwachs wieder. In gewissen Perioden war der reale Zinssatz auch schon negativ. Anstatt z verwendet man $r = z - i$ mit i Inflationsrate.

20.3 Übung Ein junger Sparer bekommt von seinem Grossvater Fr. 100'000.– geschenkt, die er für 20 Jahre zu einem realen Zinssatz von 1.5% anlegen kann. Wie gross ist dannzumal der Wert dieses Kapitals? Wir nehme die Formel mit $h = 1$ und rechnen

$$K(20) = K_0 (1.015)^{20} = 100000 \cdot 1.35 = 135000.$$

Alternativ könnte er einen Aktienindex "kaufen", der im langfristigen Durchschnitt real 5% pro Jahr abwirft. Wie sähe sein Kapital dann aus? Es ist

$$K(20) = K_0 (1.05)^{20} = 100000 \cdot 2.65 = 265000.$$

Schon besser. ◁

Technologischer Fortschritt

20.4 Übung Das Moore'sche Gesetz besagt, dass sich die Anzahl Transistoren auf integrierten Schaltkreisen regelmässig in 18 Monaten verdoppelt. Diese Gesetzmässigkeit beobachtet man schon seit 1970 bis heute. Um welchen Faktor hat die Transistorenanzahl zwischen 1970 und 2020 zugenommen? 18 Monate sind 1.5 Jahre.

$$\frac{A(t)}{A_0} = \exp_2(t/1.5)$$

mit $t = 50$ folgt $\exp_2(50/1.5) = 2^{33.3} = 1.08 \cdot 10^{10}$. Oder 10.8 Milliarden mal. Man kann nur staunen. ◁

20.4.2 Zerfallsprozesse

Radioaktiver Zerfall

Typisch ist die Halbwertszeit. Sie ist in der Kernphysik diejenige Zeitspanne, in der die Menge eines bestimmten radioaktiven Nuklids auf die Hälfte gesunken ist, das heisst sich in andere Atome umgewandelt hat. Für jedes Nuklid ist die Halbwertszeit eine Konstante. Für Kohlenstoff 14 beträgt sie 5'730 Jahre, für Radon 3.8 Tage. Das Zerfallsgesetz lautet

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) = N_0 \cdot b^{-t}$$

Es ist λ die Zerfallskonstante mit $b = \exp(\lambda)$. Rein mathematisch betrachtet verschwindet die radioaktive Substanz nie, physikalisch ist natürlich mit der Umwandlung des letzten Atoms eine Grenze gesetzt. Oft nutzt man als Abschätzung für die Zeitdauer bis zur Bedeutungslosigkeit einer radioaktiven Strahlung die 10-fache Halbwertszeit, was einer Abnahme auf das 2^{-10}-fache entspricht.
Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ folgt aus $N(T_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0 = N_0 \exp(-\lambda T_{1/2})$. Umgeformt und nach $T_{1/2}$ aufgelöst

$$T_{1/2} = -\frac{\ln(0.5)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

oder die Zerfallskonstante λ

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$$

Entweder ist die Halbwertszeit oder die Zerfallskonstante gegeben.

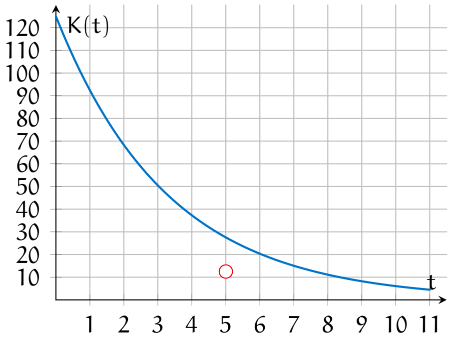
20.5 Übung Mit der Radiokarbonmethode lässt sich das Alter organischer Stoffe bestimmen. Das CO_2 in der Luft hat ein bestimmtes Verhältnis von radioaktiven Isotopen ^{14}C und nicht aktiven ^{12}C. Vom Absterben des Organismus an zerfällt der eingelagerte ^{14}C-Kohlenstoff und die Strahlung nimmt ab. Der Balken eines historischen Gebäudes hat noch 90% des ursprünglichen Gleichgewichtsanteils an ^{14}C in frischer Pflanzenmasse. Dann gilt für die verstrichene Zerfallszeit:

$$\begin{aligned}
0.9 \cdot N_0 &= N_0 \exp(-\lambda t) = N_0 \exp\Big(-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} t\Big) \\
\ln(0.9) &= -\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} t \\
t &= -\frac{T_{1/2} \ln(0.9)}{\ln(2)} \\
&= -\frac{5730(-0.105)}{0.693} \approx 870
\end{aligned}$$

Der Balken ist ca. 870 Jahre alt. ◁

Preiszerfall

Durch den technologischen Fortschritt und durch die erhöhte Produktion werden gewisse Produkte immer billiger. Festplattenspeicher kosteten 2003 rund 125 Cents pro Gigabyte, 2008 noch 12.5 und 2014 noch 4.5 Cents.



20.6 Übung Modelliere diesen Preisverlauf als Exponentialfunktion der Zeit. Wir kennen drei Punkte und müssen aber nur zwei Grössen bestimmen. Denn

$$P(t) = P_0 b^{ct} = P_0 a^t$$

Wir wählen die Zeit t vom Jahr 2003 an gerechnet. Mit dem ersten und dem letzten Punkt folgt $P_0 = P(0) = 125$. Weiter haben wir $P(11) = 125a^{11} = 4.5$. Damit ist $a = \sqrt[11]{\frac{4.5}{125}} = 0.739$. Nun zeichnen wir die Kurve und schauen, ob der mittlere Punkt einigermassen passt. Der Zerfall ist anfänglich stärker als durch die zwei Endpunkte impliziert. ◁

Ein weiteres Modell mit Zerfall ist der Automobilmarkt.

20.7 Übung Der Wert von Automobilen sinkt auch annähernd nach einem exponentiellen Zerfallsgesetz. Die Halbwertszeit beträgt rund 3 Jahre. Die Wertänderung ist im ersten Jahr am grössten. Deshalb lohnt es sich nicht, einen Neuwagen zu kaufen. Wie gross ist der Wertverlust nach einem Jahr? Wir setzen $W(t) = W_0 \exp(-\frac{\ln(2)}{3} \cdot t)$. Damit ist $W(1)/W_0 = \exp(0.231) = 0.79$. Also rund 20%. ◁

20.4.3 Logarithmische Grössen**

Reizschwelle, Lärmintensität

Der Forscher Ernst H. Weber untersuchte die Wahrnehmung von äusseren Reizen bei Personen. Beispielsweise gab er Versuchspersonen Gewichte in die Hand und liess prüfen, welche Gewichtsdifferenz festgestellt wird. Es stellt sich heraus: Bei Gewichten 20 g und 20.5 g wird kein Unterschied empfunden, bei Gewichten 20g und 21 g dagegen schon. Betrachtet man nun die Gewichte 40 g und 41 g mit Differenz 1 g, so wird kein Unterschied empfunden, bei Gewichten 40 g und 42 g dagegen schon. Beim Ausgangsgewicht 80 g muss die Gewichtsdifferenz sogar 4 g betragen, um wahrgenommen zu werden usw. Allgemein gilt: Relative Gewichtsunterschiede von 5% sind wahrnehmbar aber nicht absolute von x Gramm. Das Weber'sche Gesetz lautet: Für jede Art von Sinneswahrnehmung eines äusseren Reizes gibt es eine Konstante q, so dass eine Erhöhung der physikalischen Stärke des Reizes r erst ab einer Erhöhung um mindestens qr wahrgenommen wird. Zudem gibt es eine Schwelle $r0$ des Reizes, ab der überhaupt etwas wahrgenommen wird. Als Formel kann man schreiben für die Reizstufen n und die Empfindung $r(n)$

$$r(n) = r_0(1+q)^n$$

oder nach n aufgelöst

$$n(r) = \ln(\frac{r}{r_0})/\ln(1+q) = \frac{\ln(r) - \ln(r_0)}{\ln(1+q)}$$

mit neuen Konstanten dann

$$n(r) = A \cdot \ln(r) + B$$

Diese Formel heisst *Weber-Fechner-Gesetz*. In neuronalen Netzen, welche in der Künstlichen Intelligenz verwendet werden, benutzt man ähnliche Funktionen in den künstlichen Nervenzellen.
Ein Geräusch wird als Energie pro Zeit und Fläche gemessen, die durch eine Kugelfläche dringt. Da die Energie (theoretisch) erhalten bleibt, nimmt die Intensität mit der dritten Potenz des Abstandes ab. Denn die Kugeloberfläche ist $F = \frac{4}{3}\pi r^3$. Die Empfindung des Geräuschs oder Lärmpegel L folgt obiger Gleichung in Abhängigkeit von der Intensität I, mit spezifischen Konstanten, also

$$L(I) = 10\,\lg(I) + 120$$

Die Einheit von L ist Dezibel dB. Typische Intensitäten sind

Quelle	Intensität $[W/m^2]$
Hörschwelle	10^{-12}
Gespräch	10^{-6}
Rasenmäher	10^{-2}
Donner	1

Setzt man $I = 10^{-12}$ ein, so wird der Lärmpegel $L(10^{-12}) = 10 \cdot (-12) + 120 = 0$. Bei mehreren Lärmquellen addieren sich die Intensitäten.

Protonenkonzentration

In der Chemie kommen häufig Reaktionen von Säure und Basen in wässeriger Lösung vor. Dabei spielt der sogenannten pH-Wert eine grosser Rolle, weil er Aussagen über die Konzentration von Protonen H^+ (oder Oxonium H_3O^+) macht. Eine Reaktion einer schwachen Säure HA mit Wasser ist mit $c()$ der Konzentration:

$$HA + H_2O \quad \rightleftarrows \quad A^- + H_3O^+$$

Die Definition des pH-Wertes ist:

$$pH = -\log_{10}\left[c\left(H_3O^+\right)\,\frac{1}{\mathrm{mol}}\right]$$

Das Säurekonstante ist

$$K_S = \frac{c\left(H_3O^+\right) \cdot c\left(A^-\right)}{c\left(HA\right)}$$

Eingesetzt folgt die sogenannte Puffergleichung:

$$pH = -\log_{10}\left[\frac{K_S \cdot c\left(HA\right)}{c\left(A^-\right)}\right] = -\lg\left[K_S\right] - \lg\left[\frac{c\left(HA\right)}{c\left(A^-\right)}\right]$$

20.8 Übung Eine Lösung von einem Liter enthalte 1.6 mol Base (Natriumacetat), $c\left(A^-\right) = 1.67$ und 1.33 mol Säure (Essigsäure), also $(HA) = 1.33$. Daraus ergibt sich mit $-\lg(K_S) = 4.76$

$$pH = 4.76 + \lg(\frac{1.67}{1.33} = 4.76 + 0.10 = 4.86$$

◁

Erdbebenmagnituden

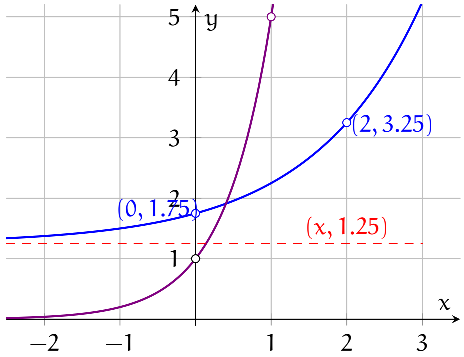
Die Magnitude, Mass für die Stärke eines Erdbebens, leitet sich aus dem dekadischen Logarithmus der maximalen Auslenkung im Seismogramm eines standardisierten Apparates ab. Die Bestimmung der Magnitude erfolgt nach folgender Beziehung:

$$M_L = \lg\left(\frac{A_{max}}{A_0}\right) = \lg\left(A_{max}\right) - \lg\left(A_0\right)$$

wobei A_{max} den maximalen Ausschlag in Mikrometer angibt. Ein Erdbeben der Magnitude 2 wird kaum wahrgenommen, 4 ist ein mittleres und 9.5 ist das stärkste je gemessene.

Aufgaben

3.1 Bestimme aus der Abbildung mit den gegebenen Angaben die zwei Exponentialfunktionen



1 Die violette Funktion hat die Asymptote $y = 0$ und die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 5)$. Die Asymptote impliziert $D = 0$. Somit ist der Ansatz $f(x) = Ab^x$ mit $Ab^0 = 1$ und $Ab^1 = 5$. Es folgt $A = 1$ und somit $5 = b^1$ und $b = 5$.
Die blaue Kurve hat die Asymptote 1.25, also $D = 1.25$. Die Funktion ist $g(x) = Ab^x + 1.25$. Es gilt $g(0) = 1.75 = A + 1.25$ oder $A = 0.5$ und $g(2) = 3.25 = Ab^2 + 1.25$ oder $2 = 0.5b^2$ sowie $4 = b^2$ und $b = 2$. Zusammen also $g(x) = 0.5 \cdot 2^x + 1.25$.

3.2 An welchen Stellen haben die $\ln(x)$ und die $\exp(x)$-Funktion die Steigung a 1 und 2?
2 Der Log hat die Steigung $1/x$. Somit ist für $a = 1$ dann $x = 1$ und für $a = 2$ folgt $1/x = 2$ woraus $x = 1/2$. Beim Exp ist die Steigung $\exp(x)$ selber, also die Stellen bei $\exp(x) = 1$ und $\exp(x) = 2$, woraus $x = \ln(1) = 0$ und $x = \ln(2) = 0.693$.

3.3 die Weltbevölkerung betrug 1927 rund 2 Milliarden Menschen, im Jahr 2023 sind es 8 Milliarden. Wie lautet die entsprechende Exponentialfunktion?

3 Wir zählen von 1927 an mit x. Es ist $B(x) = B_0 b^x$ mit $B_0 = B(0) = 2$. Zudem gilt $B(96) = B_0 b^{96} = 8$. Daraus $b = (8/2)^{1/96} = 1.0145$.

3.4 Die Milchleistung pro Kuh steigt aufgrund von Züchtungen exponentiell an. Zu Beginn der Aufzeichnungsphase im Jahr 1800 konnte man im Jahr 900 Liter pro Kuh melken, 200 Jahre später sind es 7000 Liter.

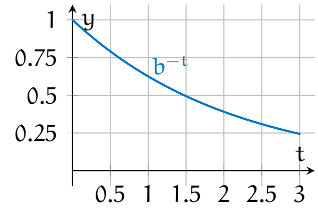
(a) Stelle eine Funktionsgleichung auf.
(b) Berechne, wie viele Liter Milch eine Kuh im Jahr 1950 gegeben hat.
(c) In welchem Jahr gab die Kuh 5000 Liter Milch?

4 **(a)** Die Wachstumsgleichung ist $M(t) = M_0 \exp_b(t)$. Es ist $M(0) = 900$ und $M(200) = 7000$. Somit folgt aus $7000 = 900 \cdot b^{200}$ dies Basis $b = (7000/900)^{1/200} = 1.01$.
(b) $M(150) = 900 \cdot 1.01^{150} = 4004$
(c) $5000 = 900 \cdot 1.01^x$ oder $\ln(50/9) = x \cdot \ln(1.01)$ und $x = \ln(50/9)/\ln(1.01) = 172$, also $1800 + 172 = 1972$.

3.5 Das Isotop von Caesium hat eine Halbwertszeit $T_{1/2}$ von 33 Jahren. 1986 ereignete sich der GAU in Tschernobyl. Dort wurden grosse Mengen von Caesium-137 freigesetzt. Wie viel Prozent dieses Cäsiums sind im Jahr 2022 noch in der Natur vorhanden?

5 Das Modell ist $N(t) = N_0 \exp(\lambda t)$ (oder auch $N(t) = N_0 a^t$). Es ist $N(33)/N(0) = a^{33} = 0.5$ und somit $a = 0.5^{1/33} = 0.98$. Nach 35 Jahren ist die Menge als Anteil von der ursprünglichen noch $n(35) = 0.98^{35} = 0.48$ oder 48%.
Alternative Rechnung: $\lambda = \ln(2)/33 = 0.021$. $n(35) = \exp(-0.021 \cdot 35) = 0.48$.

3.6 Man bestimme (Schätzung) aus der Graphik die Halbwertszeit. Dann berechne man sie mit dem Punkt $(2, 0.39)$.



6 Der Funktionswert muss sich in dieser Zeitspanne halbieren, z.B. von 1 auf 0.5 oder von 0.5 auf 0.25. Also kann man die Punkte $(0, 1)$ und $(T_{1/2}, 0.5)$ heranziehen. Aus dem Diagramm folgt $T_{1/2} \approx 1.5$ Zeiteinheiten.
Mit dem exakten Punkt $(2, 0.39)$ folgt $0.39 = 1 \cdot b^2$ und $b = \sqrt{0.39} = 0.624$. Nun ist $0.5 = b^{T_{1/2}}$ und $T_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(b)} = 1.47$.

3.7 Ein Prozess nähert sich von unten exponentiell an die Asymptote $y = 1$ für $x \to \infty$ an. Wie sieht eine solche Funktionsgleichung aus?

7 Wegen der Asymptote nach rechts muss b kleiner als 1 sein (oder der Exponent negativ). Mit $b < 1$ und $a > 1$ folgt $g(x) = -b^x + 1 = -a^{-x} + 1$. Das Minuszeichen bedeutet eine Spiegelung an der x-Achse. Denn die Kurve soll von unten, also von kleineren y-Werten her kommen.

3.8 Beim exponentiellen Wachstum einer Grösse nimmt diese jedes Jahr immer wieder um p % zu. Berechnen Sie, für ein allgemeines p exakt, sowie numerisch und sinnvoll gerundet für p % = 5 %, den Wert der Verdoppelungszeit T_2 , also derjenigen Zeit, die vergehen muss, bis sich der Wert dieser Grösse jeweils wiederum verdoppelt hat. [40‰]

8 Es ist $f(x) = (1 + p)^x$. Die Verdoppelung heisst $f(x)/f(0) = 2 = (1 + p)^x$. Damit folgt $\ln(2) = x \cdot \ln(1 + p)$ und weiter $x = T_2 = \ln(2)/\ln(1 + p)$. Mit $p = 0.05$ folgt $T_2 = \frac{0.693}{0.0488} = 14.21$.

3.9 Wiederholungsaufgabe: Lösen Sie die Gleichung $3 \cdot \log_x(3) + \log_x(3x) = 2$ nach x auf. [40‰]

9 Wir fassen zusammen $3 \cdot \log_x(3) + \log_x(3x) = \log_x(27) + \log_x(3x) = \log_x(81x) = 2$. Somit $\exp_x(\log_x(81x)) = \exp_x(2) = x^2 = 81x$ und $x = 81$.

3.10 Der Lärmpegel L ist eine Funktion der Lärmintensität I gemäss $L(I) = 10\lg(I) + 120$. Lärmintensitäten addieren sich. In einem Raum hat es eine Schreibmaschine mit Lärmpegel $L_1 = 68$dB, zwei sprechende Personen mit je $L_2 = 60$dB und Strassenlärm durchs offenen Fenster $L_3 = 57$dB. Was ist der Gesamtlärmpegel?

10 Aus der Formel folgt die Inverse $I = \exp_{10}[\frac{1}{10}(L - 120)] = \exp_{10}(-12)[\exp_{10}(L/10)]$. Summiert $I = I_1 + 2I_2 + I_3 = 10^{-12}[10^{L_1/10} + 2 \cdot 10^{L_2/10} + 10^{L_3/10}] = 10^{-12}[10^{6.8} + 2 \cdot 10^{6.0} + 10^{5.7}] = 8.81 \cdot 10^{-6}$. Damit $L = 10\lg(8.81 \cdot 10^{-6}) + 120 = -10 \cdot 5.05 + 120 = 69.45$.

3.11 ** Eine Faustformel lautet: Eine Grösse verdoppelt sich bei einer Wachstumsrate von x% in $70/x$ Jahren. Ein Wachstum von 10% beispielsweise bedeutet eine Verdoppelung in 7 Jahren. Kannst Du den Hintergrund erläutern? Tip: es ist $\ln(1 + x) \approx x$ für $x << 1$.

11 Eine Verdoppelung bedeutet $2 = (1 + p)^x$. Nach x aufgelöst $\ln(2) = x\ln(1 + p) \approx x \cdot p$. Nun ist $\ln(2) = 0.693 \approx 0.7$. Damit folgt $x = \frac{0.7}{p} = \frac{70}{p\%}$.

Kapitel 21

Trigonometrie

Die Trigonometrischen Funktionen haben ihren Ursprung bei den Überlegungen zum Dreieck. Sie bilden eine Brücke zwischen Geometrie und Algebra sowie Analysis. Dieses Kapitel wird deshalb nicht ganz zur Logik des bisherige Aufbaus des Buches passen, wo wir Gleichungen und Funktionen auseinander gehalten haben. Hier werden die drei besagten Gebiete von Geometrie (Grundlage), Analysis (Funktionen) und Algebra (Gleichungen) zusammen besprochen. Die bis hierhin besprochenen Elemenatrfunktionen entsprechen den Operationen der vier Stufen. Nun gehen wir darüber hinaus zu sogenannten transzendenten Funktionen. Wir erwähnen kurz die Tatsache, dass ein Dreieck nicht nur drei Ecken sondern auch drei Seiten und drei Winkel aufweist. Das Wort *trigonos* heisst auf Griechisch drei Winkel. Wesentliche Grundlage für die Berechnungen am Dreieck sind die Voraussetzungen für die Bestimmung eines Dreiecks: Ein Dreieck ist bestimmt, wenn

(1) zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel (SWS),

(2) eine Seite und die zwei anliegenden Winkel (WSW),

(3) alle drei Seiten (SSS) und

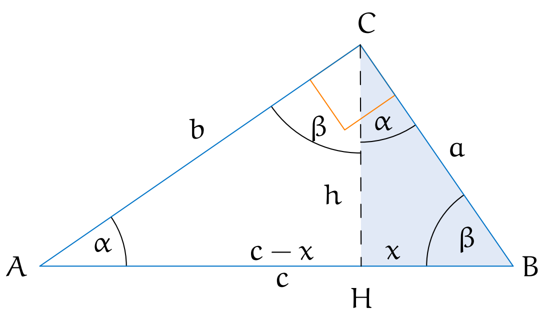
(4) zwei Seiten und einen der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel bekannt sind (SSW').

Daraus lassen sich Beziehungen zwischen Seiten und Winkel herstellen. Wenn also entweder drei Seiten oder zwei Seiten und ein Winkel äquivalent sind, muss es eine feste Beziehung zwischen dem Winkel und der fehlenden Seite geben.

21.1 Rechtwinkliges Dreieck, Kreisfunktionen

Das rechtwinklige Dreieck ist bekannt. Die Seiten haben spezielle Namen.

Definition 39. Ein *rechtwinkliges Dreieck* ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel. Die Schenkel, die den rechten Winkel bilden, nennt man *Katheten.* Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist die *Hypotenuse*.



Wir wissen, dass die Höhenlinie auf der Hypotenuse mit dem Fusspunkt H das rechtwinklige Dreieck in zwei weitere Dreiecke aufteilt, die alle ähnlich sind. Es gilt $\triangle ABC \sim \triangle CHB \sim \triangle AHC$. Damit sind die Verhältnisse zwischen den Seiten proportional. Z.B. den spitzen Winkel α einschliessend:

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{c-x}{b}$$

oder für β

$$\frac{x}{a} = \frac{h}{b} = \frac{a}{c}$$

Diese Verhältniszahlen haben spezielle Namen.

Definition 40. Die *Kreisfunktionen Sinus*, *Kosinus*, *Tangens* und *Kotangens* sind definiert als:

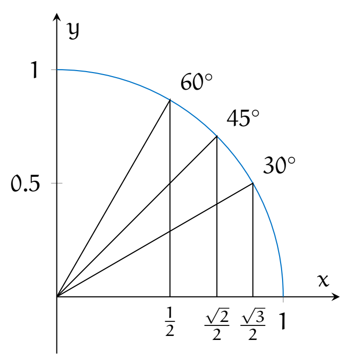
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha} = \frac{b}{a}$$

Anmerkung 21.1. Es gibt eigentlich 6 Funktionen, doch zwei davon sind nicht üblich, die Sekans- und Kosekans-Funktion. Sie sind einfach der Kehrwert von Kosinus und Sinus. Den Kotangens könnte man deshalb auch weglassen, denn er ist der Kehrwert des Tangens.



Einige Werte der Sinus- und Kosinusfunktion kennen wir. Am besten erkennt man diese speziellen Werte am Einheitskreis, wo der Radius 1 beträgt. Wir betrachten das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit 45° Basiswinkel. Wenn die Hypotenuse 1 lang ist, dann sind die Seiten $\sqrt{2}/2$ lang. Das zeigt der Satz vom Pythagoras augenblicklich. Sodann kennen wir die Höhe im gleichseitigen Dreieck, das aus zwei rechtwinkligen mit spitzen Winkeln 30 und 60 Grad besteht. Mit dem Pythagoras haben wir mehrmals die Höhe zu $\sqrt{3}/2$ bestimmt. Damit lässt sich schon mal diese kleine Tabelle anfertigen

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$0°$	1	0	$-$	$-$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	1	0	$-$	$-$

Beim Tangens und Kotangens steht eine Kathete im Nenner, die null werden kann. Dort sind die Funktionswerte nicht definiert.
Wir haben oben schon aus der Ähnlichkeit geschlossen, dass z.B. $\frac{b}{c} = \frac{h}{a}$ ist. Mit der Definition folgt $\frac{b}{c} = \cos(\alpha) = \frac{h}{a} = \sin(\beta)$. Da $\alpha + \beta = 90°$ ist, folgt

$$\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$$

Satz 21.2. Es gilt für den spitzen Winkel $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$:

$$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha) \qquad \cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$$
$$\tan(\alpha) = \cot(90° - \alpha) \qquad \cot(\alpha) = \tan(90° - \alpha)$$

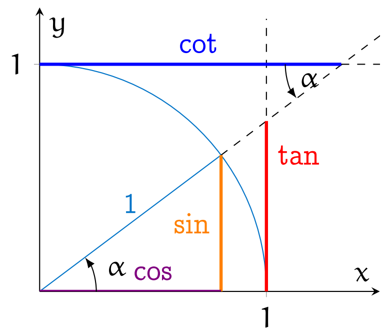


Abbildung 21.1

Die Winkelfunktionen kann man auch graphisch darstellen, und zwar mithilfe des Einheitskreises. Sinus und Kosinus sind die Koordinaten des Punktes zum entsprechenden Winkel α. Auf den Tangenten befinden sich Tangens und Kotangens, und zwar als y-Koordinate des Schnittpunkts des Strahls mit der vertikalen Tangente für den Tangens und als x-Koordinate des Schnittpunkts des Strahls mit der horizontalen Tangente in Punkt $(0, 1)$. Man erkennt auch, dass bei grossen Winkeln der Tangens grösser wird als der Kotangens. Bei $\alpha = 45°$ sind sie gleichgross. Die Erklärung sind denkbar einfach: Aufgrund der Definitionen gilt für Tangens und Kotangens:

Formel 21.3.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \text{und} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Die Darstellung zeigt die Steigung $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{\tan(\alpha)}{1}$. Anderseits sieht man die Steigung $\dfrac{1}{\cot(\alpha)} = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ am Wechselwinkel. Fazit: Man kann die Kreisfunktionen auch visualisieren und messen.
In der Abbildung erkennt man noch eine weitere interessante Tatsache: Wenn man den Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 1 und den Katheten $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ bildet, so muss gelten:

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

Dies ist auch analytisch einsehbar, wenn wir die Definitionen heranziehen, also $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ und $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ und die Quadrate addieren. Dann folgt

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

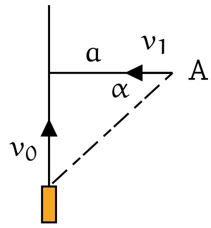
wie gehabt.

Formel 21.4. Es gilt

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

Anmerkung 21.5. Diese Formel kann man auch als Paramterdarstellung des Kreises mit Radius 1 verstehen. Denn aus der Abbildung 21.1 sieht man den Punkt, der die Koordinaten $(x = \cos(\alpha), y = \sin(\alpha))$ aufweist. Der Kreis besteht aus den Punkten (x, y), die den Kreis $y^2 + x^2 = 1$ bilden. α ist der Parameter.

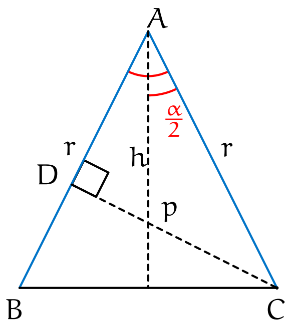
Anmerkung 21.6. Bei den trigonometrischen Funktionen kann man Potenzen auf verschieden Arten notieren. Beispielsweise $\sin^2(x) = \sin(x)^2$.

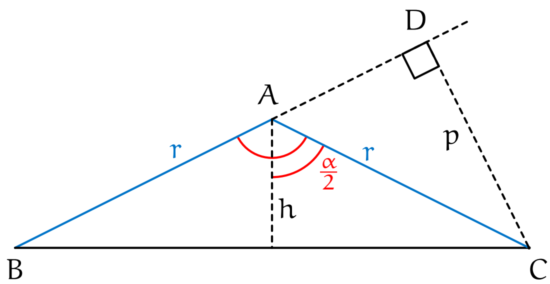


21.7 Übung Schüler A wohnt senkrecht zur geraden Strasse im Abstand a. Allmorgentlich nimmt er den Bus, der mit der mittleren Geschwindigkeit von v_0 sich der Haltestelle an der Kreuzung nähert. A kann mit der Geschwindigkeit v_1 rennen. Unter welchem Winkel (Kreisfunktion angeben) muss er den Bus sehen, um noch rechtzeitig an der Haltestelle zu sein? A braucht $t = a/v_1$ für die Strecke. In dieser Zeit fährt der Bus $s = v_0 \cdot t = v_0 \cdot \frac{a}{v_1}$. Das Verhältnis $\frac{s}{a}$ ist der $\tan(\alpha)$. Somit folgt $\tan(\alpha) = \frac{s}{a} = \frac{v_0 \cdot a}{v_1 \cdot a} = \frac{v_0}{v_1}$. ◁

21.1.1 Erweiterung auf stumpfe Winkel

Wir haben in der Definition gefordert, dass der Winkel α spitz sein soll, d.h. zwischen 0 und 90° liegen muss. Anhand der Flächenberechnung der gleichschenkligen Dreiecke wollen wird auch stumpfe Winkel betrachten.





Die Fläche der Dreiecke lässt sich hier, mit den gegebenen Grössen, auf zwei Arten berechnen. Entweder über die Höhen p mal ihre Grundlinie r, halbiert. Oder mit dem halben Winkel $\alpha/2$ als halbe Strecke $\overline{BC}/2 = \sin(\alpha/2) \cdot r$ mal Höhe h. Die Höhe ist aber $h = \cos(\alpha/2)r$. Somit folgt für die Fläche beider Dreiecke:

$$F = \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) \cdot r^2$$

Ebenso gilt für beide Dreiecke

$$F = \frac{1}{2}p \cdot r$$

Für das gleichschenklige Dreieck mit spitzem Winkel folgt:

$$p = \sin(\alpha) \cdot r$$

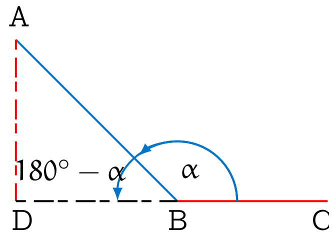
und für das stumpfe Dreieck aber

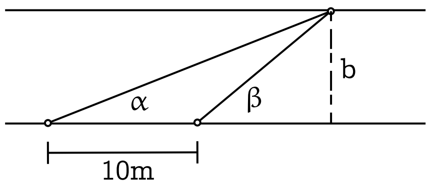
$$p = \sin(180° - \alpha) \cdot r$$

Die Figur zeigt den stumpfen Winkel α und dessen Nebenwinkel oder Komplementärwinkel $180° - \alpha$. Es gilt allgemein:

$$\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha).$$

In der Abbildung sieht man, dass der Sinus das Verhältnis der roten Strecken $\overline{BC}$ ist. Beim stumpfen Winkel liegt die Gegenkathete $\overline{AD}$ ausserhalb des Dreiecks.





21.8 Übung Wie bestimmen die Flussbreite mit zwei Winkeln und einer Länge. Die Kathete bei β nennen wir a. Es ist $\tan(\alpha) = \frac{b}{a+10}$ und $\tan\beta = \frac{b}{a}$. Wir eliminiere a aus den Gleichungen und erhalten $a = \frac{b}{\tan(\beta)}$ und damit

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{10 + \frac{b}{\tan(\beta)}} = \frac{b\tan(\beta)}{10\tan(\beta) + b}$$

Weiter umgeformt folgt

$$\tan(\alpha)(10\tan(\beta) + b) = b\tan(\beta) \qquad \Leftrightarrow \qquad 10\tan(\alpha)\tan(\beta) = b(\tan(\beta) - \tan(\alpha))$$

und endlich

$$b = 10\frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$$

Mit $\alpha = 30°$ und $\beta = 45°$ folgt $\tan(\alpha) = \sqrt{3}/3$ und $\tan(\beta) = 1$:

$$b = 10\frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 10\frac{1}{\sqrt{3} - 1} \approx 13.66$$

$\triangleleft$

21.2 Allgemeines Dreieck

Wir lassen die Restriktion des einen rechten Winkels fallen und betrachen die allgemeine Form eines Dreiecks.

21.2.1 Sinussatz

Satz 21.1. Sinussatz In jedem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten zueinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel:

$$a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$$

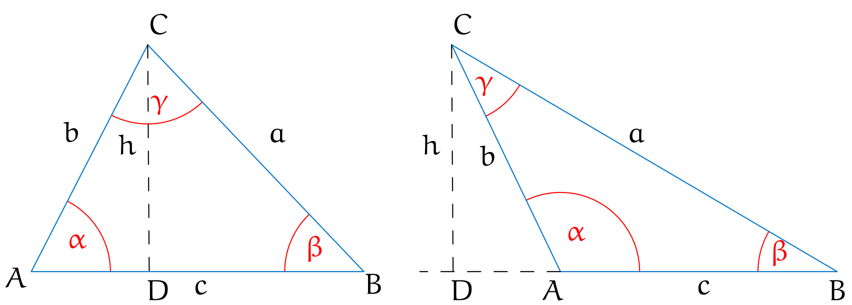


Abbildung 21.2

Dieser Satz wird anschaulich, wenn man eine Höhe einzeichnet, die das Dreieck in zwei rechtwinklige zerteilt. Nun kann man, auch unter Verwendung des Sinus des Komplementärwinkels die Definition des Sinus ansetzen, z.B.

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \qquad \text{und} \qquad \sin(\beta) = \frac{h}{a}$$

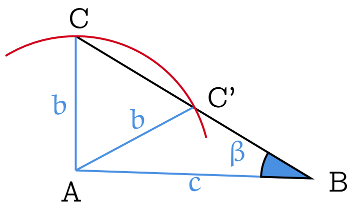
Damit folgt aufgrund der Gleichheit von h:

$$\sin(\alpha)\cdot b = \sin(\beta)\cdot a \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}.$$

Mit den Höhen auf b und a folgen die anderen Beziehungen. Wir greifen in den Übungen etwas vor: Vom $\sin(\alpha)$ gelangt man zu α mit der inversen Funktion auf dem Taschenrechner, Taste SIN^{-1}, COS^{-1} etc.

21.2 Übung Gegeben ist bei einem Dreieck die Seite $a = 2$ und die Winkel $\alpha = 42°$ und $\beta = 72°$. Wir bestimmen alle Seiten und Winkel. $\gamma = 180 - 42 - 72 = 66$. Die Seiten sind mit $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ dann $b = a\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 2\frac{0.9511}{0.6691} = 2.8427$. Analog $c = 2\frac{0.9135}{0.6691} = 1.3653$. ◁

21.3 Übung Man bestimme die fehlenden Grössen aus $\beta = 31°$, $a = 3.6$ und $b = 5.9$. Es folgt $\sin(\alpha) = \sin\beta\frac{a}{b} = 0.3143$. (Daraus folgt $\alpha = 18.32°$ und somit $\gamma = 180 - 31 - 18.32 =$ und die Seite $c = 130.68$.) Damit ist $c = a\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 3.6\frac{0.7584}{0.5150} = 5.30$. ◁



21.4 Übung Es ist gegeben: die Seiten $b = 2$ und $c = 4$ und der Winkel $\beta = 25°$. Man bestimme die fehlenden Grössen. Man erinnere sich der Liste ganz am Anfang des Kapitels. Keine der vier Bedingungen ist erfüllt, insbesondere ist nicht der Winkel gegenüber der grösseren Seite gegeben. Somit ist das Dreieck nicht eindeutig bestimmt. Es gibt zwei mögliche Dreiecke. Wir bestimme $\sin(\gamma) = c\frac{\sin(\beta)}{b} = 4\frac{0.4226}{2} = 0.8452$ daraus mit dem Taschenrechner $\gamma_1 = 57.70°$. Der zweite Winkel ist $\gamma_2 = 180 - \gamma_1 = 122.30$. Der Suplementärwinkel γ_2 ist der der gestreckte minus den Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkellänge b. Somit gibt es auch zwei Winkel α, nämlich $\alpha_1 = 180 - 25 - 57.70 = 97.30$ und $\alpha_2 = 180 - 25 - 122.30 = 32.70$. ◁

21.2.2 Kosinussatz

Wir betrachten ein Dreieck, das durch zwei Seiten und ihren Zwischenwinkel festgelegt ist. Nun fragen wir danach, wie sich die Gegenseite bestimmen lässt. Weil das Dreieck definiert ist, muss es berechenbar sein. Dazu zeichnen wir die Höhe h ein, welche die Hypotenuse in zwei Abschnitte p und q teilt. Nun haben wir zwei rechtwinklige Dreiecke. Wir bestimmen mit dem Pythagoras zweimal die Höhe h, oder besser deren Quadrat, wobei $q = c - p$ ist

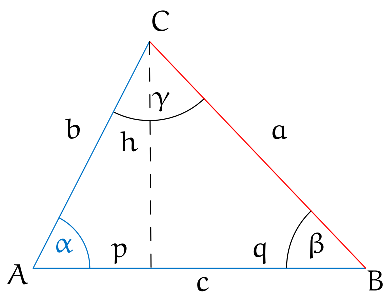


Abbildung 21.3

$$h^2 = b^2 - p^2 = a^2 - q^2 = a^2 - (c-p)^2 = a^2 - c^2 + 2pc - p^2$$

Es folgt daraus

$$b^2 - p^2 = a^2 - c^2 + 2pc - p^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad b^2 + c^2 - a^2 = 2pc \qquad \Leftrightarrow \qquad p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Mit der Definition findet man $p = b\cos(\alpha)$. Somit

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{21.1}$$

oder in Anlehnung an den Pythagoras nach a^2 aufgelöst

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Satz 21.5. Kosinussatz In einem beliebigen Dreieck gilt für die Gegenseite a der zwei Seiten b und c, welchen den Winkel α einschliessen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$$

Anmerkung 21.6. Man nennt diese Formel auch den allgemeinen Pythagoras, denn für $\alpha = 90°$ folgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = b^2 + c^2$.

Wir betrachten die Gleichung 21.1 noch etwas näher. Wir haben die Fälle $b^2 + c^2 > a^2$ und damit $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Das ist der bekannte Fall, bei dem $\cos(\alpha) > 0$ ist. Neu ist der Fall, wonach $b^2 + c^2 < a^2$ oder $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Wir müssen uns mit der Interpretation von $\cos(\alpha) < 0$ auseinander setzten.
Wir betrachten Abbildung 21.2 und erkennen die zwei Fälle, nämlich den spitzen Winkel α für $b^2 + c^2 > a^2$ und den stumpfen für $b^2 + c^2 < a^2$. Beim stumpfen ist also der Kosinus negativ.

Anmerkung 21.7. Mit dem Kosinussatz, in der Form der Gleichung 21.1, kann man aus allen drei gegebenen Seiten alle Winkel bestimmen. Ein Dreieck ist ja durch drei Seiten eindeutig festgelegt. Drei Winkel sind aber nicht ausreichend.

21.8 Übung Es sind die drei Seiten $a = 13$, $b = 10$ und $c = 7$ gegeben. Man bestimmt die Winkel (genauer die Kosinus der Winkel).

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100 + 49 - 169}{140} = \frac{-20}{140} = -0.143 \\
\cos(\beta) &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 169 - 100}{182} = \frac{118}{182} = 0.648 \\
\cos(\gamma) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{169 + 100 - 49}{260} = \frac{220}{260} = 0.846
\end{aligned}$$

Es handelt sich um ein stumpfes Dreieck mit a als längster Seite. ◁

Heron'sche Formel

Wir suchen eine Formel für die Fläche eines Dreiecks, bei welchem die drei Seiten bekannt sind. (Sind die Seiten bekannt, so sind auch die Winkel bekannt.) Wir betrachten Abbildung 21.2.2 und nehmen nochmals die Formel für den Seitenabschnitt p zur Hand:

$$p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Die (unbekannte) Höhe ist $h^2 = b^2 - p^2 = (b-p)(b+p)$, die Fläche $F = h \cdot c\frac{1}{2}$. Wir berechnen für die Höhe:

$$\begin{aligned}
h^2 &= \Big(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\Big)\Big(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\Big) \\
&= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}\,\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \\
&= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c}\,\frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \\
&= \frac{(a-(b-c))(a+(b-c))}{2c}\,\frac{((b+c)-a)((b+c)+a)}{2c} \\
&= \frac{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2}
\end{aligned}$$

und somit

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}$$

und die Fläche $F = hc\frac{1}{2}$

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}.$$

Nun kann man diese Form praktischer gestalten, indem man die Summe s einführt als $s = a + b + c$. Damit

$$\begin{aligned}
a + c - b &= s - 2b \\
a + b - c &= s - 2c \\
b + c - a &= s - 2a
\end{aligned}$$

Eingesetzt

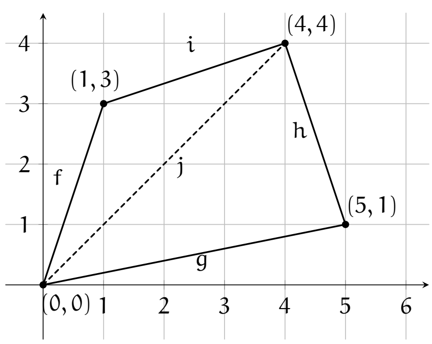
$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(s-2b)(s-2c)(s-2a)s}.$$

oder

$$F = \sqrt{(\frac{s}{2} - b)(\frac{s}{2} - c)(\frac{s}{2} - a)\frac{s}{2}}.$$

Diese Formel wird Heron von Alexandria im ersten Jahrhundert zugeschrieben. Wie man sieht, kann man mit den Seiten alleine die Fläche eines beliebigen Dreiecks bestimmen.

21.9 Übung Ein Grundstück ist durch vier Grenzpunkte (siehe Abbildung) festgelegt, man bestimme die Fläche. Wir teilen das Viereck in zwei Dreiecke auf. In der kartesischen Zeicheneben werden die Distanzen mit dem Pythagoras bestimmt. Die fünf Strecken sind:



$$i = \sqrt{10} \qquad f = \sqrt{10} \qquad j = \sqrt{32}$$
$$h = \sqrt{10} \qquad g = \sqrt{26}$$

Nun berechnen wir die zwei Summen $s_1 = 2\sqrt{10} + \sqrt{32} = 11.98 = 2 \cdot 5.99$ und $s_2 = \sqrt{10} + \sqrt{26} + \sqrt{32} = 13.92 = 2 \cdot 6.96$. In die Formel eingesetzt

$$F_1 = \sqrt{(5.99-\sqrt{10})(5.99-\sqrt{10})(5.99-\sqrt{32})5.99} = 4$$
$$F_2 = \sqrt{(6.916-\sqrt{10})(6.96-\sqrt{26})(6.96-\sqrt{32})6.96} = 8$$

Die gesamte Fläche ist $F = F_1 + F_2 = 4 + 8 = 12$.

$\triangleleft$

21.10 Übung ** Wir bestimmen die Fläche mit dem merkwürdigen *Satz von Pick*. Danach ist die Fläche in einem geschlossenen Polygonzug auf einem Gitter gleich der Anzahl Gitterpunkte im Innern plus die halbe Anzahl Gitterpunkte auf dem Rand minus 1. Hier $I = 11$, $R = 4$. Damit folgt $F = 11 + 4/2 - 1 = 11 + 2 - 1 = 12$. $\triangleleft$

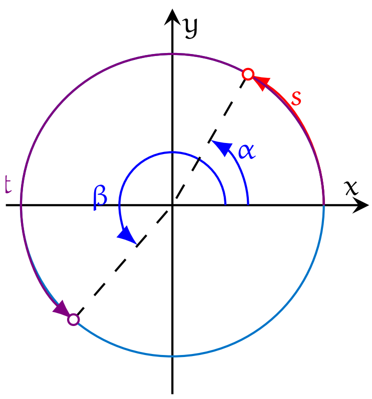
21.11 Rezept Bestimmung Dreieck Vervollständigen von Seiten und Winkeln

- SSS $\longrightarrow$ Kosinussatz,
- SWS $\longrightarrow$ Kosinussatz dann Sinussatz,
- WSW $\longrightarrow$ Winkelsumme, Sinussatz und
- SSW $\longrightarrow$ Sinussatz.

21.3 Goniometrie, Additionstheoreme

21.3.1 Das Bogenmass

Winkel werden seit Alters im Sexagesmimalsystem gemessen, wobei eine ganze Umdrehung 360° bedeutet. Dies ist eine Konvention, die auch anders lauten könnte. Franzosen wollten 400 anstatt 360 einführen. In der Artillerie wurde ein volle Umdrehung mit 6400 Artilleriepromillen festgelegt. In Filmen kann man hören: “Feind auf 11 Uhr”.



Da der Winkel einfach eine Zahl ist, gibt man ihr das Gradzeichen bei, um es von anderen Zahlen zu unterscheiden. Eine andere Winkelbezeichnung ist das *Bogenmass*, bei welchem man für den Winkel die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis angibt. Auf Rechnern steht dann RAD für Radianten.
Die Bogenlänge ist ein Teil des Kreisumfangs u und $s = \alpha\frac{u}{360^\circ} = \alpha \cdot \frac{2\pi \cdot r}{360}$ und am Einheitskreis, wo $r = 1$ gilt somit mit α in Grad

$$s = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Dieser Zusammenhang ist eine lineare-homogene Funktion oder auch Proportionalität genannt: $s \sim \alpha$. Jeder Punkt auf dem Einheitskreis (x, y) ist durch α oder s eindeutig bestimmt. Es ist also $(x(s), y(s))$ eine Parameterdarstellung des Einheitskreises mit der Bogenlänge als Parameter.

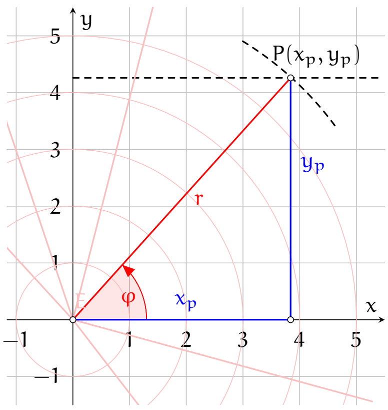
Definition 41. Den Wert $s = \alpha \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ}$ bezeichnet man als *Bogenmass* des Winkels α und schreibt $\operatorname{arc}(\alpha) = s$ und $\operatorname{ang}(s) = \alpha$.

Da π eine irrationale Zahl ist, sind die üblichen Winkel wie 30° oder 60° im Bogenmass ebenfalls irrationale Zahlen, die somit aus praktischen Gründen dann gerundet werden müssen. Ausgezeichnete Winkel sind im Bogenmass rationale Streckfaktoren von π, also $\pi/4$ oder $\pi/6$ etc.

21.1 Übung Wir bestimmen die Bogenmasse von 15°, 30° und 60°. Mit der Formel folgt $\operatorname{arc}(15) = \frac{15}{180}\pi = \frac{\pi}{12}$; $\operatorname{arc}(30) = \frac{30}{180}\pi = \frac{\pi}{6} = 0.5236$ und $\operatorname{arc}(60) = \frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3} = 1.0472\ldots$ $\triangleleft$

21.3.2 Polarkoordinaten

Wie haben bis jetzt mit den kartesischen Koordinaten gerechnet. Diese zeichnen sich durch zwei zueinander senkrechte Richtungen samt Zahlenstrahlen aus, die im Ursprung entspringen. Jeder Punkt der Ebene, die aus vier Quadranten besteht, ist durch zwei Koordinatenangaben eindeutig festgelegt. Nun kann man einen Punkt der Ebene auch anders eindeutig festlegen.



Eine Alternative ist die Angaben von Winkel, der von der Horizontalen nach rechts gemessen wird, und dem Abstand vom Ursprung. Den Winkel nennen wir α und den Abstand r, weil der geometrische Ort aller Punkte mit Abstand r einen Kreis bilden und somit r für Radius steht. Jeder Punkt der Ebene (x_P, y_P) liegt auf einem Nullstrahl und einem Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung. Nur der Mittelpunkt liegt auf allen Strahlen.
Nun ist klar, dass wenn man einen Punkt eindeutig durch zwei Systeme festlegen kann, man eindeutig vom einen System zum anderen wechseln können muss.

Definition 42. *Nullpunktabstand* r und *Polarwinkel* φ bezeichnet man als *Polarkoordinaten*.

Die Umrechnung erfolgt mit den Definitionen der Kreisfunktionen.

Satz 21.2. Für einen Punkt $P = (x, y) = (r, \varphi)$ gilt die Umrechnung

$$x = \cos(\varphi) \cdot r \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \sin(\varphi) \cdot r \qquad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

Anmerkung 21.3. Wie wir aus $\tan(x)$ dann x bestimmen, erfahren wir bei der Einführung der Inversen der Kreisfunktionen.

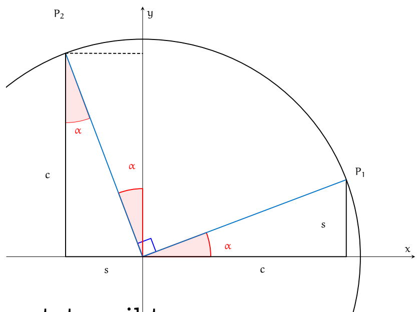
21.3.3 Symmetrie

Wir fassen die Erkenntnisse bezüglich de Eigenschaften, die wir aus der Geometrie hergeleitet haben zusammen.

Eigenschaften 21.4. Symmetrie von Kreisfunktionen: Nebenwinkel

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \sin(180^\circ - \alpha)\\
\cos(\alpha) &= -\cos(180^\circ - \alpha)\\
\tan(\alpha) &= -\tan(180^\circ - \alpha)\\
\cot(\alpha) &= -\cot(180^\circ - \alpha)
\end{aligned}$$

In der Abbildung sieht man einen Punkt P_1 auf dem Einheitskreis, der um 90° weitergedreht wird und so im Punkt P_2 zu liegen kommmt. Man erkennt unschwer, dass die Koordinaten unter Wahrung des Vorzeichens folgenden Zusammenhang aufweisen:



$$P_1 = (x_1, y_1) \qquad \text{und} \qquad P_2 = (x_2, y_2) = (-y_1, x_1)$$

Die kartesischen Koordinaten durch die Kreisfunktionen ersetzt ergibt

$$x_2 = -y_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin(\alpha)$$

und

$$y_2 = x_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha)$$

Formel 21.5. Symmetrie von Kreisfunktionen: Lote

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + 90^\circ) &= \cos(\alpha)\\
\cos(\alpha + 90^\circ) &= -\sin(\alpha)\\
\tan(\alpha + 90^\circ) &= -\cot(\alpha)
\end{aligned}$$

21.3.4 Periodizität

Am Einheitskreis können wir sehen, dass die Punkte $(\cos(s), \sin(s))$ von der Bogenlänge s parametrisiert werden und dass jeder Punkt mit einer Umdrehung von $s = 2\pi$ wieder derselbe ist. Es gilt also gemäss $f(s) = f(s + p)$ für $p \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{trg}(s) = \operatorname{trg}(s + k \cdot 2\pi)$$

Da der Tangens ein Verhältnis von Sinus und Kosinus ist, und dieses im ersten und dritten, bzw. im zweiten und vierten Quadranten gleich ist, folgt für den Tangens zusätzlich die Periode π. Somit gilt:

Formel 21.6. Periode Kreisfunktionen Mit $k \in \mathbb{Z}$, eine ganze Zahl ist

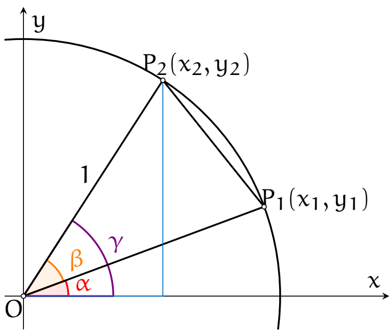
$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)\\
\cos(\alpha) &= \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)\\
\tan(\alpha) &= \tan(\alpha + k \cdot \pi)
\end{aligned}$$

Der Kotangens verhält sich wie der Tangens, es ist ja der reziproke Wert. Den Wert des Winkels α, der im Intervall $[0, 2\pi]$ resp. für den Tangens in $[0, \pi]$ liegt, nennt man *Hauptwert*.

21.7 Übung Man bestimme den Hauptwert von $\sin(\alpha)$ mit $\alpha = 121\pi + 0.5$ und $\tan(\beta)$ mit $\beta = 1021$. Es ist $\alpha = 121\pi + 0.5 = 0.5 + \pi + 60 \cdot 2\pi = A + k \cdot 2\pi$ und $A = 0.5 + \pi$. Für $\beta = 1021 = 651.90\pi = 651\pi + 0.9\pi = B + k \cdot \pi$ damit der Hauptwert $B = 0.90 \cdot \pi/2 = 1.413$. $\triangleleft$

21.3.5 Additionstheoreme

Sinus und Kosinus



Wir betrachten zwei Punkte auf dem Einheitskreis mit $r = 1$. Sie haben die Koordinaten (x_1, y_1) mit dem Winkel α und (x_2, y_2) mit dem Winkel γ

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = \begin{cases} r^2 + r^2 + 2r^2\cos(\beta) & \text{Kosinussatz} \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 & \text{Distanzformel} \end{cases}$$

Den zweiten Term entwickeln

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2)$$

Nun wissen wir, dass $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ und $x_2^2 + y_2^2 = r^2$. Damit

$$2r^2 + 2r^2\cos(\beta) = 2r^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(\beta) = -\frac{x_1x_2 + 2y_1y_2}{r^2}$$

Nun kennen wir die Ausdrücke

$$\frac{x_1}{r} = \cos(\alpha), \qquad \frac{x_2}{r} = \cos(\gamma), \qquad \frac{y_1}{r} = \sin(\alpha), \qquad \frac{y_2}{r} = \sin(\gamma)$$

Unter Berücksichtigung von $\cos(\beta) = \cos(-\beta)$ können wir also schreiben

$$\cos(\gamma - \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)$$

Da dies eine ganz allgemeine Formel ist, können wir ohne Restriktionen auch $\alpha = -\vartheta$ setzen und mit $\sin(-\vartheta) = -\sin(\vartheta)$ folgt unverzüglich

$$\cos(\gamma + \vartheta) = \cos(\vartheta)\cos(\gamma) - \sin(\vartheta)\sin(\gamma)$$

Nun kann man α durch $90° - \vartheta$ ersetzen und erhält

$$\begin{aligned} \cos(\gamma - 90° + \vartheta) = \sin(\gamma + \vartheta) &= \cos(\gamma - 90°)\cos(\vartheta) - \sin(\gamma - 90°)\sin(\vartheta) \\ &= \sin(\gamma)\cos(\vartheta) + \cos(\gamma)\sin(\vartheta) \end{aligned}$$

Das war der dritte Ausdruck. Nun folgt noch mit $\alpha = -\vartheta$:

$$\begin{aligned} \sin(\gamma - \alpha) &= \sin(\gamma)\cos(-\alpha) + \cos(\gamma)\sin(-\alpha) \\ &= \sin(\gamma)\cos(\alpha) - \cos(\gamma)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Zusammengefasst folgt folgende Tabelle.

Eigenschaften 21.8. Additionstheoreme des Sinus/Kosinus Für zwei beliebige Winkel α und β gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Tangens und Kotangens

Aus der Definition des Tangens $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ folgt

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

Wir erweitern mit dem Kehrwert von $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ und erhalten

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Analog mit $\alpha-\beta$ und wieder gleich erweitert

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)}=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Die Herleitung für den Kotangens ersparen wir uns. Es gilt:

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)\mp 1}{\cot(\beta)\pm\cot(\alpha)}$$

Eigenschaften 21.9. Additionstheoreme des Tangens/Kotangens

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\ \pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}\qquad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)\mp 1}{\cot(\beta)\pm\cot(\alpha)}$$

Anmerkung 21.10. Die Schreibweise $a\pm b\mp c$ impliziert, dass man einerseits das obere Zeichen und anderseits das unter Zeichen verwendet. Also $a+b-c$ und $a-b+c$.

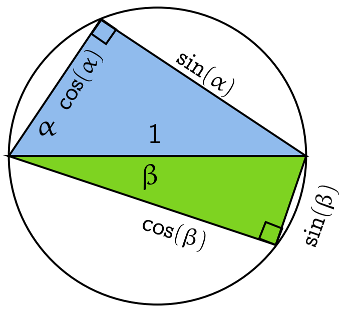
21.11 Übung Wir betrachten den Schnitt zweier Geraden $y_1=m_1x+n_1$ und $y_2=m_2x+n_2$. Wir wollen den Zwischenwinkel berechnen. Die Steigung ist der Tangens des Winkels. Mit $m_1=\tan(\alpha)$ und $m_2=\tan(\beta)$ ist der Zwischenwinkel $\phi=\alpha-\beta$. Somit ist

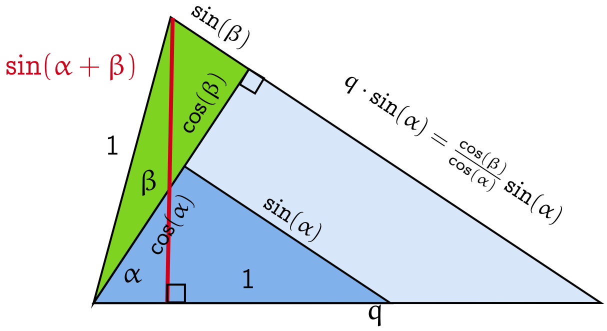
$$\tan(\phi)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}.$$

$\triangleleft$

Geometrische Herleitung

Wir haben die Additionstheoreme analytisch hergeleitet mit den bekannten Sätzen. Es ist aber auch möglich, wie hier gezeigt wird, strikt mit Elementargeometrie zu argumentieren. Dazu nehmen wir zwei rechtwinklige Dreiecke (Thaleskreis) über dem Durchmesser 1. Dann setzen wir die zwei Dreiecke aufeinander. Das untere wird gestreckt und gemäss Strahlensatz vergrössert sich die Seiten um den Faktor q, der dazu führt, dass $\cos(\alpha)$ in $\cos(\beta)$ übergeht. Es ist $q = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$.





Nun bestimmt sich die doppelte Fläche als Höhe mal Grundseite. Auf zwei Arten folgt

$$\sin(\alpha+\beta) \cdot q = \cos(\beta) \cdot (\sin(\beta) + q\sin(\alpha))$$

und

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\beta) \cdot (\sin(\beta)\frac{1}{q} + \sin(\alpha)) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Es gibt immer mehrere Wege.

Anwendungen

Die Additionstheoreme eröffnen eine Vielzahl von abgeleiteten Beziehungen. Beispielsweise benutzt man $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$. Setzen wir dies in die Gleichung für $\sin(\alpha+\beta)$ ein so folgt:

$$\sin(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin(\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(\tfrac{1}{2}\alpha) + \cos(\tfrac{1}{2}\alpha)\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

und somit

$$\sin(\alpha) = 2\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Weiters könnte man auch finden

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Für $\cos(2\alpha)$ kann man mit dem Additionstheorem finden

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \tag{21.2}$$

und den Tangens (dann mit $\cos(\alpha)^2$ erweitern)

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2} = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)^2} \tag{21.3}$$

Man könnte auch die Terme nach den Ausdrücken mit α alleine suchen. Z.B. mit $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ oder $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$$

und somit

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)}$$

21.12 Übung Wir setzen $\alpha = x + c$ und $\beta = x - c$ und bestimmen $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$. Mit dem Additionstheorem auf beide Terme angewendet folgt:

$$\begin{aligned}\sin(x+c) + \sin(x-c) &= \sin(x)\cos(c) + \cos(x)\sin(c) + \sin(x)\cos(c) - \cos(x)\sin(c)\\ &= 2\sin(x)\cos(c)\end{aligned}$$

Wenn wir nun x und c ersetzen mit $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $c = \frac{\alpha-\beta}{2}$, dann folgt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

◁

21.13 Übung Man bestimme $\sin(3x)$ mit den Additionstheoremen. Es ist natürlich $\sin(3x) = \sin(x + 2x)$. Mit

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(x)\underbrace{\cos(2x)}_{1-2\sin(x)^2} + \cos(x)\underbrace{\sin(2x)}_{2\sin(x)\cos(x)}\\ &= \sin(x)(1-2\sin(x)^2 + \cos(x)\cdot 2\cdot \sin(x)\cos(x)\\ &= \sin(x) - 2\sin(x)^3 + 2\sin(x)\cos(x)^2\\ &= \sin(x) - \sin(x)^3 + 2\sin(x)[1-\sin(x)^2]\\ &= 3\sin(x) - 4\sin(x)^3\end{aligned}$$

Eine geometrische Interpretation fällt nun sehr schwierig. ◁

21.14 Übung Wir suchen einen einfachen Ausdruck für $\cos(x + y) + \cos(x - y)$ und $\cos(x + y) - \cos(x - y)$. Mit den Additionstheoremen (Eigenschaft 21.8) folgt einfach:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos(x)\cos(y)\\ \cos(x+y) - \cos(x-y) &= 2\sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

Setzen wir $p = x+y$ und $q = x-y$ und lösen nach $x = \frac{p+q}{2}$ und $y = \frac{p-q}{2}$ auf, so finden wir

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2})\\ \cos(p) - \cos(q) &= 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})\end{aligned}$$

Dasselbe Vorgehen für den Sinus, d.h. $\sin(x) + \sin(y)$ etc. zeitigt die Formeln

$$\begin{aligned}\sin(p) + \sin(q) &= 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2})\\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})\end{aligned}$$

Für den Tangens nimmt man das Verhältnis. Es gibt zu viele Zusammenhänge, die man nicht alle hier darstellen mag. ◁

21.15 Übung Wir nehmen die Gleichung 21.2 zur Hand, d.h. $\cos(x) = \cos(\frac{1}{2}x)^2 - \sin(\frac{1}{2}x)^2$ und den Pythagoras, d.h. $1 = \cos(\frac{1}{2}x)^2 + \sin(\frac{1}{2}x)^2$. Wir addieren und subtrahieren die zwei Gleichungen voneinader und erhalten interessante Zusammenhänge:

$$1 + \cos(x) = 2\cos(\tfrac{1}{2}x)^2$$

und

$$1 - \cos(x) = 2\sin(\tfrac{1}{2}x)^2$$

Nun lassen wir es mit einer Zusammenstellung gut sein. ◁

Formel 21.16. Doppelwinkel und Halbwinkel

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \qquad \sin(\tfrac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \qquad \cos(\tfrac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

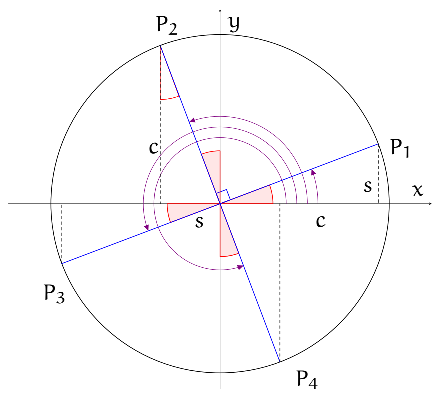
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)^2} \qquad \tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\tan(\alpha)}{1+\sqrt{1+\tan(\alpha)^2}}$$

21.4 Funktionsgraphen

21.4.1 Überstumpfe Winkel

Wir haben bis anhin spitze und stumpfe Winkel und ihre Kreisfunktionen angeschaut. Damit war das Argument φ im Bereich $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ oder $\varphi \in (0, \pi)$ im Bogenmass.

In der Abbildung sehen wir den Einheitskreis mit vier Punkten. Diese haben die Polarkoordinaten $P_1(1,\alpha)$, $P_2(1, \alpha + 90^\circ)$, $P_3(1, \alpha + 180^\circ)$ und $P_4(1, \alpha + 270^\circ)$. Je eine Punkt ist in einem Quadranten. Die kartesischen Koordinaten sind mit $P_1(c, s)$ sodann $P_2(-s, c)$, $P_3(-c, -s)$ und $P_4(s, -c)$. Die jeweiligen x-Werte entsprechen den Kosinus- und die y-Werte den Sinuswerten. Für P_3 und P_4 sind die Winkel von der positiven x-Achse gemessen überstumpf. Wir finden also für spitzes α mit Punkt im dritten Quadranten:



$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -s = -\sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(\alpha + 180^\circ) = -c = -\cos(\alpha)$$

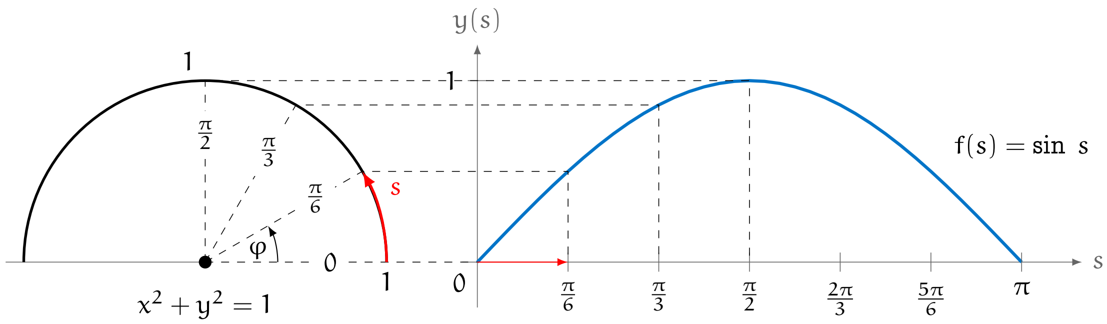
und für P_4 im vierten

$$\sin(\alpha + 270^\circ) = -c = -\cos(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(\alpha + 270^\circ) = s = \sin(\alpha)$$

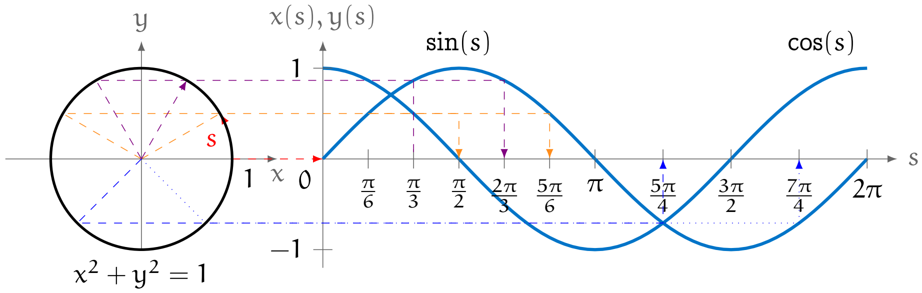
Wichtig 11. $\sin(\alpha)$ hat dasselbe Vorzeichen wie der y-Wert des Punktes (r, φ), der $\cos(\varphi)$ hat dasselbe Vorzeichen wie der x-Wert und $\tan(\varphi)$ sowie $\cot(\varphi)$ sind positiv, wenn beide kartesischen Koordinaten dasselbe Vorzeichen haben und negativ, wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben. ⊣

21.4.2 Parameterdarstellung

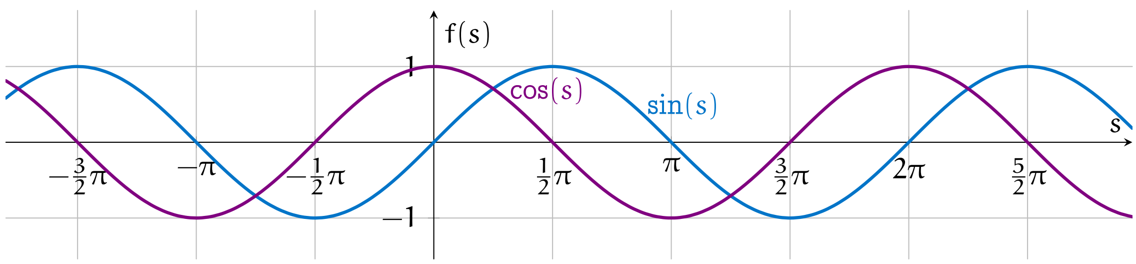
Anstatt den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ zu zeichnen, können wir die Parameterdarstellung wählen mit der Bogenlänge s als Parameter. Wir wählen $r = 1$, so dass $s = \mathrm{arc}(\varphi)$ ist. Also $x(s) = \cos(s)$ und $y(s) = \sin(s)$. Wir zeichnen diese beiden Funktionen von s in der Zeichenebene $(s, f(s))$.



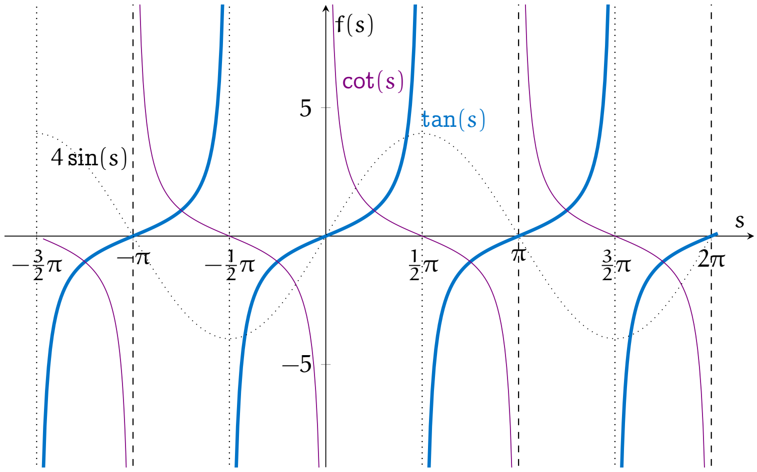
Nun können wir diese Methode der Konstruktion auf den ganzen Kreis anwenden, also für $0 \geqslant s \geqslant 2\pi$. Gleichzeitig kann man auch die Kosinuswerte als x-Koordinaten auslesen oder von der Identität $\cos(\pi/2 - s) = \sin(s)$ Gebrauch machen. Dies bedeutete den Sinus um $s = \pi/2$ nach links zu verschieben.



Wir zeichnen nun die Funktionen für den Fall, dass wir mehrere Umdrehungen am Kreis in beide Richtungen ausführen. Nun erkennt man die Wellenform von Sinus und Kosinus sehr gut. Man erkennt auch, dass die zwei Funktionen eigentlich sich nur durch eine horizontale Verschiebung unterscheiden.



Die Sinusfunktion hat beliebig viele Nullstellen bei $0 + k \cdot 2\pi$. Der Kosinus hingegen bei $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da der Tangens definiert ist als Verhältnis von Sinus zu Kosinus, resp. der Kotangens als Kosinus zu Sinus, müssen diese beide Funktionen jeweils Polstellen aufweisen, an denen die Werte nach ∞ mit $s \to k \cdot 2\pi$ gehen.



Wi sehen die Kurven von Tangens und Kotangens. Man beachte, dass der Kotangens nicht die Umkehrfunktion des Tangens ist, denn der Kotangens ist der Tangens gespiegelt an der x-Achse (und verschoben), wogegen die Umkehrfunktion an der Winkelhalbierenden gespiegelt wird. Dort wo der Kosinus Nullstellen aufweist, besitzt der Tangens Polstellen.

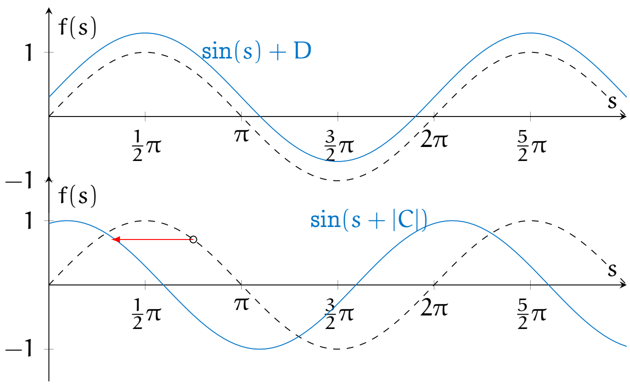
21.4.3 Transformationen

Wir betrachten die Transformationen wieder mit der schon bekannten Form, wobei wir hier die allgemeine Kreisfunktion trg $\in \{\sin, \cos, \tan, \cot\}$ festlegen, um Schreibaufwand zu sparen. Also

$$g(x) = A \cdot \text{trg}(Bx + C) + D$$

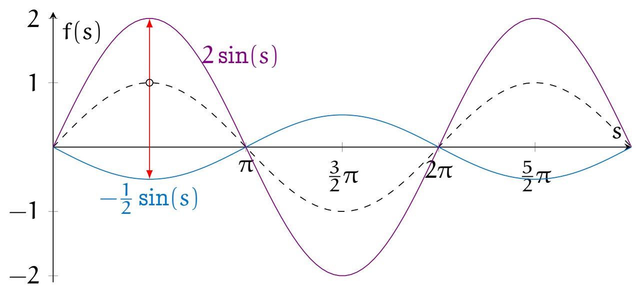
Bei den Kreisfunktionen haben die Parameter z.T. eigene Namen. Es sind:

- A: *Amplitude*,
- B: *Frequenz*,
- C: *Phase*

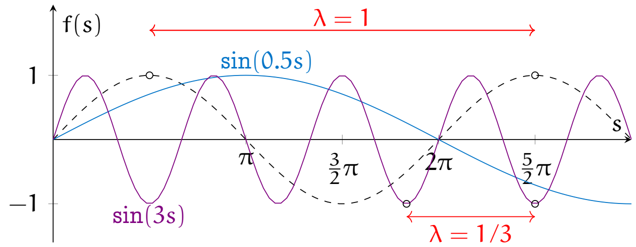


Der Parameter D ist einfach eine Verschiebung in y-Richtung. Mit positivem D nach oben, mit negativem nach unten.

Der Parameter C, die Phase oder Phasenverschiebung bewirkt eine horizontale Verschiebung der Funktionswerte. Wie wir die schon bei anderen Funktionen beobachtet haben, wirkt ein positive C als eine Verschiebung nach links der Kurve. Man erkennt auch leicht, dass eine Verschiebung um $\pi/2$ oder 90° den Sinus in den Kosinus überführt. Als Muster sind Sinus und Kosinus dieselbe Kurve. Es gilt ja $\cos(s) = \sin(s + \pi/2)$.

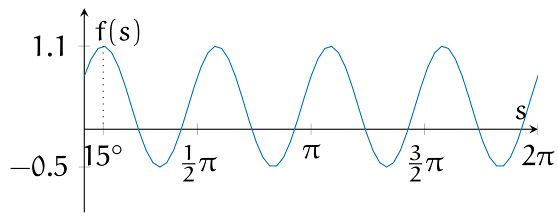


Die Amplitude ist der Streckungs- oder Stauchungsfaktor für die Funktion. Ob Streckung oder Stauchung hängt vom Betrag von A ab. Ist $|A| < 1$, dann wird gestaucht, wenn $|A| > 1$ dann gestreckt. Das Vorzeichen $A/|A|$ bewirkt eine Spiegelung an der x-Achse, wenn es negativ ist.



Der Parameter B, Frequenz, ist der interessanteste Parameter. Wir betrachten $s = Bt$. Während t von 0 zu 2π in einem Umgang läuft, macht s $B = 3$ Umläufe (siehe Abbildung). Der Parameter B bestimmt also das Verhältnis von Umläufen. Ist $|B| > 1$ geht es schneller und ein Punkt auf dem Einheitskreis (x, y), mit $|B| < 1$ langsamer als der Normkreis. Da es die Form $s = \nu \cdot t$ besitzt, nennt man B auch *Winkelgeschwindigkeit*. Das Vorzeichen $B/|B|$ bestimmt die Richtung: positiv im Gegenuhrzeigersinn, negativ im Uhrzeigersinn. Während die Frequenz oder Winkelgschwindigkeit die Anzahl Wellen im Verhältnis nur Norm angibt, ist der reziproke Wert $1/|B|$ die sogenannte *Wellenlänge*. In der Abbildung sieht man, wie mit $B = 3$ die Wellenlänge $1/3$ der Normlänge wird. Die visuelle Bedeutung der Wellenlänge ist einsichtig: es ist die Distanz von einem Wellengipfel zum nächsten.

Wir kommen nochmals auf die *Phasenverschiebung* C zurück. Denn es gibt eine Wechselwirkung mit der Frequenz. Der Umlauf beginnt bei $s_0 = B \cdot t_0 + C = 0$ und endet bei $s_1 = 2\pi = B \cdot t_1 + C$. Oder $t_0 = -\frac{C}{B}$ und $t_1 = \frac{2\pi}{B} - \frac{C}{B}$. Somit verschiebt sich die Kurve bei $B \neq 1$ um $\phi = \frac{C}{B}$ nach links bei $\sin(Bt + C) = \sin(Bt + \phi \cdot B) = \sin(B(t + \phi))$.



21.1 Übung Gegeben ist der Graph der Abbildung. Wir lesen die Parameter heraus, zum einen mit der Annahme, es handelt sich um ein Sinusfunktion, zum anderen eine Kosinusfunktion. Wir gehen von $f(s) = A\sin(Bs + C) + D$ aus. Die Ausdehnung in y-Richtung ist $1.1 + 05 = 1.6$. Das ist die doppelte Amplitude. Also ist $A = 0.8$. Die Mitte ist $y = 1.1 - 0.8 = 0.3$. Also ist die vertikale Verschiebung $D = 0.3$ Die Welle hat im Intervall $(0, 2\pi)$ vier Wellengipfel oder -täler. Also ist die Frequenz $B = 4$. Und nun zur Phase. Der erste Gipfel ist bei $15° = \pi/12$. Das entspricht $B \cdot 15 = 60°$ bei der Normfunktion. Diese ist $90 - 60 = 30$ zurückverschoben. Also muss $C = +30$ sein. Somit ist $f(s) = 0.8\sin(4s + 30°) + 0.3$ die gesuchte Kurve. Für den Kosinus müsste man $C = -60°$ wählen, also $f(s) = 0.8\cos(4s + 60°)$. ◁

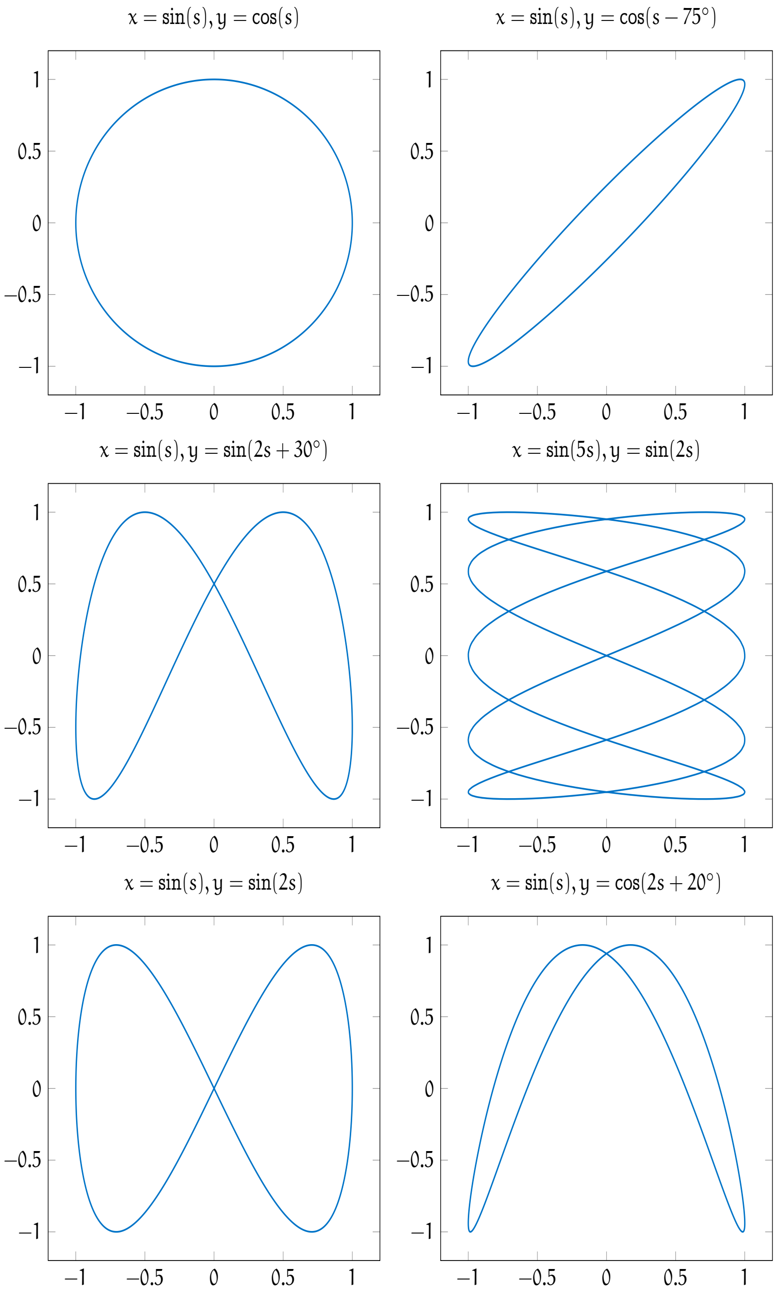
Lissajous-Figuren**

Wenn man ausgehend von der Kreiskurve als Parameterkurve der Bogenlänge oder des Winkels Transformationen an den Koordinaten vornimmt, dann wird der Kreis auf vielfältige

Art verändert. Man verallgemeinert also

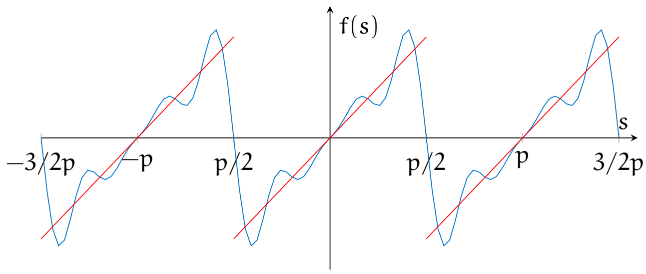
$$\left.\begin{array}{l} x = \cos(s) \\ y = \sin(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \cos(bs + c) \\ y = \sin(Bs + C) \end{array}\right.$$

Je nach Wahl der Parameter entstehen andere geschlossene Kurven in der Zeichenebene, die im Intervalle $x \in (-1, 1)$ und $y \in (-1, 1)$ liegt. Der Name dieser Kurven stammt von einem französischen Physiker.
Die erste Abbildung zeigt einen Kreis, denn es ist $P = (\sin(s), \cos(s))$. Die zweite Abbildung hat eine Phasenverschiebung, so dass sich x-Wert und y-Werte angleichen. Wenn der Phasenwinkel $90°$ wären, dann wäre die Kurve eine Strecke von $(-1, -1)$ nach $(1, 1)$. An den folgenden zwei Kurven erkennt man die Frequenz, die man auch als Anzahl Punkte auf der Geraden $y = 1$ und $x = 1$ ablesen kann. Die vierte Kurve berührt oben zweimal und rechts fünf Mal.



Überlagerung**

Zwei Funktionen kann man addieren. Ihre Funktionsgraphen werden dann überlagert (oder superponiert). Einfach ist $g(x) = h(x) + f(x)$ beispielsweise.
Nun kann man periodische Funktionen $f(x) = f(x + p)$ durch die ebenfalls periodischen Sinus- und Kosinusfunktionen annähern. Je mehr Funktionswert man addiert, desto besser ist die Näherung. Wir wollen diese als *Fourier-Reihen* bekannte Phänomen nur anhand eines Graphen zeigen. Die entsprechenden Theorie ist sehr bedeutsam für die Elektrotechnik, aber auch für synthetische Musik.



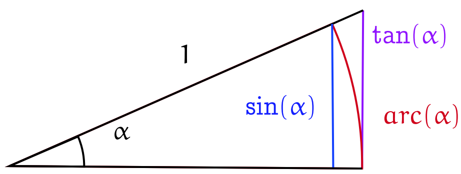
Die Sägezahnfunktion $g(x)$ wird in der Abbildung durch die Summe $h(x) = 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x)$ angenähert. Die Theorie zeigt, wie man die Koeffizienten und Frequenzen in Abhängigkeit der Funktion $g(x)$ bestimmt. Allgemein gilt für eine periodische Funktion $g(x)$:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$$

Solche Reihen nennt man auch *trigonometrische Polynome*.

Näherung kleine Winkel**

Für kleine Winkel. d.h. $|\alpha| < 6^\circ = 0.1$ kann man die sehr einfache Näherung brauchen, die sich aus der Abbildung schnell erschliesst: Der Winkel im Bogenmass $\mathrm{arc}(\alpha)$ liegt zwischen den Werten von $\sin(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$. Je kleiner α desto näher die Werte.



Formel 21.2. Näherung kleine Winkel Für $|\alpha| < 0.1$ gilt

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \mathrm{arc}(\alpha)$$

Zur Bestätigung zeigen wir $\sin(0.1) = 0.1045$, $\tan(0.1) = 0.1051$. Wenn Sinus und Tangens ungefähr gleich sind, heisst das auch, dass der Kosinus ungefähr 1 ist, tatsächlich $\cos(0.1) = 0.9945$.

21.5 Arcus-Funktion, Inverse

Wir haben schon gesehen, dass man den Winkel auf zwei Arten angibt: entweder in Winkelgrade, z.B. 30° oder im Bogenmass, der Länge des entsprechenden Kreisbogens auf dem

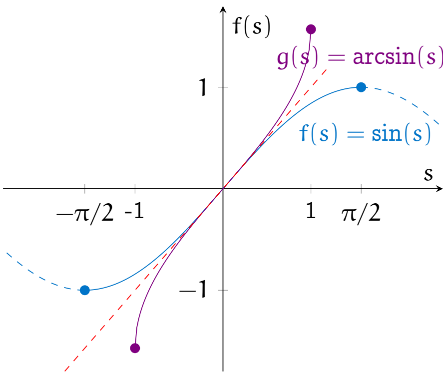
Einheitskreis. Beide Zahlen sind durch eine Proportionalität verbunden. Auf lateinisch heisst Winkel *angulus* und Bogen *arcus*. Nun ist der Winkel φ das Argument der Kreisfunktionen $\sin(\varphi)$ etc. Deshalb bezeichnet der Arkus die zur Kreisfunktion gehörige Funktion, welchen das Argument bezeichnet. Einfacher $\operatorname{arc}(\sin(\varphi)) = \varphi$ oder dann noch einfacher $\arcsin(\varphi)$, $\arccos(\varphi)$, $\arctan(\varphi)$ und $\operatorname{arccot}(\varphi)$. (Wegen des Zusammenhangs $\operatorname{arc}(\sin(\varphi)$ schreiben einige Autoren einen Leerschlag zwischen Arc und Funktion, d.h. $\operatorname{arc}\sin$ anstatt arcsin.) Für die Winkel (in Bogenmass) soll gelten

$$\alpha = \operatorname{arctrg}(\operatorname{trg}(\alpha)).$$

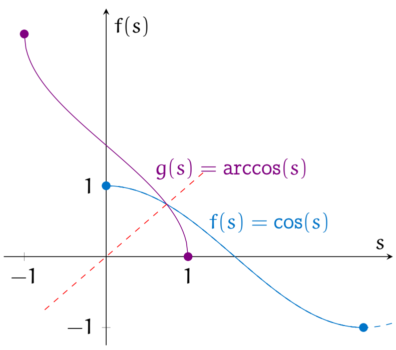
Eine Funktion ist eindeutig, d.h. einem x-Wert wird genau ein y-Wert zugeordnet. Das Umgekehrte muss nicht stimme, die Zuordnung von y zu z kann mehrdeutig sein. Die Kreisfunktionen sind periodische Funktionen, d.h. $\operatorname{trg}(s) = \operatorname{trg}(s + k \cdot p)$ mit p der Periode und k einer ganzen Zahl. Somit sind die Kreisfunktionen nicht ohne Weiteres umkehrbar. Um dennoch eine Inverse zu erhalten, werden die Funktionen auf einen Bereich beschränkt und zwar auf einen monotonen. Die Arkussinus-Funktion, wie auch die Arkuskosinus-Funktion, besitzen keine Polstellen, so dass kein spezielles Fernverhalten zu verzeichnen ist.

Anmerkung 21.1. Auf den Taschenrechnern findet man häufig die Belegung SIN^{-1} für arcsin, COS^{-1} für arccos etc.

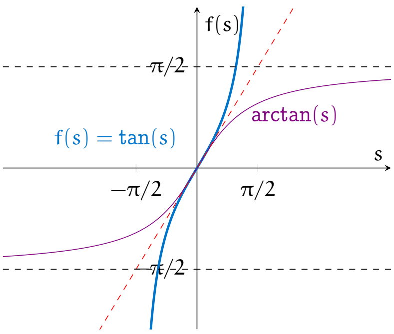
21.5.1 Funktionsgraphen



Die Sinusfunktion ist im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ monoton wachsend. Hier hat sie eine Inverse, ist also linkseindeutig. Die Abbildung zeigt die Inverse, die durch Spiegelung des monotonen Stücks an der ersten Winkelhalbierenden entsteht. Dieser Funktionsgraph kann man sich als Darstellung einer periodischen Funktion vorstellen, die sich links und rechts fortsetzt.
Es ist einsichtig, dass eine punktsymmetrische Funktion auch eine solche Inverse besitzt.



Für den Kosinus wählt man das Intervall $[0, \pi]$, das monoton fallend ist. Die Inverse besitzt den Wertebereich $(0, \pi)$ und den Definitionsbereich $(-1, 1)$. Dieses Stück wird periodisch fortgesetzt. Damit wird z.B. $\arccos(3.25) = \arccos(-0.75)$.



Die Umkehrfunktion des Tangens ergibt eine Funktion mit dem Wertbereich $(-1, 1)$ und dem Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$. Bei dieser Funktion muss man sich keine zusätzlichen Gedanken zur Periodizität machen. Wir haben den Kotangens bis hierhin vernachlässigt, weil er ja als Reziproke zum Tangens hinreichend bestimmt ist. Natürlich existiert auch ein $\operatorname{arccot}(\alpha)$. Der Funktionsgraph ist die Spiegelung des Kotangens an der x-Achse verbunden mit einer vertikalen Verschiebung um $\pi/2$.

21.5.2 Eigenschaften

Wir müssen vor Augen halte, dass ein Ausdruck $\arcsin(s)$ ein Winkel ist. Am Einheitskreis wird deutlich, dass gelten muss

$$\arcsin(s) + \arccos(s) = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\arctan(s) + \operatorname{arccot}(s) = \frac{\pi}{2}$$

die zwei Winkel ergeben zusammen $90°$.

Symmetrie

Es gilt folgende Symmetrieeigenschaft, die man aus der Graphik schon erkennt, denn $\arcsin(s)$ ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs und $\arccos(s)$ ist punktsymmetrisch bezüglich $(0, \pi/2)$:

$$\begin{aligned}
\arcsin(-s) &= -\arcsin(s) \\
\arccos(-s) &= \pi - \arccos(s) \\
\arctan(-s) &= -\arctan(s) \\
\operatorname{arccot}(-s) &= \pi - \operatorname{arccot}(s)
\end{aligned}$$

21.2 Übung Wir vereinfachen $a = \arcsin(\sin(x))$ und $b = \arcsin(\cos(x))$. Die erste Formel ist die Funktion angewandt an der Inversen. Somit ist $a = \arcsin(\sin(x)) = x$. In der zweiten Formel müssen wir den inneren Kosinus in einen Sinus verwandeln. Also $b = \arcsin(\cos(x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$. Damit ist $b = \frac{\pi}{2} - x$. ◁

21.3 Übung Berechne $a = \tan(\arccos(x))$ und $\arccos(x) + \arccos(-x)$.

$$\begin{aligned}
\tan(\arccos(x)) &= \frac{\sin(\arccos(x)}{\cos(\arccos(x))} \\
&= \frac{\sin(\arccos(x)}{x} \\
&= \frac{\sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2}}{x} \\
&= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}
\end{aligned}$$

Zur zweite Teilaufgabe. Es ist $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$. Somit ist die Summe:

$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \arccos(x) + [\pi - \arccos(x)] = \pi$$

$\triangleleft$

21.4 Übung Berechne $\arctan(2) + \arctan(3)$ und $\tan(2\arctan(x))$. Wir addieren zwei Winkel, wobei ihre Tangenten gegeben sind. Das Additionstheorem lautet

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Es ist $\tan(\alpha) = 2$ und $\tan(\beta) = 3$. Somit $\tan(\alpha+\beta) = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = \frac{-5}{5} = -1$. Der entsprechende Winkel ist $-45°$ und somit $180 - 45 = 135°$ oder $\frac{3\pi}{4}$.
Weiter: Gemäss Gleichung 21.3 gilt mit $\alpha = \arctan(x)$

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)^2} \\ &= \frac{2\tan(\arctan(x))}{1-\tan(\arctan(x))^2} \\ &= \frac{2x}{1-x^2}\end{aligned}$$

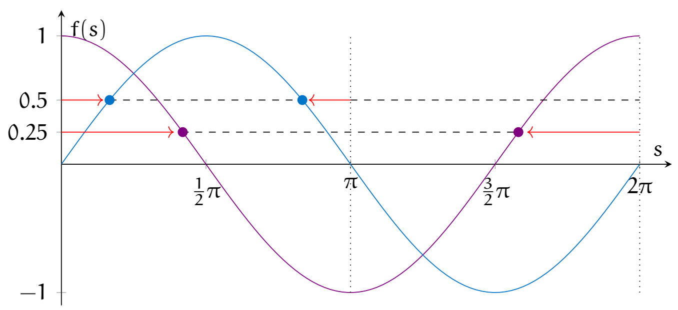
$\triangleleft$

Zusammenhänge**

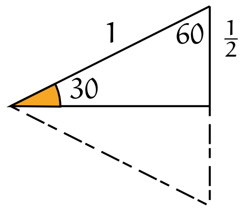
In Analogie zu den Additionstheormen, Verknüpfung der verschiedenen Kreisfunktionen etc. gibt es eine sehr grosse Zahl von Zusammenhängen, die wir hier nicht oder nur sehr oberflächlich besprechen werden. So schön auch geschlossene Ausdrücke sein mögen, mit den Taschenrechner und Programmen erübrigt sich viel Rechnerei. Es reicht also, wenn man die grundlegenden Zusammenhänge erkennt und kennt.

21.6 Trigonometrische Gleichungen

Wir wissen aus der Algebra, dass Gleichungen die Form $f(x) = 0$ haben oder in eine solche gebracht werden können. Bei Gleichungen mit Kreisfunktionen tritt der Umstand auf, dass die Funktionen periodisch sind. Das bedeutet, dass die Lösungsmenge, sofern sie überhaupt darstellbar ist, eine grosse Mächtigkeit haben kann, ja unendlich viele Lösungen enthält. Deshalb wird der Lösungebereich auf ein Intervall eingeschränkt. Wenn man z.B. nach einem spitzen Winkel fragt, dann hat man sich auf das Intervall $(0, 90°)$ beschränkt.
Wir veranschaulichen graphisch, was eine einfache Gleichung wie $\sin(x) = 0.5$ und $\cos(x) = 0.3$ bedeutet.



Da der Sinus im ersten und zweiten Quadranten, also in $0 < s < 180$, dasselbe Vorzeichen hat, ergeben sich zwei Lösungen von $\sin(s) = k$. Ist eine Lösung s_1 gefunden, dann folgt $s_2 = 180 - s_1$. Beim Kosinus ist es anders, hier haben die Werte des ersten und vierten Quadranten dasselbe Vorzeichen. Ist deshalb eine Lösung c_1 gefunden, dann ist die andere $c_2 = 360 - c_1$. Der Tangens ist monoton wachsend, es gibt nur einen Schnittpunkt. Allerdings ist seine Periode nur π. Somit sind die Lösungen beim Tangens $s = s_1 + k \cdot \pi$.
Wir werden im Folgenden einfach Beispiele rechnen.



21.1 Übung Wir suchen x aus $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Im Intervall $(0, 360°)$ gibt es zwei Lösungen, nämlich 30 und $150° = 180 - 30$. Oder auf dem ganzen $\mathbb{R}$: $x_1 = 30 + k \cdot 360$ und $x_2 = 150 + k \cdot 360$. Im Bogenmass $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ und $x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$. ◁

21.2 Übung Man löse $\cos(5x) = \frac{1}{2}$. Wir wissen aus der Elementargeometrie, dass der Winkel $60°$ ist. Damit $5x = 60$ und $x = 12°$. Anderseits gilt auch $-60°$ und $300°$ als Lösung, womit $5x = 300$ oder $x = 60°$ gilt. Mit dem Taschenrechner folgt $5x = \arccos(0.5) = 60$. ◁

21.3 Übung Man bestimme $\tan(x) = \sqrt{3}$. Auch hier ist der Winkel $60°$. Da die Periodizität des Tangens $180° = \pi$ ist, folgt auch $240°$ als Lösung. ◁

21.4 Übung Wir lösen $\frac{1}{2}\sin(x) + 1 - \cos(x)^2 = 0$. Es ist (Pythagoras) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Damit eingesetzt folgt $\frac{1}{2}\sin(x) + \sin(x)^2 = 0$, faktorisiert $\sin(x)(\frac{1}{2} - \sin(x)) = 0$. Mit dem Nullproduktsatz muss jeder Faktor als null angesehen werden. Damit die zwei Gleichungen $\sin(x) = 0$, woraus $x_1 = \{0, \pi\}$ und für $\sin(x) = \frac{1}{2}$ kennen wir die Lösung von oben $x_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ und $x_3 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$. ◁

21.5 Übung Man löse $\sin(2x) = 4\cos(x)$. Mit dem Additionstheorem kennt man $\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 4\cos(x) \\
2\sin(x)\cos(x) &= 4\cos(x) \\
\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) &= 0 \\
\cos(x)[\sin(x) - 2] &= 0
\end{aligned}$$

Der erste Faktor $\cos(x)$ hat die Lösungen $x_1 = \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Der zweite Faktor hat keine Lösung, denn der Sinus kann nicht grösser als 1 sein. ◁

21.6 Übung Gegeben ist $4\sin(x)^2 - 4\cos(x) = 1$. Mit dem Pythagoras folgt

$$\begin{aligned}
4\sin(x)^2 - 4\cos(x) &= 1 \\
4(1 - \cos(x)^2) - 4\cos(x) &= 1
\end{aligned}$$

Wir setzen für $\cos(x) = q$ und haben die quadratische Gleichung

$$4(1 - q^2) - 4q - 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad 4q^2 + 4q - 3 = 0$$

Aus $q^2 - q - 3/4 = 0$ ergänzen wir quadratisch zu $(q+1/2)^2 - 1/3 - 3/4 = 0$ und $(q+1/2)^2 = 1$. Daraus $q = -1/2 \pm 1$ oder $q = \{-3/2, 1/2\}$. Die Lösung $q = -3/2 = \cos(x)$ ist nicht statthaft, denn der Kosinus wird betragsmässig nie grösser als 1. Damit ist die Lösung das x, das zu $\cos(x) = \frac{1}{2}$ gehört. Das haben wir bereits berechnet. ◁

21.7 Übung Man löse $7\sin(x)^2 + 2\sin(x)\cos(x) - 24\cos(x)^2 = 0$. Wir verringern den Schreibaufwand, indem wir $c = \cos(x)$ und $s = \sin(x)$ verwenden:

$$7s^2 + 2sc - 24c^2 = 0.$$

Wir versuchen eine Faktorisierung beginnend mit $(7s+?)(s+?)$ und weiter dann zu $(7s - 12c)(s + 2c) = 7s^2 + 14cs - 12cs - 24c^2$. Daraus folgt einerseits $7\sin(x) = 12\cos(x)$ und $\tan(x) = 12/7$. Mit dem Rechner $x_1 = \arctan(12/7) = 59.744°$ und plus 180: $x_2 = 239.744°$. Anderseits $\sin(x) = -2\cos(x)$ oder $\arctan(-2) = -63.435°$ oder $+180°$ dann $x_3 = 116.565°$ und $x_4 = 296.565°$. ◁

21.8 Übung Man löse $\tan(x) = \sqrt{10}\cot(x)$. Mit $\cot(x) = 1/\tan(x)$ folgt $\tan(x) = \sqrt{10}/\tan(x)$ und $\tan(x)^2 = \sqrt{10}$. Daraus $\tan(x) = \pm 10$. Damit $x_1 = \{84.289°, 264.289°\}$ und $x_2 = \{95.710°, 275.710°\}$. ◁

21.9 Übung Es ist $\sin(x) + \cos(x) = 1.2$. Wir setzen wieder $s = \sin(x)$ und $c = \cos(x)$, also $s + c = 1.4$. Nun nehmen wir den Pythagoras $s^2 + c^2 = 1$ und ersetzen:

$$\sqrt{1 - c^2} + c = 1.2$$

isolieren und quadrieren

$$1-c^2 = (1.2-c)^2 = 1.44-2.4c+c^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2c^2-2.4c+0.44 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^2-1.2c+0.22$$

Die Gleichung kann man mit der Mitternachtsformel, der pq-Formel oder mit Ergänzen lösen. Es ist $(c - 0.6)^2 - 0.36 + 0.22$ und $(c - 0.6)^2 = 0.14$ womit $c = \pm\sqrt{0.14} + 0.6$. Numerisch $c = \{0.9742, 0.2258\}$. Damit folgt $\arccos(0.9743) = 13.043°$ und $\arccos(0.2258) = 76.948°$. Allgemein $x_1 = 13.043 + k \cdot 360$ und $x_2 = 76.948 + k \cdot 360$. ◁

21.7 Hyperbolische Funktionen**

Die hyperbolischen Funktionen sind weite Verwandte der Kreisfunktionen. Kreis und Hyperbel gehören zur Familie der Kegelschnitte. Weiter gehören Ellipse und Parabel dazu. Es gibt vier Vertreter der hyperbolischen Funktionen, die sinnigerweise Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens hyperbolicus heissen und abgekürzt werden

$$\sinh(x), \quad \cosh(x), \quad \tanh(x) \quad \text{und} \quad \coth(x).$$

Weiter gilt

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{1}{\coth(x)}$$

Die Ähnlichkeit ist auch anhand der Parameterdarstellung erkennbar. Es gilt

Kreisgleichung	$x^2 + y^2 = 1$	$P = (\cos(s), \sin(s))$
Einheitsparabel	$x^2 - y^2 = 1$	$P = (\cosh(s), \sinh(s))$

Definition 43. Für reelle x ist der hyperbolische Sinus festgelegt als

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und der hyperbolische Kosinus

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Wir wollen zeigen, dass $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$. Mit der Definition folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 \\
&= \left[\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right]^2 - \left[\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\cancel{\exp(x)^2} - 2\exp(-x)\exp(x) + \cancel{\exp(-x)^2} - \cancel{\exp(x)^2} + 2\exp(-x)\exp(x) + \cancel{\exp(-x)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}(4\exp(-x)\exp(x)) \\
&= \exp(-x)\exp(x) \\
&= \exp(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Auch die Additionstheoreme sind ähnlich. Wir bestimmen

$$\begin{aligned}
\sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b) \\
&= \frac{1}{4}[(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}] + \frac{1}{4}[(e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b})] \\
&= \frac{1}{4}\left(e^a e^b + e^a e^{-b} - e^{-a} e^b - e^{-a} e^{-b} + e^a e^b - e^a e^{-b} + e^{-a} e^b - e^{-a} e^{-b}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^a e^b - 2e^{-a} e^{-b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{a+b} - e^{-a-b}\right) \\
&= \sinh(a+b)
\end{aligned}$$

Ebenso könnte man beweisen, dass

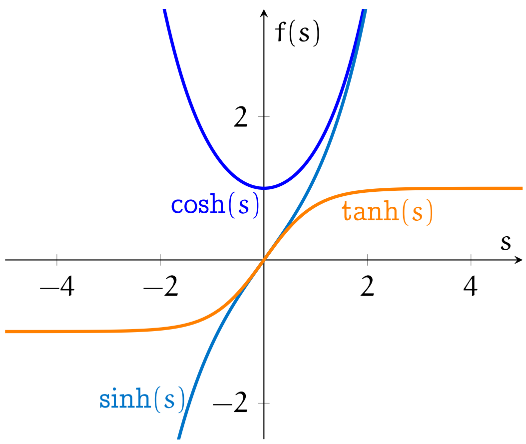
$$\cosh(2a) = \cosh(a)^2 + \sinh(a)^2$$

und

$$\tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1 + \tanh(a)^2}$$

Formal gibt es bis auf ein paar Vorzeichen eine perfekte Übereinstimmung.

Funktionsgraphen



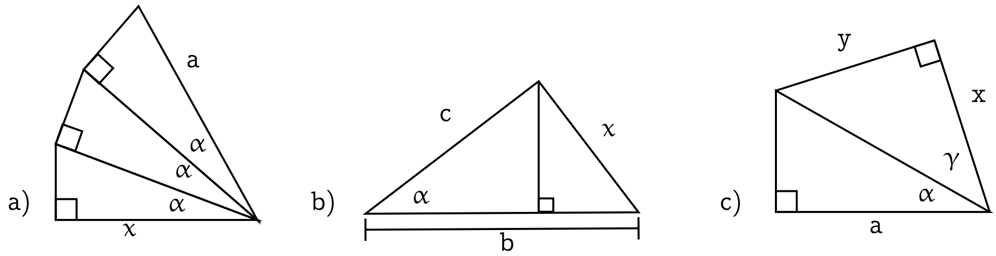
Aus den Definitionen der Funktionen erkennt man den Wertebereich fur Sinus und Kosinus hyperbolicus als $W = (-\infty, \infty)$ bei Defintionsbereich $D = (-\infty, \infty)$. Für den Tangens gilt $D = (-\infty, \infty)$ und $W = (-1, 1)$. Der Kosinus hyperbolicus wird auch als Kettenlinie bezeichnet, weil er die Form einer hängenden Kette oder Seil nachbildet. Einfachheitshalber wird die Parabel als Näherung verwendet.

Aufgaben

0.1 Bei einer Strasse findet sich ein Schild mit der Inschrift 18%. Das ist das Verhältnis von Anstieg zu horizontaler Distanz. Welchem Winkel entspricht dies? Die Eisenbahn bewältigt eine Steigung von 3.5%. Welchem Winkel entspricht dies?

1 Die Steigung entspricht dem Tangens. Also ist der Winkel $\arctan(0.18) = 10.2°$. Für die Bahn folgt $\arctan(0.035) \approx 2°$.

0.2 Bestimme x und y etc. durch die anderen angegebenen Strecken und Winkel.

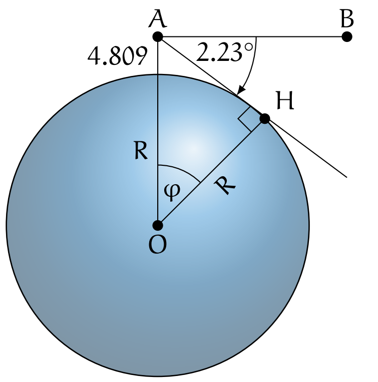


2 **(a)** Die Ankathete beim Winkel α ist $k_1 = a\cos(\alpha)$, dann wiederum $k_2 = k_1\cos(\alpha) = a\cos(\alpha)^2$ und $x = k_2\cos(\alpha) = a\cos(\alpha)^3$.

(b) Mit dem Kosinsussatz folgt: $x^2 = c^2 + b^2 - 2ac\cos(\alpha)$ und $x = \sqrt{c^2 + b^2 - 2ac\cos(\alpha)}$.

(c) Die Diagonale c ist $c = \frac{a}{\cos(\alpha)}$. Zudem ist $x = \cos(\gamma)c = \cos(\gamma)\cdot\frac{a}{\cos(\alpha)} = a\frac{\cos(\gamma)}{\cos(\alpha)}$. Und $y/c = \sin(\gamma)$ somit $y = c\sin(\gamma) = a\frac{\sin(gamma)}{\cos(\alpha)}$.

0.3 Ein Beobachter auf einem Gipfel von 4809 m.ü.M (Mont Blanc) misst einen Deklinationswinkel von 2.23° zum Meereshorizont. Bestimme damit den Radius der als kugelförmig angenommenen Erde.



3 Es ist $\overline{OA} = R+4.809$ und $OH = r$. Weil $\overline{AB} \perp \overline{OA}$, folgt $\angle OAB = 90°$ und $\angle OAH = 90° - 2.23° = 87.77°$. Die Gerade durch A and H ist eine Tangente an die Kugel. Der Winkel $\angle OAH$ ist der Komplementärwinkel zum Deklinationswinkel, also $90° - 2.23°$ und damit folgt, dass $\varphi = 2.23°$ ist. Somit

$$\cos(\theta) = \frac{OH}{OA} = \frac{R}{R+3} = \cos(2.23°)$$

nach R aufgelöst

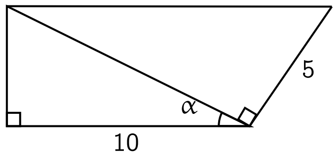
$$R = (R + 4.8093)\cos(2.23) \qquad \Leftrightarrow \qquad R - R\cos(2.23°) = 4.809\cos(2.23°)$$

und

$$R = 4.809 \cdot \frac{\cos(2.23°)}{1 - \cos(2.23°)} = 6341$$

Das Modell WGS84 von 1984 definiert die grosse Halbachse des Ellipsoiden mit 6378 km und die kleine mit 6357. Die Messung ist nicht schlecht.

0.4 Gegeben ist die Figur. Man berechne den Winkel α.



4 Der spitzere Winkel im oberen Dreieck ist ebenfalls α, sogenannter Wechselwinkel. Somit gilt mit der Diagonale d: $\cos(\alpha) = \frac{10}{d}$ und $\tan(\alpha) = \frac{5}{d}$. Jetzt d ersetzen:

$$\frac{10}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{\tan(\alpha)} = \frac{5\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad 10\sin(\alpha) = 5\cos(\alpha)^2 = 5(1-\sin(\alpha)^2)$$

Damit

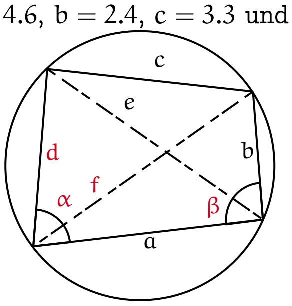
$$\sin(\alpha)^2 + 2\sin(\alpha) - 1 = 0$$

Quadratisch ergänzen

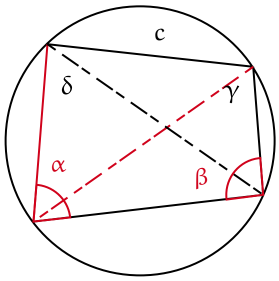
$$(\sin(\alpha)+1)^2 - 1 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \pm\sqrt{2} - 1 = \{0.4142, -2.4142\}$$

Nur erste Lösung sinnvoll, den Wertebreich Sinus im Intervall $[-1, 1]$, somit $\alpha = \arcsin(0.4142) = 24.47°$.

0.5 Ein Sehnenviereck ist gegeben $a = 4.6$, $b = 2.4$, $c = 3.3$ und $e = 4.8$. Gesucht wird α, β, d und f.



5 Wir zeichnen die gesuchten Grössen rot ein.



Der Kosinussatz bestimmt Winkel aus Seiten. Es ist also $\cos(\gamma) = \frac{c^2+b^2-e^2}{2bc} = -0.4034091 =$ und $\gamma = 113.7915°$. Das spezielle am Sehnenviereck ist, dass die gegenüberliegenden Winkel 180 minus Gegenwinkel sind. Deshalb ist $\alpha = 180° - \gamma = 66.20853°$.

Nun können wir mit dem Kosinussatz die Seite d berechnen. Es gilt $e^2 = d^2 + a^2 - 2ad\cos(\alpha)$. Das ist eine quadratische Gleichung in d, also

$$d^2 - d(2a\cos(\alpha) + (a^2 - e^2) = 0 = d^2 - d\cdot(3.711) - 1.88$$

mit den zwei Lösungen

$$d_{1,2} = \frac{3.711 \pm \sqrt{3.711^2 - 4\cdot 1.88}}{2} = \{4.163, -0.451\}$$

Somit ist $d = 4.163$. Nun bestimmen wir f zweimal mit dem Kosinussatz. Es ist

$$f^2 = d^2 + c^2 - 2cd\cos(\delta) = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta)$$

Da $\delta = 180° - \beta$ gilt $\cos(\beta) = -\cos(\delta)$, kann man schreiben

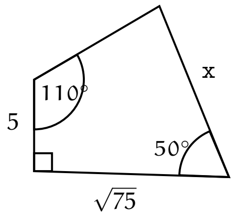
$$d^2 + c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos(\beta) - 2cd\cos(\beta) = -2\cos(\beta)[ab + cd]$$

und weiter

$$\cos(\beta) = -\frac{1}{2}\frac{d^2 + c^2 - a^2 - b^2}{[ab + cd]} = -0.02623875$$

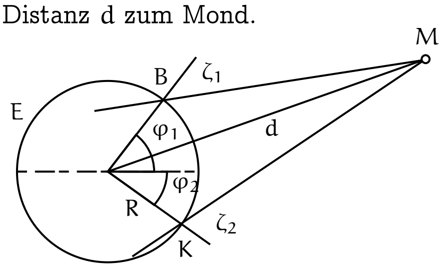
sodass $\beta = 91.5°$ und $\delta = 88.4°$. Damit folgt $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta)} = 5.24$

0.6 Bestimme die Seite x aus der Figur.

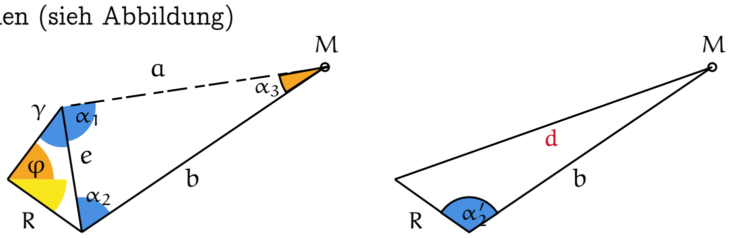


6 Wir beginnen mit der Diagonalen (Hypothenuse des rechtwinkligen $\triangle$): Mit Pythagoras folgt $c^2 = 25 + 75 = 100$ und $c = 10$. Wenn c gleich zehn ist und die Kathete halb so lang, dann ist der Winkel des Dreiecks 30 Grad und der Gegenwinkel 60 Grad. Somit haben wir das Problem: Ein Dreieck mit längster Seite 10 und den anliegenden Winkeln von $50 - 30 = 20°$ und $110 - 60 = 50°$. Damit ist auch dritte bekannt, nämlich $110°$. Dieser ist der Seite c gegenüber. Mit dem Sinussatz folgt: $\frac{\sin(110)}{10} = \frac{\sin(50)}{x}$ und somit $x = 10\frac{\sin(50)}{\sin(110)} = 8.152$.

0.7 ** Lalande und Lacaille haben 1751 gleichzeitig von Berlin ($\varphi = 52.520°$ nördliche Breite) und Kapstadt ($\varphi = -33.921°$ südliche Breite) aus, auf fast gleichem Meridian, denselben Punkt auf dem Mond gemessen, und zwar als Winkel $\zeta_1 = 41.250°$ und $\zeta_2 = 46.560°$. Mit dem Erdradius von $R = 6271.2$ bestimme man die Distanz d zum Mond.



7 Man kann sich schnell überzeugen, dass man mit den Angaben den Mondpunkt eindeutig konstruieren kann. Deshalb muss man ihn auch berechnen können. Nach längerem Studieren kann man auf folgende Überlegung kommen (sieh Abbildung)



Rückwärts gedacht (rechtes Bild): Wenn man das Dreieck mit α_2', b und R kennt, dann kann man den Kosinussatz verwenden, um d zu bestimmen. b kann man bestimmen mit dem Sinussatz, wenn α_1, α_3 und e bekannt sind. Die Winkel sind einfach. e ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks mit den Seiten R. e kann man mit dem Sinussatz bestimmen. Damit wären wir am Ziel. Jetzt vorwärts. $\varphi = 52.520 + 33.921 = 86.441$. Damit $\gamma = (180 - 86.441)/2 = 46.779$. Sinussatz:

$$\frac{e}{\sin(\varphi)} = \frac{R}{\sin(\gamma)} \qquad \Leftrightarrow \qquad e = R\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\gamma)} = 6271.2\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\gamma)} = 8589.2$$

Wir bestimmen $\alpha_1 = 180 - \gamma - \zeta_1 = 180 - 46.779 - 41.250 = 91.971$. Nun noch α_3 aus der Tatsache, dass Summe im Viereck $360°$. Also $\alpha_3 = 360 - 86.441 - [180 - \zeta_1] - [180 - \zeta_2] = \zeta_1 + \zeta_2 - 86.441 = 41.250 + 46.560 - 86.441 = 1.369°$. Mit dem Sinussatz

$$\frac{\sin(1.369)}{e} = \frac{\sin(\alpha_1)}{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad b = e\frac{\sin(91.971}{\sin(1.369)} = 8589.2\frac{0.9994}{0.0239} = 359165.3$$

Nun kommt der Kosinussatz mit dem Winkel $\alpha_2' = 180 - \zeta_2 = 133.440$

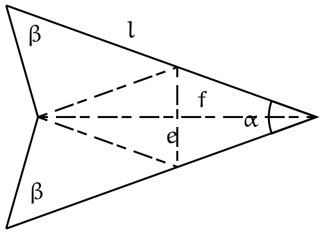
$$d^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos(\alpha_2') = 6271.2^2 + 359165.3^2 + 2 \cdot 6271.2 \cdot 359165.3 \cdot 0.6876 = 1.3214 \cdot 10^{11}$$

und

$$d = 363505$$

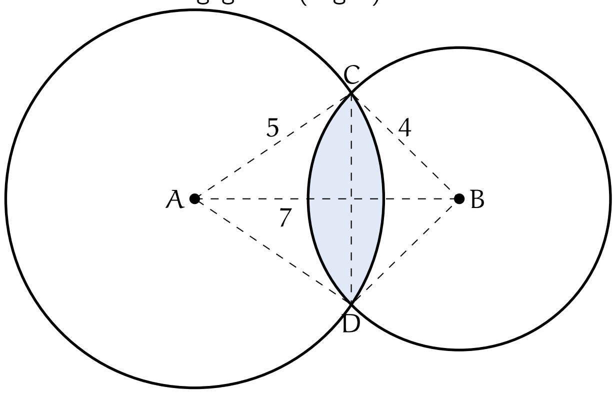
Das Internet sagt $d = 384'400$, wobei der Erdradius 6371 sei. Ein Fehler von rund 6%.

0.8 In einem Fahrstuhl zeigt dieser Pfeil die Fahrtrichtung an. Der Pfeil ist aus einem Rhombus und zwei kongruenten, nicht-rechtwinkligen Dreiecken aufgebaut. Weiter ist eine Dreiecksseite die geradlinige Verlängerung der Rhombusseite. Die Strecken e und f sind die Diagonalen des Rhombus. Die Ausmessung des Pfeils ergibt folgende Streckenlängen: $e = 1.0cm$, $f = 4.0cm$, $l = 4.3cm$. Berechnen Sie die Winkel α und β.



8 Der Winkel α ist einfach aus dem Tangens zu bestimmen, d.h. $\tan(\alpha/2) = \frac{e/2}{f/2} = \frac{e}{f} = 0.25$. Damit $\alpha/2 = \arctan(0.25) = 14.036$ und damit $\alpha = 2 \cdot 14.036 = 28.073°$.
Wir bestimmen die dem Winkel $\alpha/2$ gegenüberliegenden Seite $b^2 = f^2+l^2-2lf\cos(\alpha/2) = 16+18.49-2 \cdot 17.20 \cdot 0.9701 = 1.1176$, und $b = \sqrt{1.1176} = 1.0572$. Nochmals Kosinussatz: $\cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, angepasst: $\cos(\beta) = \frac{l^2+b^2-f^2}{2lb} = \frac{18.49+1.1176-16}{2 \cdot 4.3 \cdot 1.0572} = 0.3966$. Damit $\arccos(0.4851) = 66.63°$.

0.9 Es sind zwei sich schneidende Kreise gegeben (Figur). Man bestimme die Schnittfläche.



9 Wenn die Strecke $\overline{CD}$ bekannt ist, kann man die Winkel $\angle CAD$ und $\angle CBD$ bestimmen und somit die Fläche der Sektoren. Wir kennen drei Seiten des oberen Dreiecks, nämlich 7, 4 und 4. Mit dem Kosinussatz folgt der Winkel $\cos(\alpha) = \frac{5^2+7^2-4^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{58}{70}$ und $\arccos(\frac{58}{70}) = 34.0478°$. Der Winkel auf der Gegenseite ist $\cos(\beta) = \frac{4^2+7^2-5^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{40}{56}$ und $\beta = \arccos(\frac{40}{56}) = 44.415°$. Die Zentriwinkel sind doppelt so gross. Die Sektorenflächen sind: $F_1 = \frac{2\alpha}{360}\pi 5^2 = 14.856$ und $F_2 = \frac{2\beta}{360}\pi 4^2 = 12.403$, denn die Kreisfläche ist πr^2. Davon muss man noch die Flächen der gleichschenkligen Dreieck abziehen. $A_1 = 5 \cdot \sin(\alpha) \cdot 5 \cdot \cos(\alpha) = 11.598$ und $A_1 = 4 \cdot \sin(\beta) \cdot 4 \cdot \cos(\beta) = 7.998$. Somit bleibt die Fläche $F = 14.856 + 12.403 - 11.598 - 7.998 = 7.663$.

0.10 Bestimme $\cos(\xi)$ und $\tan(\xi)$, wenn ξ ein spitzer Winkel ist und $\sin(\xi) = \frac{5}{7}$ ist.

10 Wir stellen uns das rechtwinklige Dreieck vor, das eine Kathete der Länge 5 und eine Hypothenuse der Länge 7 aufweist. Mit dem Pythagoras folgt die zweite Kathete zu $\sqrt{49-25} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Somit folgt $\tan(\xi) = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ und $\cos(\xi) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

0.11 Bestimme $\sin(\xi)$ und $\tan(\xi)$, wenn $\cos(\xi) = \frac{3}{4}$ und $\frac{2\pi}{2} \leqslant \xi \leqslant 2\pi$.

11 Vorstellung rechtwinkliges Dreieck mit Seite 3 und Hypothenuse 4. Dritte Seite $4^2 - 3^2 = 7$, also $\sqrt{7}$. Sinus: $\sin(\xi) = \frac{\sqrt{7}}{4}$ und $\tan(\xi) = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Nun kontrollieren Voraussetzung: 4. Quadrant, d.h. Sinus negativ und Tangens negativ. Somit also $\sin(\xi) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ und $\tan(\xi) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.

0.12 Bestimme $\sin(x + y)$ wenn

(a) $\sin(x) = \frac{2}{3}$, $\sin(y) = \frac{1}{3}$ und x und y im ersten Quadrant liegen. **(b)** $\cos(x) = \frac{2}{5}$, $\cos(y) = \frac{3}{5}$ und x und y im ersten Quadrant liegen.

12 **(a)** Formel: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$. $\cos(\xi)^2 = 1 - \sin(\xi)^2$, also $\cos(x)^2 = 1-4/9 = 5/9$ und $\cos(x) = \sqrt{5}/3$ und $\cos(y)^2 = 1-1/9 = 8/9$ und $\cos(y) = 2\sqrt{2}/3$. (1. Quadrant heisst, die positive Wurzel zu nehmen.) Nun $\sin(x+y) = \frac{2}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{\sqrt{5}}{9} = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$.
(b) $\sin(x) = \sqrt{1-\frac{2^2}{5^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{21}$ und $\sin(y) = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{16/25} = \frac{4}{5}$. Somit $\sin(x+y) = \frac{\sqrt{21}}{5}\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{21}+8}{25}$.

0.13 Vereinfache
(a) $\tan(x)\cos(x)$ **(b)** $\tan(x)+\cot(x)$ **(c)** $\sin(x)^4 - \cos(x)^4$ **(d)** $1 - \frac{1}{\sin(x)^2}$

13 **(a)** $\tan(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos(x) = \sin(x)$
(b) $\tan(x)+\cot(x) = \tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\tan(x)+1}{\tan(x)}$
(c) $\sin(x)^4 - \cos(x)^4 = (\sin(x)^2 - \cos(x)^2)(\underbrace{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}_{1})) = (\sin(x)^2 - \cos(x)^2) = \sin(x)^2 - (1 - \sin(x)^2) = 1 + 2\sin(x)^2$
(d) $1 - \frac{1}{\sin(x)^2} = \frac{\sin(x)^2 - 1}{\sin(x)^2} = \frac{\sin(x)^2 - \sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \cot(x)^2$

0.14 Berechne im Intervall $[0, 360°]$ oder $[0, 2\pi]$
(a) $\sin(2x) = -0.5$ **(b)** $2\cos(x)^2 + 4\sin(x) = 3$ **(c)** $(\sqrt{3} + \tan(x))(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \cos(2x)) = 0$
(d) $\cos(\frac{x}{2}) - \cos(x) + 2 = 0$ **(e)** $\tan(2x) = \cos(x)$

14 **(a)** Wir denken uns $2x = t$. Gegenkathete zu Hypothenuse ist $1:2$, somit gleichschenkliges Dreieck, deshalb Winkel $30°$. Negativer Wert: 3. und 4. Quadrant, also $t = \{210, 330\}$, und $x_1 = \{105°, 165°\}$ und zusätzlich $x_2 = \{285, 345\}$.
(b) In $2\cos(x)^2 + 4\sin(x) = 3$ Kosinus durch Sinus ersetzen $2(1-\sin(x)^2) + 4\sin(x) = 3$, mit $s = \sin(x)$ folgt $2 - 2s^2 + 4s = 3$ oder $s^2 - 2s - 1 = -3/2$ und quadratisch ergänzt $(s-1)^2 - 1 - 1 = -3/2$, $(s-1)^2 = 1/2$ und $s = \pm\sqrt{1/2} + 1$. Lösung kleiner gleich 1, also $s = 1 - \sqrt{1/2}$ oder zurücksubstituiert $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 0.2929$, damit $\text{arc}(x) = \arcsin(0.2929) = 0.29725$ oder $17.03°$. Ebenso $x = 180 - 17.03 = 162.97°$ oder 2.8444.
(c) Zwei Faktoren, Nullproduktsatz: jeder Faktor ist null. Somit zwei Gleichungen: 1) $(\sqrt{3} + \tan(x)) = 0$ und 2) $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \cos(2x))$.
1) aus $\tan(x)) = -\sqrt{3}$ folgt $x = -60°$ oder $x = 120° + k \cdot 180$. 2) $\cos(2x)) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, damit $2x_1 = 45$ und $x_1 = 22.5 + k \cdot 180$ und $2x_2 = 360 - 45 = 315$ und $x_2 = 157.5 + k \cdot 180$.
(d) wir setzen in $\cos(\frac{x}{2}) - \cos(x) + 2 = 0$ die Halbwinkelformel ein: $\frac{1+\cos(x)}{2}) - \cos(x) + 2 = 0$, mal 2: $1 + \cos(x) - 2\cos(x) + 4 = 0$ und $\cos(x) = 5$. Daraus resultiert die leere Menge Ł =, denn der Wertebereich des Kosinus ist $[-1, 1]$.
(e) $\tan(2x) = \cos(x)$ oder $\tan(y) = \cos(y/2)$, Halbwinkelsatz $\cos(y/2) = \sqrt{(1+\cos(y))/2}$, damit $\tan(y) = \sqrt{(1+\cos(y))/2}$ oder $\sin(y)/\cos(y) = \sqrt{\frac{1+\cos(y)}{2}}$, quadrieren $2\sin(y)^2 = \cos(y)^2(1 + \cos(y)) = 2(1-\cos(y)^2)$, zur Übersicht $c := \cos(y)$, $2(1-c^2) = c^2(1+c)$, umformen $c^2(1+c) - 2(1-c)(1+c) = 0 = (1+c)[c^2 - 2(1-c)]$. Erster Linearfaktor $(c-1) = 0$ oder $c_1 = -1$. Sodann $c^2 - 2(1-c) = 0$ oder $c^2 + 2c - 2 = 0$, quadratisch ergänzt $(c+1)^2 - 1 - 2 = 0$, $(c+1)^2 = 3$, $c + 1 = \pm\sqrt{3}$, $c_2 = \sqrt{3} - 1$ (andere Lösung nicht zulässig, da $-\sqrt{3} - 1 < -1$.
Aus $c_1 = -1 = \cos(y)$ folgt $y = \pi$ und $x = \pi/2$. Damit auch $x = 2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$. Zweite Lösung (numerisch): $\cos(y) = \sqrt{3} - 1$ und $y = \arccos(\sqrt{3} - 1) = 0.749$ und $x = 0.749/2 = 0.3747$. Die zweite Lösung ist $(2\pi - 0.749)/2 = 2.767$.

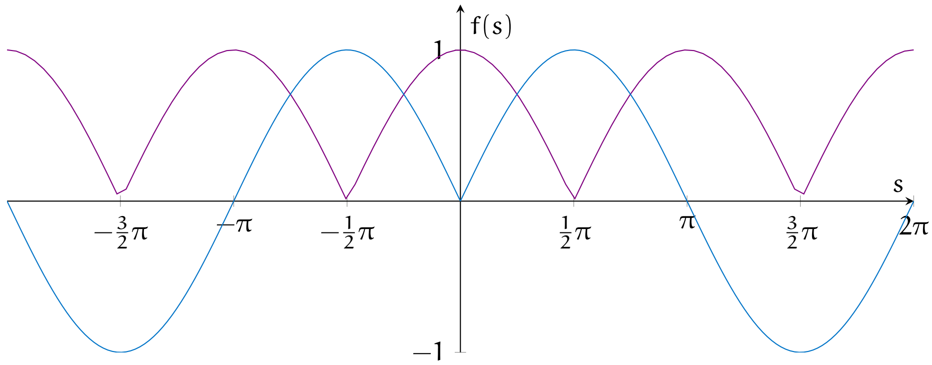
0.15 Lösen Sie die Gleichung $\cos(x) - 2\cos(x)^2 = 0$ in der Definitionsmenge $D = [0, 3\pi]$. [54‰]

15 Wir faktorisieren und erhalten $\cos(x)(1 - 2\cos(x)) = 0$, jeder Faktor ist null: $\cos(x) = 0$, damit $x = \{\pi/2, 3/2\pi, 5/2\pi\}$. Und $\cos(x) = 1/2$, bekanntlich bei $45°$, d.h. $\pi/4$. Somit $x = \{\pi/4, 5/4\pi, 9/4\pi, 13/4\pi\}$.

0.16 Bestimmen Sie c in $y = \cos(2x) + c$ so, dass diese Kurve die Kurve $y = \sin(2x)$ im ersten Quadranten berührt. [71‰]

16 Gleichsetzen $\cos(2x) + c = \sin(2x)$. Quadrieren, um $\sin()$ oder $\cos()$ zu ersetzen: $\cos(2x)^2 + 2c\cos(2x) + c^2 = \sin(2x)^2 = 1 - \cos(2x)^2$. Wir nennen $\cos(2x) = q$, damit $2q^2 + 2cq + c^2 - 1 = 0$. Quadratische Gleichung, Berührung, wenn Determinante $D = 0$, also $D = b^2 - 4ac$, hier $D = 4c^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c^2 - 1) = 0$ und weiter $c^2 - 2c^2 + 2 = 0$ und $c^2 = 2$ und $c = \pm\sqrt{2}$. Erster Quadrant heisst $c = \sqrt{2}$.

0.17 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f : y = |\cos(x)|$ und $g : y = \sin(|x|)$. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $|\cos(x)| = \sin(|x|)$ [67‰].



17

Die Lösungen sind $x_1 = \pi/4 + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$, $x_2 = 3\pi/4 + k \cdot 2\pi$, $x_3 = -\pi/4 - k \cdot 2\pi$ und $x_4 = -3\pi/4 - k \cdot 2\pi$.

0.18 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $6\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$ im Intervall $[-\pi, 3\pi]$. [50‰]

18 Das Intervall ist $[-3.1459, 9.425]$. Quadratische Gleichung $6\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$ oder $\sin^2(x) + \frac{1}{6}\sin(x) - 1/3 = 0$ ergänzen $(\sin(x) + \frac{1}{12})^2 - 1/144 - 1/3 = 0$ oder $\sin(x) + \frac{1}{12} = \frac{49}{144}$, damit $\sin(x) = -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} = \{6/12, -8/12\}$. Damit $x_1 = \arcsin(0.5) = \pi/6$ und $x_2 = \arcsin(-2/3) = -0.7297$. Die komplementäre Lösungen $x_3 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ und $x_4 = 3.1415 - (-0.7297) = 3.8712$. Hinzukommen noch die periodischen Nullstellen: $x_5 = \pi/6 + 2\pi = 13\pi/6$, $x_6 = 5\pi/6 + 2\pi = 17\pi/6$, $x_7 = -0.7297 + 2\pi = 5.5535$ und $x_8 = 3.8712 - 2\pi = -2.4112$.

Index