Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Teil II
Arithmetik und Mengenlehre

14. Februar 2022

Vorwort

Der Teil Arithmetik und Mengenlehre legt die Basis für die Algebra, in der vor allem Gleichungen betrachtet werden und Analysis, die Funktionen und analytische Geometrie umfasst.
Wir beginnen mit Mengenlehre, die einen weitreichenden Rahmen für die ganze Mathematik darstellt und zur Zeit ihrer Entwicklung die Hoffnung eines neuen Fundaments der Mathematik verhiess. Die Mengenlehre vermittelt einen abstrakten Umgang mit Dingen, die real oder gedacht sein können, definiert die Zahleingenschaft von Mengen und damit einen Zugang zu den Grundoperationen. Sie weist eine Nähe zur Logik auf, die etwa zur selben Zeit von der Philosophie zur Mathematik gewechselt hat. Die Mathematisierung der Logik wiederum ist die Basis der heutigen Computer, welche die Schalterlogik verwenden.
Die Arithmetik ist die Kunst des Rechnens, des Rechnens mit Zahlen und mit Buchstaben oder Variablen. Es werden die vier Stufen der Operationen eingeführt und die Kombination der Operationen. Dabei kommen immer wieder die wichtigen Eigenschaften von Verbinden, Vertauschen und Verteilen vor. Man nennt sie, etwas weniger eingänglich, aber häufiger Assoziation, Kummutation und Distribution.
Zahlen gehören zu unterschiedlichen Teilmengen. Vom Abzählen der Finger, über die Einführung der Null und der negativen Zahlen, über Brüche und irrationale Zahlen gelangt man zu den reellen Zahlen. Diese sogenannten "Körper" besitzen wiederum unterschiedliche Eigenschaften. Viel weiter unten werden wir dann noch über die reellen Zahlen hinaus neue Zahlen einführen, die komplexen Zahlen.
Für beflissene Interessierte gibt es einen ganz kleinen Einblick in die Realisierung von mathematischen Operationen in Computer und in die Rechnung mit Resten. Diese findet sich in der Kryptographie, der Kunst des Verschlüsselns von Geheimschriften, wieder.
Gute Arbeit!

Feldmeilen, 14. Februar 2022 *Claudio Franzetti*

Organisationshilfe

- * (oder blauer Text) bedeutet Stoff für das "erweitertes Niveau" gemäss Reglement
- ** Zusatzstoff für besonders Interessierte

Inhaltsverzeichnis

II Arithmetik und Mengenlehre 1

7 Mengenlehre

7.1 Menge und Elemente . . . 7-0
7.2 Teilmenge und leere Menge . . . 7-1
7.3 Mengenoperatoren . . . 7-2
7.3.1 Durchschnitt, Schnittmenge . . . 7-2
7.3.2 Vereinigung . . . 7-3
7.3.3 Restmenge oder Differenzmenge . . . 7-4
7.3.4 Das Komplement . . . 7-4
7.3.5 Euler-Venn-Diagramme . . . 7-5
7.3.6 Produkt von Mengen . . . 7-5
7.3.7 Die Potenzmenge** . . . 7-6
7.3.8 Verknüpfung von Operationen . . . 7-6
7.4 Relation, Abbildung, Funktion . . . 7-8
7.4.1 Mächtigkeit einer Menge . . . 7-8
7.4.2 Relationen, Pfeildiagramm** . . . 7-9
7.4.3 Aequivalenzrelation** . . . 7-10
7.4.4 Abbildung, Funktion . . . 7-11
7.5 Mathematische Logik** . . . 7-13
7.5.1 Aussagen . . . 7-13
7.5.2 Verknüpfungen . . . 7-14
7.5.3 Eigenschaften . . . 7-17
7.5.4 De Morgan'sche Formeln . . . 7-18
7.5.5 Aussageformen . . . 7-18
7.5.6 Verknüpfung von Aussageformen . . . 7-19
7.5.7 Quantoren und Relationen . . . 7-20
7.5.8 Beweise . . . 7-21

8 Die Natürlichen und Ganzen Zahlen

8.1 Begriffe . . . 8-0
8.1.1 Axiome von Peano** . . . 8-0
8.1.2 Ganze Zahlen . . . 8-1
8.1.3 Ordnungsrelation . . . 8-1
8.1.4 Einschub: Repetition Zahlendivision . . . 8-2
8.2 Primzahlen . . . 8-2
8.2.1 Fundamentalsatz . . . 8-2
8.2.2 Primfaktorzerlegung . . . 8-3

8.3 Teiler und Vielfache . . . 8-4
8.3.1 Grösster gemeinsamer Teiler ggT . . . 8-4
8.3.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV . . . 8-7
8.3.3 Zusammenhang ggT und kgV . . . 8-7
8.3.4 Ein paar Teilbarkeitssätze . . . 8-8
8.4 Operationen erster Stufe . . . 8-9
8.4.1 Die Addition . . . 8-10
8.4.2 Die Subtraktion . . . 8-11
8.4.3 Verknüpfung von Addition und Subtraktion . . . 8-12
8.5 Operationen zweiter Stufe . . . 8-13
8.5.1 Die Multiplikation . . . 8-13
8.5.2 Die Division . . . 8-18
8.5.3 Brüche . . . 8-20
8.5.4 Erweitern und Kürzen, gleichnamig . . . 8-20
8.5.5 Verknüpfungen der vier Rechenarten . . . 8-23
8.6 Prozentrechnen und Proportionen . . . 8-26

9 Reelle Zahlen
9.1 Rationale Zahlen . . . 9-0
9.2 Mengen reeller Zahlen . . . 9-1
9.2.1 Reelle Zahlen . . . 9-2
9.2.2 Dichte der Zahlen . . . 9-3
9.2.3 Intervalle . . . 9-3
9.3 Grundoperationen . . . 9-4
9.4 Operationen dritter Stufe . . . 9-6
9.4.1 Potenzen . . . 9-6
9.4.2 Wurzeln . . . 9-10
9.5 Operationen vierter Stufe . . . 9-12
9.5.1 Exponentialfunktion . . . 9-12
9.5.2 Logarithmus . . . 9-14
9.6 Reihenfolge der Operationen . . . 9-17
9.7 Zahlendarstellung . . . 9-18
9.7.1 Additionssysteme . . . 9-19
9.7.2 Hybride Systeme . . . 9-20
9.7.3 Positionssysteme . . . 9-20
9.7.4 Addierer** . . . 9-23
9.7.5 Rechnen mit Resten** . . . 9-25
9.7.6 Anwendungen . . . 9-29
9.7.7 Reelle Zahlen im Zehnersystem . . . 9-30
9.7.8 Rechengenauigkeit . . . 9-31
9.7.9 Runden von Zahlen . . . 9-32
9.7.10 Grössen . . . 9-32

Teil II

Arithmetik und Mengenlehre

Kapitel 7

Mengenlehre

7.1 Menge und Elemente

Die gesamte moderne Mathematik ist in der Sprache der Mengenlehre formuliert und baut auf ihren Einsichten auf. Die meisten mathematischen Objekte lassen sich als Mengen definieren. Allerdings muss man beachten, dass im alltäglichen Sprachgebrauch das Wort "Menge" viel mehr Bedeutungen aufweist als wir hier benötigen. Deshalb beginnt man mit einer Definition.

Definition 1. Unter einer *Menge* verstehen wir die Zusammenfassung gewisser, wohlunterschiedener Objekte, *Elemente* genannt, zu einer Einheit.

Ein erstes Beispiel sind die Wochentage, also Montag, Dienstag, ..., Sonntag, welche die Menge M bilden.
Für Mengen gibt es drei Darstellungsmöglichkeiten:

(1) mit Worten: M sind die "Tage der Woche",

(2) als Aufzählung: $M = \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Do}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Sa}, \mathrm{So}\}$,

(3) als Beschreibung: $M = \{x \mid x \text{ ist ein Wochentag}\}$

Anmerkung 7.1. Mengen werden immer in geschweiften Klammern geschrieben, also $\{\,\}$.

Ein zweites Beispiel sind die Buchstaben des Wortes "Schiff" als Menge V. Also $V = \{s, c, h, i, f\}$ oder $\{x \mid x \text{ ist ein Buchstabe im Wort "Schiff"}\}$.
Der Buchstabe f erscheint nur einmal in der Menge, auch wenn er zweimal im Wort auftritt.
Die Reihenfolge der Element ist nicht bedeutsam. Deshalb gilt $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$.

7.2 Übung Ist ein Sammelsurium wie:

$$\begin{aligned}\{&\text{Charly Chaplin},\\ &\text{"yeah yeah"},\\ &\text{mein Bleistift},\\ &\text{Planet Uranus},\\ &\text{die Lichtgeschwindigkeit}, 19\}\end{aligned}$$

eine Menge im Sinne der Definition? (i) Es ist eine Zusammenfassung. (ii) Die Elemente sind gewiss, man kann sie bestimmen. (3) Und sie sind klar zu unterscheiden, es hat keine Mehrfachnennungen. Also, es ist eine Menge. ◁

Die Tatsache, dass ein Element zu einer Menge gehört oder nicht, wird durch ein spezielles Zeichen dargestellt:

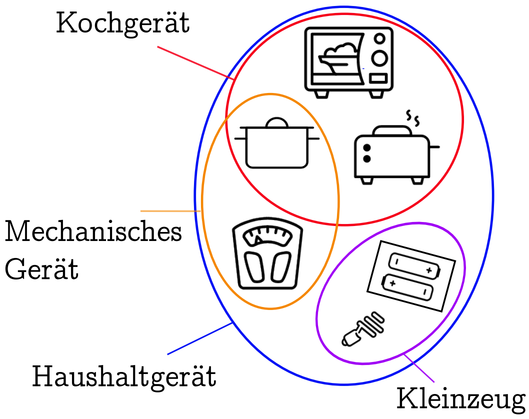
Definition 2. Es sei A eine Menge.

- Falls x eine Element von A ist, schreibt man $x \in A$ und sagt: "x Element von A".
- Falls x *nicht* Element von A ist, schreibt man $x \notin A$ und sagt "x ist nicht Element von A".

Das Zeiche $\in$ verbindet also Element und Menge, das folgende Gleichheitszeichen hingegen Menge und Menge.

Definition 3. Zwei Mengen A und B heissen *gleich*, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt. Geschrieben $A = B$.

7.3 Übung Sind zwei Mengen der drei folgenden gleich? $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ und $C = \{3, 1, 2, 4\}$?
$A \neq B$, denn B enthält das Element 1 nicht. $A = C$, denn unabhängig der Reihenfolge sind nur die genau gleichen Elemente vorhanden. $\triangleleft$



7.4 Übung In der Abbildung sind ein paar Haushaltgeräte gezeigt. Wir haben jeweils ein Seil, eine Schlinge, um die Geräte gelegt, die gleiche Eigenschaften haben. So mechanisches Gerät, das keinen Strom braucht, Gerät zum Kochen, eine Körperwaage, ein Satz Batterien und eine Leuchtstoffröhre. Zum Teil gehören die einzelnen Elemente zu nur einem Kreis, der Kochtopf anderseits ist sowohl ein mechanisches als auch ein Kochgerät. Wo gehört eine Taschenlampe und ein Stabmixer hin? Die Taschenlampe ist ein Kleinzeug, der Mixer ein Kochgerät, das nicht mechanisch ist. $\triangleleft$

7.2 Teilmenge und leere Menge

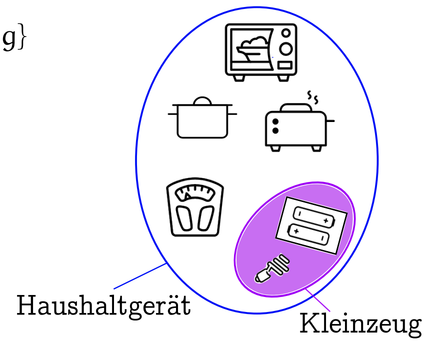
Betrachten wir die Menge der Werktage $N = \{\text{Mo}, \text{Di}, \text{Mi}, \text{Do}, \text{Fr}, \text{Sa}\}$. Im Vergleich zu den Wochentagen fehlt nur der Sonntag. Die Werktage N sind eine sogenannte Teilmenge oder Untermenge der Wochentage M. Dies kann man durch eine Zeichen symbolisieren.

Definition 4. Wir sagen, die Menge A ist eine Teilmenge von B und schreiben $A \subset B$, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Wenn dies nicht zutrifft schreiben wir $A \not\subset B$.

Wenn A eine Teilmenge von B ist, dann gilt das Umgekehrte nicht, also B ist dann keine Teilmenge von A.

7.1 Übung Ist die folgende Behauptung $\{a, b, c\} \subset \{a, c, d, f, g\}$ richtig? Antwort: Nein, denn das Element b ist in der zweiten Menge nicht enthalten. $\triangleleft$

7.2 Übung In der Abbildung sehen wir das Kleinzeug als Teilmenge des Haushaltsgeräts. Das Kochgerät und das mechanische Gerät sind natürlich auch Teilmengen. Die Schlinge um Batterie und Lampe ist vollständig innerhalb der Schlinge des Haushaltgeräts. $\triangleleft$



Definition 5. Die *leere Menge* $\varnothing$ ist die Menge, die kein Element enthält. Formell,

$$\varnothing = \{\} = \{x \mid x \neq x\}.$$

Die leere Menge ist nicht "nichts". Es ist wie ein leeres Glas, das keine Flüssigkeit enthält. Die leere Menge spielt eine wichtige Rolle in der Mengenlehre, entsprechend der Null in der Arithmetik oder Rechnen mit Zahlen.
Als "echte" Teilmenge von B gilt eine Menge A, die nicht gleich A ist, also $A \neq B$ und die nicht leer ist, also $A \neq \varnothing$.

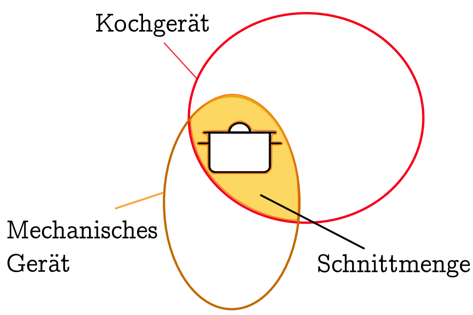
7.3 Mengenoperatoren

7.3.1 Durchschnitt, Schnittmenge

Die Buchstaben bestehen aus Konsonanten und Vokalen. Die Menge der Konsonanten heisst K. Oben haben wir die Menge der Buchstaben im Wort "Schiff" bestimmt als $V = \{s, c, h, i, f\}$. Wenn wir nach den Buchstaben fragen, die sowohl in der Menge K als auch in der Menge V enthalten sind, so ist die Antwort $\{s, c, h, f\}$. Denn "i" ist ein Vokal.

Definition 6. Die *Schnittmenge* $A \cap B$ zweier Mengen A ("A geschnitten mit B") und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

7.1 Übung In unserem Beispiel besteht die Schnittmenge oder Durchschnitt aus dem Kochtopf, denn er gehört sowohl zur Menge der Kochgeräte als auch zur Menge der mechanischen Geräte. $\triangleleft$



Wenn zwei Mengen keine gemeinsamen Elemente haben, z.B. die Menge der Mädchen einer Klasse und die Menge der Knaben, dann nennt man die zwei Mengen elementfremd.

Definition 7. Zwei Mengen A und B heissen *disjunkt* oder *elementfremd* oder durchschnittsfremd, wenn sie kein gemeinsames Element besitzen.

$$\text{A und B sind disjunkt:} \quad A \cap B = \varnothing$$

Mehrere Mengen heissen *paarweise disjunkt*, wenn beliebige zwei von ihnen disjunkt sind.

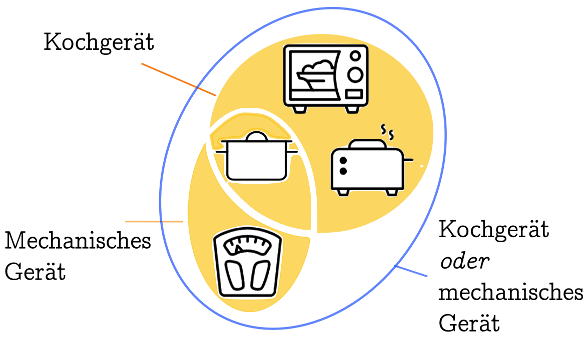
7.2 Übung Aus der Abbildung sehen wir, dass Kleinzeug sowohl mit dem Kochgerät als auch mit dem mechanischen Gerät disjunkt ist, also keine gemeinsamen Element aufweist. Kochgerät und mechanisches Gerät sind aber nicht disjunkt. ◁

7.3.2 Vereinigung

Bei der Vereinigung fassen wir zwei oder mehr Mengen zu einer neuen Menge zusammen, die dann alle Elemente beider Mengen enthält.

Definition 8. Die *Vereinigungsmenge* $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören: $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B \text{ (oder beide)}\}$

Anmerkung 7.3. Ist ein Element in beiden zu vereinigenden Mengen vorhanden, so darf es nur einmal in der Vereinigungsmenge enthalten sein. Sonst widerspricht es der Definition der Menge. In der Abbildung sehen wir die Vereinigung von Küchengerät und mechanischem Gerät. Die vereinigte Menge enthält vier Elemente.



Es gelten folgende Regeln:

- Vertauschung $A \cup B = B \cup A$
- Gleichmächtigkeit $A \cup A = A$
- Identität $A \setminus \varnothing = A$ und $A \cup \varnothing = A$

Die Vertauschung ist klar, nach der der Vereinigung ist nicht entscheidbar, ob man zuerst A und dann B oder umgekehrt vorgegangen ist.
Die Gleichmächtigkeit folgt aus der Tatsache, dass eine Menge nur jeweils ein wohlunterscheidbares Element enthalten darf.
Die erste Aussage zur Identität ist "A ohne leere Menge" ist wiederum A. A geschnitten mit der leeren Menge ist die leere Menge und A vereinigt mit der leeren Menge bleibt A. Die leere Menge ist das neutrale Element oder Nullelement.
Zudem gilt

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Denn jede Menge enthält auch die leere Menge.

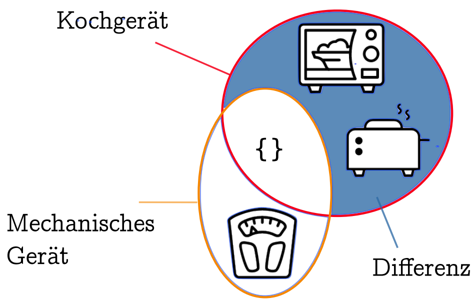
7.4 Übung In der Abbildung sehen wir die Vereinigung der Teilmengen Kochgerät und mechanisches Gerät. Es wird eine Schlinge um die beiden Mengen gelegt. Man beachte, dass es bei der vereinigten Menge “oder” heisst. Damit ist gemeint, dass die Elemente entweder aus der einen Menge oder aus der anderen oder der gemeinsamen stammen. $\triangleleft$

7.3.3 Restmenge oder Differenzmenge

Bei dieser Operation wollen wir diejenigen Elemente aus einer Menge A herausnehmen, die auch in einer Menge B enthalten sind. Beispielsweise kann man aus den Wochentagen alle Werktage wegnehmen. Dabei bleibt nur der Sonntag als Rest übrig.

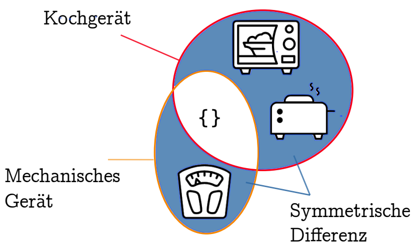
Definition 9. Die *Differenzmenge* (*Restmenge*) $A \setminus B$ (“A ohne B”) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A, nicht aber zu B gehören:

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



7.5 Übung Die Menge der Schultage, an denen Franz frei hat, ist $F = \{Mi, Fr\}$. Die Menge der Werktage ist W. Bestimme die Menge R der Werktage, an denen er nicht frei hat. Lösung: $R = W \setminus F = W \setminus \{Mi, Fr\} = \{Mo, Di, Do, Sa\}$. $\triangleleft$

7.6 Übung Wir bilden die Differenz von Küchengerät ohne mechanisches Gerät. Die Restmenge besteht aus zwei Elementen, nämlich Mikrowellenofen und Toaster. Der Topf ist weg. $\triangleleft$



7.7 Übung Bei der *symmetrischen Differenz* werden zwei Menge zuerst vereinigt und dann ihre Schnittmenge in Abzug gebracht. Hier ist es der Kochtopf, der nicht in der Restmenge vorkommmt. Es bleiben also die Waage von den mechanischen Geräten und Mikrowellenofen und Toaster von den Kochgeräten. $\triangleleft$

7.3.4 Das Komplement

Oft ist es sinnvoll, den zu betrachtenden Bereich der Elemente generell festzulegen und damit sinnvoll einzugrenzen, z.B. wenn man nur Mengen von natürlichen Zahlen betrachten will. Ein solcher Bereich wird Grundmenge G genannt[1].

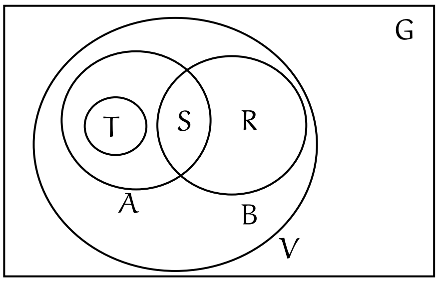
Definition 10. Ist A Teilmenge einer festgelegten Grundmenge G, dann ist das *Komplement* von A definiert als $G \setminus A$. Es wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.

7.8 Übung Es ist G die Menge der Haushaltgeräte von oben. Was ist das Komplement der Kochgeräte? Die Haushaltgeräte ohne Kochgeräte, das sind {Körperwaage, Batterien, Leuchtstoffröhre}. $\triangleleft$

[1] Auch Universum U.

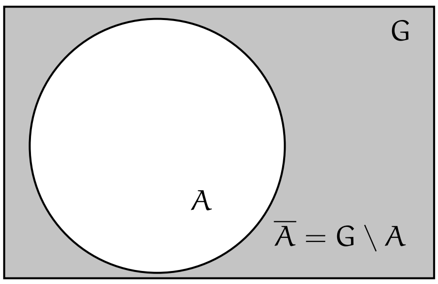
7.3.5 Euler-Venn-Diagramme

Ein nützliches Hilfsmittel zum Verständnis sind bildliche Darstellungen. Mengen werden als abgeschlossene Kurven – es müssen nicht exakte Kreise sein – dargestellt. Wir haben sie schon benutzt. Zum einen werden die Elemente darin dargestellt oder eben auch nicht, besonders wenn es sehr viele sind. In der folgenden Abbildung sieht man verschiedene gesschlossene Kurven, also Mengen, die in unterschiedlichen Formen daherkommen. Zum Beispiel schneiden sich die Mengen A und B und ergeben die Schnittmenge S. Die Menge T ist ganz in A eingeschlossen und ist deshalb eine Teilmenge von A. R könnte man als Restmenge von B ohne A, also $B \setminus A$ verstehen. V wiederum ist die Vereinigung von A und B.



Ein allgemeines Euler-Venn-Diagramm

7.9 Übung Wir zeichnen ein Euler-Diagramm für das Komplement von A. Es müssen nicht schöne Kreise oder Rechtecke sein, es reicht wenn es geschlossene Linien sind. Ein Komplement setzt eine Grundmenge G voraus, die den äusseren Rahmen festlegt. Was uns interessiert ist alles innerhalb dieser Menge. $\overline{A}$ ist die Menge G ohne A. Wir färben also alles ein ausser A:



Aus der Figur können wir auch verstehen, dass $G \setminus \overline{A}$ gleich A sein muss. ◁

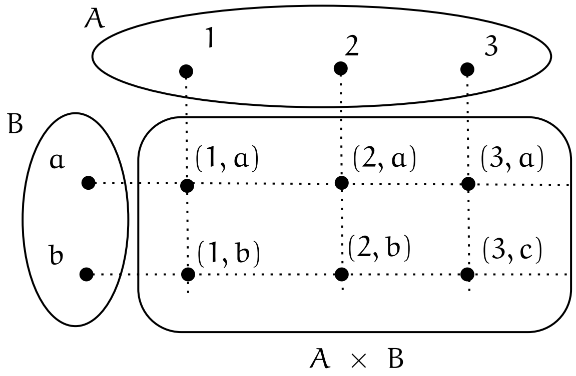
7.3.6 Produkt von Mengen

Das Produkt zweier Mengen heisst nach René Descartes das kartesichse Produkt.

Definition 11. Das kartesische Produkt $A \times B$ (lies "A kreuz B") zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei a ein Element aus A und b ein Element aus B ist. Dabei wird jedes Element aus A mit jedem Element aus B kombiniert. Formal

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

7.10 Übung $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1, 2\}$ dann ergibt sich für das Produkt $A \times B$ die Menge mit den Paaren $\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$. Anderseits ist aber $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\} = C$.



Die Elemente der Produktmenge $A \times B$ sind geordnet. Das heisst, dass $(1, a) \neq (a, 1)$ ist. Somit gilt auch $A \times B \neq B \times A$. $\triangleleft$

7.11 Übung Eine Wohngemeinschaft mit den Mitgliedern $W = \{C, R, L\}$ bewohnt ein Haus mit 3 Schlafzimmern $S = \{1, 2, 3\}$. Welche Möglichkeiten der Zimmerzuteilung gibt es? Antwort: das kartesische Produkt bildet alle Paare der Element der zwei Mengen ab. Es gilt $K = W \times S = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (R, 1), \ldots, (L, 3)\}$. Es sind 9 Möglichkeiten. $\triangleleft$

7.3.7 Die Potenzmenge**

Wie viele Teilmengen hat eine Menge und wie sehen sie aus? Wir gehen von einer Menge $M = \{a, b\}$ aus und können folgende Teilmengen bestimmen: $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ also vier. Die leere Menge ist immer eine Teilmenge.

Definition 12. Zu jeder Menge A gibt es eine Menge, *Potenzmenge* von A genannt und mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet, die genau alle Teilmengen von A als Elemente enthält, $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \cap A\}$.

7.12 Übung Wir bestimmen die Potenzmenge der Menge $Z = \{a, b, c, d\}$. Es ist ratsam, etwas systematisch vorzugehen und die Antwort ein bisschen zu strukturieren. Wir beginnen beim Einfachsten und gehen dann zum Komplizierteren:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(Z) = \{&\varnothing,\\ &\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},\\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\{b, d\}, \{c, d\},\\ &\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\},\\ &\{a, b, c, d\}\}\end{aligned}$$

Wir haben also 16 Teilmengen. Also die Potenzmenge einer Menge der Mächtigkeit 2 führt zu 4 Teilmengen und eine mit $|4|$ zu 16. Wenn man in obiger Zusammenstellung alle Elemente nicht zählt, die das Element d enthalten, dann resultiert für $|3|$? $\triangleleft$

Es gilt der Satz (und damit die Antwort auf obige Frage):

Satz 7.13. Ist A eine Menge der Mächtigkeit $|A|$, dann hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ genau $2^{|A|}$ Elemente.

7.3.8 Verknüpfung von Operationen

Die Operationen Durchschnitt, Vereinigung, Rest wirken auf Mengen und führen als Resultat wieder zu einer Menge. Deshalb kann man sich vorstellen, dass bei einer Operation wie $C = A \cap B$ und $E = D \cup C$ man schreiben kann: $E = D \cup (A \cap B)$.

Die folgenden Rechenregeln sind recht einfach aus den Euler-Diagrammen ableitbar. Die Verteilungsgesetze, auch Distributivgesetze genannt, sind nicht ganz so intuitiv.

Satz 7.14. Rechenregeln 1

Regel	Durchschnitt	Vereinigung
Vertauschen	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Verbinden	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Verteilen I	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Verteilen II	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
Identität	$A \cap G = A$	$A \cup \varnothing = A$
Idempotenz	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$

Die folgenden Sätze sind ebenfalls recht einfach, und auch ein bisschen spitzfindig.

Satz 7.15. Rechenregeln 2

(1) $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$

(2) $C \subset A$ und $C \subset B$, dann: $C \subset (A \cap B)$

(3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(4) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

(5) $A \setminus \varnothing = A$, $A \setminus A = \varnothing$

(6) $(A \setminus B) \subset A$,

(7) $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(8) $A \cup (B \setminus C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

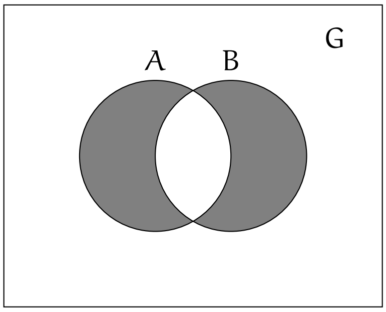
Die nächsten zwei Ausdrücke sind hingegen interessant, weil sie eine Entsprechung in der Logik aufweisen.

Satz 7.16. De Morgan'sche Gesetze

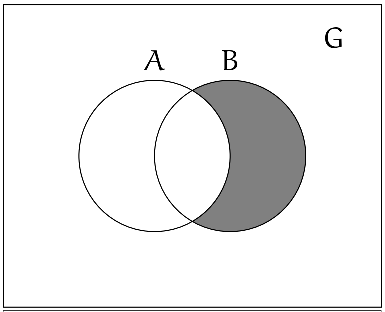
(1) $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$

(2) $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$

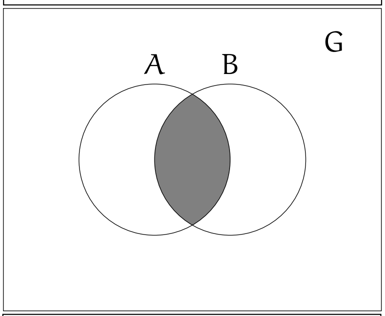
7.17 Übung Es folgen 8 Abbildungen. Man ordne ihnen die folgenden Ausdrücke zu:
(a) $B \setminus A$ **(b)** $A \cup B \setminus (A \cap B)$ **(c)** $A \cap B$ **(d)** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(e)** $A \cap B \cap C$
(f) $C \setminus (A \cap B)$ **(g)** $(B \cap C) \setminus A$ **(h)** $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$



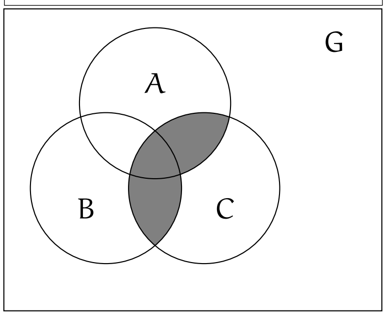
1



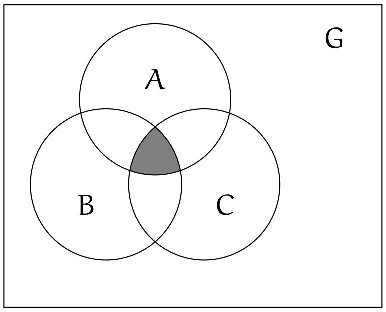
2



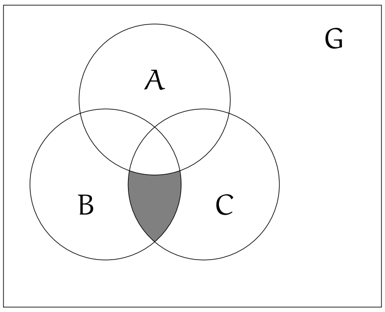
3



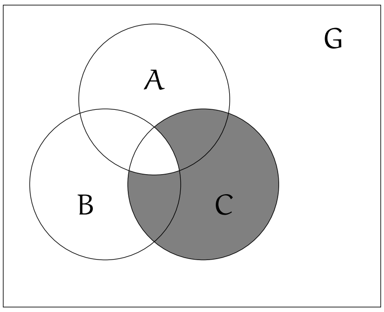
4



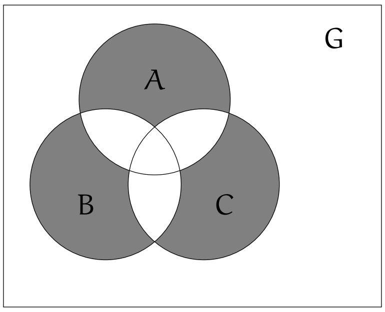
5



6



7



8

Die Lösungen sind: (1, b), (2, a), (3, c), (4, d), (5, e), (6, g), (7, f) und (8, h). ◁

7.4 Relation, Abbildung, Funktion

7.4.1 Mächtigkeit einer Menge

Wir vergleichen zwei Mengen und setzen folgendes fest.

Definition 13. Zwei Mengen A und B sind *gleichmächtig*, wenn man eine Zuordnung machen kann, indem jedem Element von A genau eines von B entspricht und jedem von B genau eines von A.

Beispiel: Die Menge der Kleinbuchstaben K und die Menge der Grossbuchstaben G sind gleichmächtig, zumindest im schweizerischen Zeichensatz.

Definition 14. Für endliche Mengen A ist die *Mächtigkeit* gleich der Anzahl der Elemente der Menge; das ist eine natürliche Zahl einschliesslich der Null. Man schreibt $|A|$.

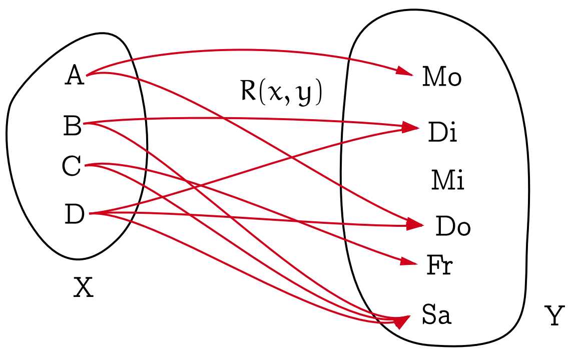
Was der Erfinder der Mengenlehre damit zeigen wollte, ist, dass die Mengen eine *Zahleigenschaft* und speziell, dass gleichmächtige Mengen dieselbe Zahleigenschaft haben. Zwei Mengen $G = \{\triangle, \square, \clubsuit\}$ und $K = \{a, b, c\}$ haben die Zahleigenschaft 3.
Wenn wir die zwei Mengen G und K vereinen zu einer neuen Menge $S = G \cup K$, so ist $|S| = |G| + |K| = 6$. Denn $G \cap K = \varnothing$. Mit der Vereinigung von elementfremden Mengen lässt sich die Addition von natürlichen Zahlen verbinden.
Die Multiplikation von natürlichen Zahlen entspricht der Vereinigung n gleichmächtiger Mengen mit Mächtigkeit k, die keine gemeinsamen Element besitzen. Die Mächtigkeit der vereinigten Menge V ist dann $|V| = n \cdot k$.

7.1 Übung Wir betrachten die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, a, b\}$, $B = \{2, 6, b, c, s\}$ und $C = \{x, y, z, 25\}$. Bestimme die Mächtigkeiten. Das ist ganz einfach, man zählt die Elemente und bekommt: $|A| = 6$, $|B| = 5$ und $|C| = 4$.
Jetzt betrachten wir die Vereinigungen $Q = A \cup B$ und $P = A \cup C$. Was sind deren Mächtigkeiten? Die Menge Q ist $\{1, 2, 3, 4, a, b, c, s\}$. Somit $|Q| = 8$. Die Menge P ist $\{1, 2, 3, 4, a, b, x, y, z, 25\}$, woraus $|P| = 10$ folgt. A und C sind elementfremd, disjunkt. A und B nicht, denn sie haben gemeinsame Elemente. Es liegt der Schluss nahe, dass die Mächtigkeit vereinter elementfremder Mengen gleich der Summe der Mächtigkeiten der zu vereinigenden Mengen ist. Hier gilt also $|P| = |A| + |C|$. Damit ist ein Zusammenhang zwischen Mengenlehre und der Addition hergestellt. $\triangleleft$

Satz 7.2. Für elementfremde (disjunkte) Mengen $A \cap B = \varnothing$ gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

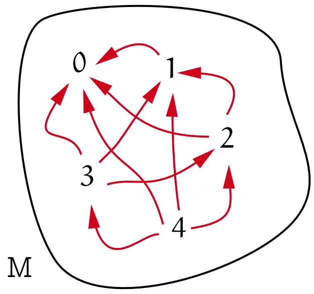
7.4.2 Relationen, Pfeildiagramm**

Wir knüpfen an Abschnitt 7.3.6 an, wo wir das Produkt zweier Mengen beschrieben haben als Menge von geordneten Paaren. Das Produkt ist eine Relation. Wir werden das noch erklären.
Wir nehmen die vier Studierenden in der Menge $X = \{A, B, C, D\}$ und die Menge der Werktage $Y = \{Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sa\}$. Es ist $x \in X$ und $y \in Y$, so heissen die Elemente. Eine Beziehung oder Relation $R(x, y)$ zwischen x und y ist beispielsweise: “für x ist der y-Tag schulfrei”. Das Mengen-und-Pfeildiagramm sieht wie folgt aus:



Relation $R(x, y)$

Ein weiteres Beispiel ist die “grösser als”-Beziehung zwischen Zahlen. In einer Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ soll diese Relation $R(x, x)$ als Pfeildiagramm dargestellt werden. Folgendes Resultat: Die Pfeile drücken z.B. aus, dass 4 grösser als 2 ist.



Relation $R(m, m)$

Eigentlich nicht viel Neues bis auf die Bedeutung der Pfeile als Relation.

Satz 7.3. Durch eine Relation R zwischen den Mengen X und Y ist eine Teilmenge von $X \times Y$ bestimmt, $R \subset X \times Y$.

Anmerkung 7.4. Für eine Relation $R(x, x)$ ist $R \subset X \times X$.

Definition 15. Eine Relation ist *symmetrisch*, wenn $R(x, y)$ und $R(y, x)$ gilt.

Beispiel: "verheiratet sein": wenn A mit B verheiratet ist, dann ist auch B mit A verheiratet.

Definition 16. Eine Relation ist *transitiv*, wenn aus $R(x, y)$ und $R(y, z)$ auch $R(x, z)$ folgt.

Beispiel: "Älter sein", wenn A älter als B und B älter als C ist, dann ist auch A älter als C. Gegenbeispiel: "Mutter sein", wenn A Mutter von B und B Mutter von C, dann ist A nicht die Mutter von C (sondern die Grossmutter).

Definition 17. Eine Relation ist *reflexiv*, wenn $R(x, x)$ gilt.

Beispiel: "verwandt sein", denn jeder ist mit sich selbst verwandt. Gegenbeispiel: "Vater sein", also "x ist Vater von x" gilt nicht.

7.4.3 Aequivalenzrelation**

Diese Relation ist neben der Ordnungsrelation die wichtigste.

Definition 18. Eine auf der Menge M definierte Relation R heisst *Aequivalenzrelation*, wenn für alle Elemente von M gilt:

(1) R ist reflexiv ($R(x, x)$),

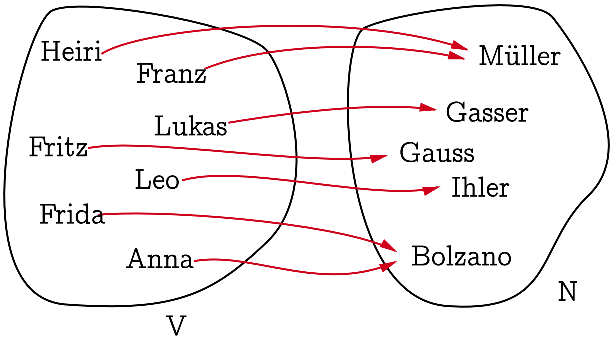
(2) R ist symmetrisch ($R(x, y) = R(y, x)$) und

(3) R ist transitiv ($R(x, z)$ wenn $R(x, y)$ und $R(y, z)$).

Beispiel: Die Gleichheit "=" ist eine Aequivalenzrelation zwischen linker und rechter Seite einer Gleichung.

7.4.4 Abbildung, Funktion

Als typisches Beispiel nehmen wir ein Pfeildiagramm, das die Vornamen von Studenten den Nachnamen zuordnet. Also



Die Pfeile verbinden jedes Elemente der Menge V, die Vornamen, mit einem Element der Menge N, den Nachnamen. Niemand hat zwei Familiennamen, aber je zwei Studenten besitzen denselben Namen. Diese Zuordnung nennen wir eine Abbildung. N ist das Abbild vom Urbild V.

Definition 19. Eine nach rechts eindeutige Relation f der Elemente einer Menge A zu den Elementen y einer Menge B, heisst *Abbildung*. Man schreibt $f : A \to B$.

Eine Abbildung ist somit ein Spezialfall der Relation. Der Begriff Funktion stammt aus den älteren Teilen der Mathematik. In der Mengenlehre setzt man folgende Bestimmung.

Definition 20. Eine *Funktion* von der Menge D in die Menge W ist eine Menge f, die folgenden Eigenschaften hat:

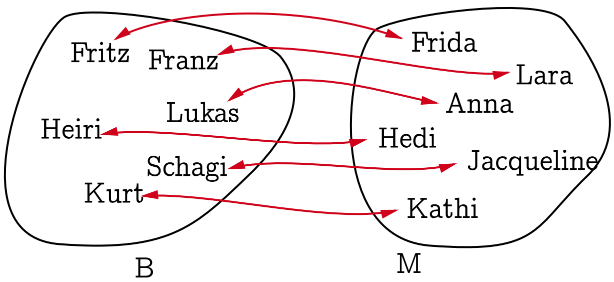
Zu jedem Element x der Menge D gibt es genau ein Element y von der Menge W, so dass das Paar (x, y) Element der Relation f ist.

D heisst *Definitionsbereich*, W *Wertebereich*.

Anmerkung 7.5. Damit erkennt man, dass ein Funktion eine Abbildung in eine Zahlenmenge ist.

Eindeutigkeit, Umkehrfunktion

Im Pfeildiagramm von Vor- und Nachnamen sehen wir, dass jeder Vorname zu genau ein Nachnamen passt. Kehrt man die Pfeile um, so erkennt man sogleich ein Problem. Von Müller gehen zwei Pfeile aus. Das heisst, wenn ich den Nachnamen kenne, weiss ich aber nicht eindeutig, ob Franz oder Heiri gemeint ist. Dieser Konstellation sagt man, dass sie nach links nicht eindeutig ist. Ein anders Beispiel könnte aus einem Tanzkurs stammen (Abbildung).



Im Pfeildiagramm ist es schon vorweggenommen: Die Pfeile lassen sich eindeutig umkehren, so dass auch jedem Element von M genau ein Element von B entspricht. Damit sind die Voraussetzungen der Funktion gegeben: Nicht nur existiert die Funktion $f : B \to M$ sondern auch die Funktion, oder Abbildung, $g : M \to B$.

Definition 21. X und Y sind zwei Mengen, für die es eine Abbildung f gibt, die X nach Y abbildet, $f\colon X \to Y$. Dann heisst f *eineindeutig*, wenn für alle $y \in Y$ genau je ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert.

Satz 7.6. Wenn für die zwei Mengen X und Y eine eineindeutige Abbildung $f : X \to Y$ existiert, dann existiert auch eine *Umkehrfunktion* oder *Inverse* $g : Y \to X$.

Anmerkung 7.7. Also, nicht jede Funktion oder Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung oder -funktion.

Anmerkung 7.8. Wenn g die Umkehrfunktion von f ist, so ist f die Umkehrfunktion von g.

Anmerkung 7.9. Zurückgreifend können wir sagen, dass der Definitionsbereich D einer Abbildung f und der Wertebereich W *gleichmächtig* sein müssen, damit die Abbildung *eineindeutig* ist. Man denke an die Tanzpaare.

Anmerkung 7.10. Aufgrund des gesagten kann man folgende Reihenfolge im Sinne der Spezialisierung feststellen:

$$\text{Relation} \to \text{Abbildung} \to \text{Funktion.}$$

Sprachgebrauch**

Alternativ gibt es folgenden Sprachgebrauch

Definition 22. Sei $f : M \mapsto N$ eine Abbildung. Dann heisst

(1) f *injektiv*, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt,

(2) f *surjektiv*, falls es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$,

(3) f *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist; d. h. f eineindeutig ist.

Wertetabelle

Anstatt die Zuordnung von Werten aus dem Definitionsbereich auf den Wertebereich graphisch darzustellen, ist es auch möglich, die Zuordnung (Relation, Abbildung, Funktion) als zweispaltige oder zweireihige Tabelle zu zeigen.

Definition 23. Unter einer *Wertetabelle* versteht man eine Tabelle mit zwei Spalten oder zwei Zeilen, in die Argumente und die dazugehörigen Werte einer Funktion oder Abbildung eingetragen werden.

Als Beispiel:

Vorname (Argument)	Nachname (Wert)
Heiri	Müller
Franz	Müller
Lukas	Gasser
Fritz	Gauss
Leo	Ihler
Frida	Bolzano
Anna	Bolzano

Oder für die Abbildung der ersten natürlichen Zahlen auf ihre Quadrate

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	1	4	9	16	25	36

7.5 Mathematische Logik**

7.5.1 Aussagen

Definition 24. Eine *Aussage* im Sinn der Logik ist ein sprachliches Gebilde (z.B. ein Satz) von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob es wahr oder falsch ist.

Anmerkung 7.1. Die Frage muss sinnvoll sein. Das heisst nicht, dass man über wahr oder falsch entscheiden können muss. Eine Vermutung ist auch eine Aussage, z.B. "Homer war eine Frau".

Sprache ist komplex und hat Nuancen. Betrachtet man eine Aussage: "Eine Primzahl ist gerade", dann hängt es von der Betonung ab, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Liest man: "*Eine* Primzahl ist gerade", so stimmt dies für die Zahle 2. Lies man aber "Eine *Primzahl* ist gerade", im Sinne von "alle Primzahlen", dann ist sie falsch.

Definition 25. Die Prädikate "wahr" w und "falsch" f nennt man *Wahrheitswerte*.

Definition 26. Die *Verneinung* oder *Negation* einer Aussage A ist diejenige Aussage $\neg A$ oder $\overline{A}$ ("nicht A"), die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist, und die genau dann falsch ist, wenn A wahr ist.

Diese Umkehrung des Wahrheitsgehalts ist nicht immer ganz einfach. Deshalb empfiehlt es sich folgendermassen zu argumentieren.

Formel 7.2. Negation $\neg A$ oder auch $\overline{A}$: "Es ist nicht so, dass die Aussage A gilt".

Satz 7.3. Satz vom ausgeschlossenen Dritten Von den beiden Aussagen A und $\neg A$ ist immer die eine wahr und die andere falsch.

Es gilt:

$$\neg(\neg A) = A \quad \text{oder} \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

7.5.2 Verknüpfungen

Elementare Aussagen lassen sich verknüpfen. Der Wahrheitswert der verknüpften Aussage hängt nur von den Wahrheitswerten der elementaren Aussagen ab.
Wir betrachten fünf Verknüpfungen.

Und-Verknüpfung

Definition 27. Die *Und-Verknüpfung* wird durch das Zeichen $\wedge$ dargestellt, man sagt “A und B”.

Satz 7.4. $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Formel 7.5. Wahrheitstafel Und

A	B	A ∧ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel: $A = [(6 = 2 \cdot 3) \wedge B = (6 < 7)]$ ist wahr, weil A und B wahr sind. $A = [(6 = 2 \cdot 3) \wedge B = (6 > 7)]$ ist falsch, weil B falsch ist.

Oder-Verknüpfung

Definition 28. Die *Oder-Verknüpfung* wird durch das Zeichen $\vee$ dargestellt, man sagt “A oder B”.

Satz 7.6. $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist.

Formel 7.7. Wahrheitstafel Oder

A	B	A ∨ B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel: $A = (6 = 2 \cdot 3) \vee B = (6 < 7)$ ist wahr, weil A und B wahr sind. $A = (6 = 2 \cdot 3) \wedge B = (6 > 7)$ ist wahr, weil A wahr ist.

Entweder-Oder-Verknüpfung

Definition 29. Die *Entweder-Oder-Verknüpfung* wird durch das Zeichen $\veebar$ dargestellt, man sagt “entweder A oder B”.

Satz 7.8. $A \veebar B$ ist genau dann wahr, wenn die eine Aussagen falsch und die andere wahr ist.

Formel 7.9. Wahrheitstafel Entweder-Oder

A	B	$A \veebar B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel: $(6 = 2 \cdot 3) \veebar (6 < 7)$ ist falsch, weil A und B wahr sind. $A = (6 = 2 \cdot 3) \wedge B = (6 > 7)$ ist wahr, weil A wahr ist und B falsch.

Anmerkung 7.10. Entweder-Oder nennt man auch exklusives Oder (und schreibt im Computer-Jargon XOR).

Pfeil-Verknüpfung

Definition 30. Die *Pfeil-Verknüpfung* wird durch das Zeichen $\Rightarrow$ dargestellt, man sagt "A Pfeil B".

Die Verknüpfung nennt man auch *Implikation*.

Satz 7.11. $A \Rightarrow B$ ist nur falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Formel 7.12. Wahrheitstafel Pfeil-Verknüpfung

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel: (6 ist eine Primzahl) $\Rightarrow (6 = 2 + 3)$ ist wahr, weil A und B falsch sind. $A = (6 = 2 \cdot 3) \Rightarrow B = (6 > 7)$ ist falsch, weil A wahr ist und B falsch.

Aequivalenz, Gleichwertigkeit

Definition 31. Die *Aequivalenz* wird durch das Zeichen $\Leftrightarrow$ dargestellt, man sagt "A äquivalent B".

Satz 7.13. $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

Formel 7.14. Wahrheitstafel Aequivalenz

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel: $(6 = 2 \cdot 3) \veebar (6 < 7)$ ist falsch, weil A und B wahr sind. $A = (6 = 2 \cdot 3) \wedge B = (6 > 7)$ ist wahr, weil A wahr ist und B falsch.
Man kann auch Verknüpfungen aus anderen Verknüpfungen ableiten. Aus "Oder" macht man "Nicht-Oder" und aus "Und" macht man "Nicht-Und".

Nicht-Und-Verknüpfung

$A \overline{\wedge} B := \neg(A \wedge B) \equiv \overline{A \wedge B}$

Formel 7.15. Wahrheitstafel Nicht-Und

A	B	$A \overline{\wedge} B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

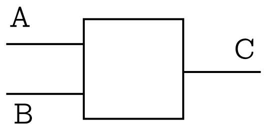
Nicht-Oder-Verknüpfung

$A \overline{\vee} B := \neg(A \vee B) \equiv \overline{A \vee B}$

Formel 7.16. Wahrheitstafel Nicht-Oder

A	B	$A \overline{\vee} B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

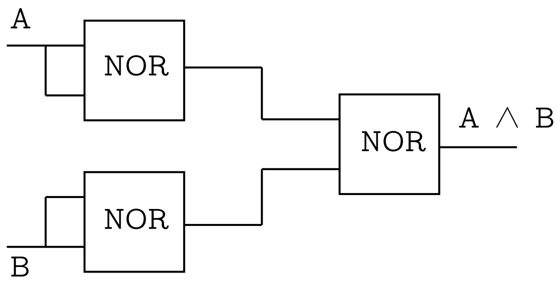
Wieso sind diese Verknüpfungen von Interesse? Weil sie die Basis für die Computer sind! Man stelle sich die Wahrheitstafeln als Ding vor, das zwei Eingänge A und B besitzt und am Ausgang $C = A \circ B$ ausgibt.

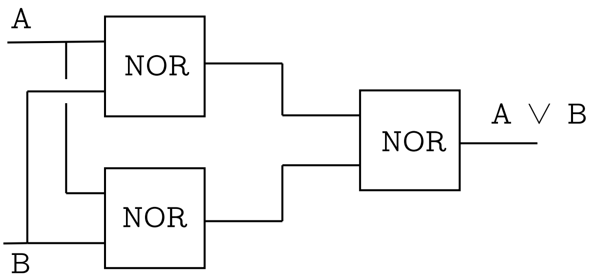


"Nicht-Oder" und "Nicht-Und" sind Standardbausteine, da sich allein mit ihnen alle logischen Verknüpfungen und somit auch komplexere Schaltungen (wie Addierer, Multiplexer usw.) zusammenstellen lassen. Zur Illustration mit "Nicht-Oder" (NOR) als Basis:

$$
\begin{aligned}
\neg A &= A \overline{\vee} A \\
A \wedge B &= \left(A \overline{\vee} A\right) \overline{\vee} \left(B \overline{\vee} B\right) \\
A \vee B &= \left(A \overline{\vee} B\right) \overline{\vee} \left(A \overline{\vee} B\right) \\
A \veebar B &= \left(A \overline{\vee} B\right) \overline{\vee} \left[\left(A \overline{\vee} A\right) \overline{\vee} \left(B \overline{\vee} B\right)\right] \\
A \overline{\wedge} B &= \left[\left(A \overline{\vee} A\right) \overline{\vee} \left(B \overline{\vee} B\right)\right] \overline{\vee} \left[\left(A \overline{\vee} A\right) \overline{\vee} \left(B \overline{\vee} B\right)\right] \\
A \overline{\veebar} B &= \left[\left(A \overline{\vee} B\right) \overline{\vee} A\right] \overline{\vee} \left[\left(A \overline{\vee} B\right) \overline{\vee} B\right] \\
A \Rightarrow B &= \left[\left(A \overline{\vee} A\right) \overline{\vee} B\right] \overline{\vee} \left[\left(A \overline{\vee} A\right) \overline{\vee} B\right] \\
A \Leftrightarrow B &= \left[\left(A \overline{\vee} B\right) \overline{\vee} A\right] \overline{\vee} \left[\left(A \overline{\vee} B\right) \overline{\vee} B\right]
\end{aligned}
$$

Solche Beziehungen kann man mit den Wahrheitstafeln beweisen.





In der Abbildung steht ein Kasten für eine “Nicht-Oder”-Schaltung, mit der man alle obigen logischen Operationen durchführen kann. Jedes “Nicht-Oder” in der Formel entspricht einem Kästchen, das mit dem richtigen Input gefüttert werden muss. Für die aufwendigsten Operationen braucht es bis 7 Kästchen.
Anstatt “wahr” oder “falsch” verwendet man die Eigenschaft, ob Strom fliesst oder nicht. Hier kann man an Lichtschalter denken im Sinne von “Lampe an” und “Lampe aus”. In der Elektrotechnik verwendet man anstatt (w, f) die Symbole $(L, 0)$. Damit sieht dann die Wahrheitstafel für eine “Nicht-Oder”-Schaltung wie folgt aus:

A	B	$A \overline{\vee} B$
L	L	L
L	0	L
0	L	L
0	0	0

7.5.3 Eigenschaften

Eigenschaften 7.17. Die Verknüpfungen “Und” und “Oder” sind:

- kommutativ: $A \circ B \Leftrightarrow B \circ A$,
- assoziativ: $(A \circ (B \circ C) \Leftrightarrow (A \circ B) \circ C)$ und
- gegenseitig distributiv.

Das bedeutet:

$$[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$
$$[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$$

7.18 Übung Es ist: $A =$(“es wird kalt”), $B =$(“es gibt Schnee”), $C =$(“es gibt Regen”). Die Verknüpfung $A \wedge (B \vee C)$ bedeutet: “Es wird kalt und gibt Regen oder Schnee”. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ist: “‘Es wird kalt und es gibt Schnee” oder “Es wird kalt und gibt Regen”’. ◁

7.5.4 De Morgan’sche Formeln

Wir haben bereits die entsprechenden Gesetze für Mengen kennengelernt (siehe Satz 7.16 auf Seite 7-7.

Formel 7.19.

$$\begin{aligned} \neg(a \wedge b) &\iff \neg a \vee \neg b \\ \neg(a \vee b) &\iff \neg a \wedge \neg b \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \overline{(a \wedge b)} &\iff \overline{a} \vee \overline{b} \\ \overline{(a \vee b)} &\iff \overline{a} \wedge \overline{b} \end{aligned}$$

In informeller Darstellung:

Formel 7.20. Die Negation einer Oder-Aussage ist äquivalent zur Und-Aussage der Einzel-Negationen. Die Negation einer Und-Aussage ist äquivalent zur Oder-Aussage der Einzel-Negationen.

7.5.5 Aussageformen

Aussagen sind konkrete Anschauungen von Eigenschaften von Dingen oder Beziehungen zwischen Dingen, “2 ist eine Primzahl”.
Nimmt man das ‘Ding’ heraus und ersetzt es durch Leerstellen, also “... ist eine Primzahl” oder “x ist grösser als y”, so sind es keine Aussagen mehr, denn ihr Wahrheitswert hängt von den eingesetzten Werten ab. Eine ‘Aussage mit Leerstellen’ nennt man *Aussageform*. Man schreibt $A(x)$.
Bestimmungsgleichungen wie $x + 5 = 7$ sind Aussageformen. Wählt man $x = 2$ so entsteht eine wahre Aussage, wählt man $x = 9$, so ist die Aussage $9 + 5 = 7$ falsch.
Anderseits sind nicht alle Ausssagen mit Variablen, z.B. $a + 1 = 1 + a$, Aussageformen. Dies ist eine sogenannte *All-Aussage*, die man aussprechen könnte als: “Für alle Zahlen a gilt $a + 1 = 1 + a$”. Hier macht es keinen Sinn mehr, für a einen speziellen Wert anzunehmen, denn die Formulierung “für alle Zahlen 2 ...” ist tatsächlich sinnlos. Das a ist hier “gebunden”.

Definition 32. Der *Allquantor* $\forall_x$ ist eine Abkürzung für “für alle/für jedes x”.

Damit schreibt sich der obige Ausdruck als

$$\forall_a (a + 1 = 1 + a).$$

Anmerkung 7.21. Um die Falschheit einer All-Aussage festzustellen, braucht es nur *ein* Beispiel, das nicht gültig ist.

Das alter ego des Allquantors ist der Existenzquantor, der besagt “es gibt”.

Definition 33. Der Existenzquantor $\exists_x$ ist eine Abkürzung für “es gibt x ...”.

Beispielsweise kann man anstatt “es gibt Zahlen, die ihrer dritten Potenz gleich sind” schreiben

$$\exists_x (x = x^3).$$

Anmerkung 7.22. Die Quantoren quantifizieren die Aussageform und machen sie zu einer Aussage.

Beim Negieren von All-Aussagen ist Vorsicht geboten. Das Negat von “alle Quadratzahlen sind gerade” ist nicht “alle Quadratzahlen sind ungerade”, sondern, wie schon erwähnt, “es ist nicht so, dass alle Quadratzahlen gerade sind” und daraus “es gibt Quadratzahlen, die ungerade sind”. Analog ist die Negation von “es gibt” dann “es ist nicht so, dass es gibt” und daraus “es gibt keine” und “für alle gilt nicht”.

Formel 7.23.

$$\neg\Big(\forall_{x\in M} A(x)\Big) \Leftrightarrow \exists_{x\in M}\Big(\neg A(x)\Big)$$
$$\neg\Big(\exists_{x\in M} A(x)\Big) \Leftrightarrow \forall_{x\in M}\Big(\neg A(x)\Big)$$

7.5.6 Verknüpfung von Aussageformen

Wir betrachten die vier Verknüpfungen $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ und schreiben das allgemeine Verknüpfungssymbol $\circ$. Wir stellen fest, dass eine Verknüpfung von Aussageformen wieder eine Aussageform ist, also $C(x) = A(x) \circ B(x)$, die man durch Quantifizierung ($\forall$, $\exists$) zu Aussagen machen kann.
$\forall_{x\in M}(A(x)\circ B(x))$ ist wahr, wenn $A(x)\circ B(x)$ für alle $x \in M$ wahr ist, und $\exists_{x\in M}(A(x)\circ B(x))$, wenn $A(x) \circ B(x)$ für ein $x \in M$ wahr ist.

Definition 34. Eine quantifizierte Aussage der Form

$$\forall_{x\in M}(A(x) \Rightarrow B(x))$$

nennt man *Implikation* oder *Folgebeziehung* oder *Satz*. $A(x)$ ist die Voraussetzung und $B(x)$ ist die Folgerung oder Behauptung.

Satz 7.24. Die Implikation $\forall_{x\in M}(A(x) \Rightarrow B(x))$ ist nur dann falsch, wenn es ein $x \in M$ gibt, für das $A(x)$ wahr und $B(x)$ falsch ist.

Definition 35. Die *Kontraposition* zur Implikation $A(x) \Rightarrow B(x)$ ist die Vertauschung von Voraussetzung und Folgerung durch die Negate von Folgerung und Voraussetzung, also

$$\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x).$$

Satz 7.25. Eine Implikation und ihre Kontraposition haben denselben Wahrheitswert.

Anmerkung 7.26. Diesen Satz verwendet man häufig in der Beweisführung in der Mathematik.

Beispiel: “Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, ist sie auch durch 3 teilbar” und “wenn eine Zahl nicht durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch nicht durch 6 teilbar”.
Wir haben festgelegt, dass eine Implikation auch ein Satz ist. Wir werden in dieser Schrift immer wieder auf Sätze stossen und dabei folgende Formulierungen vorfinden, die uns an die Implikation erinnern sollen:

Wichtig 1.

$$A(x) \Rightarrow B(x) \begin{cases} \text{“wenn } A(x)\text{, dann } B(x)\text{”} \\ \text{“nur dann } A(x)\text{, wenn } B(x)\text{”} \\ \text{“}A(x) \text{ ist hinreichend für } B(x)\text{”} \\ \text{“}B(x) \text{ ist notwendig für } A(x)\text{”} \end{cases}$$

⊣

Die Umkehrung der Implikation $A(x) \Rightarrow B(x)$ ist $B(x) \Rightarrow A(x)$. Wenn für alle $x \in M$ sowohl Implikation als auch deren Umkehrung wahr sind, so haben $A(x)$ und $B(x)$ für alle $x \in M$ denselben Wahrheitswert.

Satz 7.27. Es gilt die Aequivalenz

$$\left[\forall_{x\in M}\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) \wedge \big(B(x) \Rightarrow A(x)\big)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall_{x\in M}\big(A(x) \Leftrightarrow B(x)\big)\right]$$

Satz 7.28. Die Aequivalenz $\forall_{x\in M}(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ ist wahr, wenn $A(x)$ und $B(x)$ für jedes $x \in M$ denselben Wahrheitswert haben.

Die Formulierungen sind

Wichtig 2.

$$A(x) \Leftrightarrow B(x) \begin{cases} \text{“}A(x) \text{ äquivalent } B(x)\text{”} \\ \text{“wenn } A(x)\text{, dann } B(x) \text{ und umgekehrt”} \\ \text{“}A(x) \text{ dann und nur dann, wenn } B(x)\text{”} \\ \text{“}A(x) \text{ genau dann, wenn } B(x)\text{”} \\ \text{“}B(x) \text{ ist notwendig und hinreichend für } A(x)\text{”} \end{cases}$$

⊣

Im weiteren gilt der Satz:

Satz 7.29. Eine Aequivalenz $\forall_{x\in M}(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ und ihre Umkehrung $\forall_{x\in M}(B(x) \Leftrightarrow A(x))$ haben denselben Wahrheitswert.

Satz 7.30. Eine Aequivalenz $\forall_{x\in M}(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ und ihre Kontraposition $\forall_{x\in M}(\neg B(x) \Leftrightarrow \neg A(x))$ haben denselben Wahrheitswert.

7.5.7 Quantoren und Relationen

Wir betrachten ein Relation $R(x, y)$, wobei $x \in X$ die Menge von Schülern und $y \in Y$ die Menge der Lehrer ist. Die Aussage

$$\exists_x R(x, y)$$

bedeutet, dass es einen Schüler x gibt, der von einem Lehrer y unterrichtet wird. $\exists_y R(x, y)$ bedeutet, dass es einen Lehrer y gibt, der x zum Schüler hat. Und

$$\exists_x \exists_y R(x, y)$$

bedeutet, dass es einen Schüler x hat der von einem Lehrer y unterrichtet wird. Analog verhält es sich mit den Allquantoren:

$$\forall_x \forall_y R(x, y)$$

bedeutet, dass jeder Schüler x jeden Lehrer y hat. Es gilt umgekehrt auch, dass jeder Lehrer y jeden Schüler x unterrichtet, also

$$\forall_x \forall_y R(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \forall_y \forall_x R(x, y).$$

Gleiche Quantoren sind vertauschbar.
Es gibt auch gemischte Mehrfach-Quantoren. Die Relation $L(x, y)$ bedeutet, x liebt y. Dann meint $\exists_x \forall_y L(x, y)$, es gibt ein x, das alle y liebt. $\forall_y \exists_x L(x, y)$ anderseits meint, dass niemand ungeliebt ist, oder jeder y von mindestens einem x geliebt wird. Gemischte Quantoren sind nicht vertauschbar.

7.5.8 Beweise

Ein *Beweis* ist die als fehlerfrei anerkannte Herleitung der Richtigkeit oder der Unrichtigkeit einer Aussage aus einer Menge von Axiomen und anderen Aussagen, die bereits bewiesen sind.
Es gibt verschiedene Beweismethoden, von denen der sogenannte direkte Beweis, der indirekte Beweis und die vollständige Induktion die bekanntesten sind. Wir werden hier nur auf die ersten zwei eingehen, die vollständige Induktion wird bei den Folgen und Reihen behandelt.
Direkter und indirekter Beweis fussen auf der *Implikation*, der Pfeil-Verknüpfung, wonach eine Behauptung B wahr ist, wenn sie korrekt aus den Voraussetzungen V und anderen wahren oder falschen Aussagen A abgeleitet wird.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
f	w	w

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis geht man von einer Aussage A aus, deren Wahrheitswert w bekannt ist, und folgert daraus die Aussage B. Die Aussage B ist dann ebenfalls wahr, denn aus einer wahren Prämisse kann man nur eine wahre Konklusion folgern. Man siehe nochmals die Tabelle 7.5.8 auf Seite 7-21. Die Schwierigkeit ist nun eine solche Aussage A zu finden.

7.31 Übung Es wird vorausgesetzt: zwei reelle Zahlen $a > 0$ und $b > 0$. Es wird behauptet B: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$, d.h. das arithmetische Mittel ist grösser als das geometrische. Man hat die Idee, die wahre Aussage A, wonach $(a-b)^2 > 0$ ist, beizuziehen. Durch beidseitiges Quadrieren erhält man $(a+b)^2 = 4ab$, ausklammern bringt $a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$ oder $a^2 - 2ab + b^2 = 0$ und $(a-b)^2 = 0$. Damit ist direkt aus A dann B hergeleitet.
Die Schwierigkeit ist also, eine passende wahre Aussage A zu finden. Diese lässt sich nicht aus B herleiten. Denn gemäss Wahrheitstafel, kann auch eine falsche Aussage A zu einer wahren Aussage B gehören. Deshalb ist der indirekte Beweis meist einfacher. $\triangleleft$

Indirekter Beweis

Beim indirekten Beweis finden wir die Aussage A einfach, indem wir die Behauptung B verneinen, also $A = \overline{B}$. Es ist wesentlich, dass aus einer falschen Aussage durch richtige Schlussweise eine wahre Aussage gefolgert werden kann.

7.32 Übung Dasselbe Beispiel wie oben, $a > 0$ und $b > 0$. Behauptung B: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$. Daraus die Negation A: $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$.

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &< \sqrt{a \cdot b} \\
(a+b)^2 &< 4ab \\
a^2 + 2ab + b^2 - 4ab &< 0 \\
a^2 - 2ab + b^2 &< 0 \\
(a-b)^2 &< 0.
\end{aligned}$$

Ein Quadrat (reeller Zahlen) ist immer nicht-negativ. Damit ist A als falsch hergeleitet und damit muss B wahr sein. ◁

Der indirekte Beweis ist meist die einfachste Methode.

Vollständige Induktion

Wird später behandelt.

Aufgaben

8.33 Die Menge der natürlichen Zahlen sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Übersetze in aufzählender Form $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 4 \leqslant x < 10\}$. Beschreibe in Worten mit P der Menge der Primzahlen:
$A = \{x \mid x \in P \quad \text{und} \quad 4 \leqslant x < 10\}$.

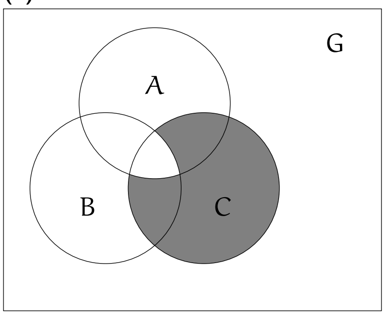
33 Die erste Menge sind die natürlichen Zahlen $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Die zweite Menge sind Primzahlen zwischen 4 und 10, also $\{5, 7\}$.

8.34 Übersetze die Menge $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ in beschreibende Form.

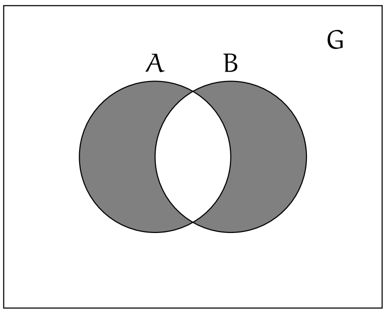
34 Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen (oder positiven ganzen Zahlen).

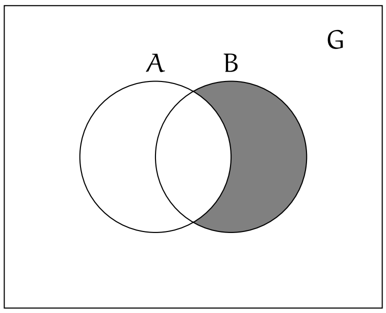
8.35 Bestimme die dunklen Teilmengen

(a)



(b)





(c)

35 **(a)** Die dunkle Fläche ist C ohne $A \cap B \cap C$. Deshalb $C \setminus (A \cap B)$.

(b) Zuerst wird A und B vereingt und davon dann die Schnittmenge in Abzug gebracht, also $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dafür gibt es ein spezielles Zeichen.

(c) Das ist B ohne A. Damit $B \cap A$.

8.36 Bilde $A = M_1 \cup M_2$ und $B = M_1 \cap M_2$ von

(a) $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M_2 = \{4, 5, 6, 7\}$

(b) $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ und $M_2 = \{5, 6, 7, 8\}$

(c) $M_1 = \{n \mid n \,\text{ungerade}\}$ und $M_2 = \{n \mid n \,\text{gerade}\}$

(d) $M_1 = \{n \mid 7 \leqslant n \leqslant 17\}$ und $M_1 = \{n \mid 12 \leqslant n \leqslant 22\}$

(e) $M_1 = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $M_1 = \{6n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$

36 **(a)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \qquad B = \{4, 5\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \qquad B = \{\} = \varnothing$

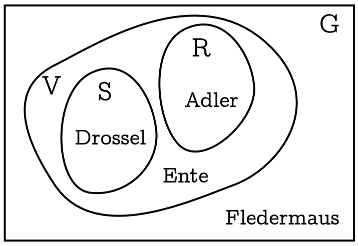
(c) $A = \mathbb{N}, \qquad B = \{0\}$

(d) $A = \{n \mid 7 \leqslant n \leqslant 22\}, \qquad B = \{n \mid 12 \leqslant n \leqslant 17\}$

(e) $A = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{\} = \varnothing$

8.37 Erstelle ein Euler-Diagramm mit den Mengen V = Menge der Vögel, R = Menge der Raubvögel, S = Menge der Singvögel, {Adler}, {Ente}, {Drossel}, {Fledermaus}.

37 Folgendes Euler-Diagramm:



8.38 Es sind folgende Mengen gegeben. G = Einwohner der Schweiz, A = Autobesitzer der Schweiz, B = Automechaniker der Schweiz, C = Einwohner von Chur. Bestimme:

(a) $B \setminus A$ **(b)** $B \setminus \overline{A}$ **(c)** $A \cap B \cap C$ **(d)** $\overline{A \cap B}$ **(e)** $\overline{A \cup B}$ **(f)** $A \setminus C$ **(g)** $\overline{C} \cap \overline{A}$ **(h)** $G \setminus C$.

38 **(a)** Automechaniker der Schweiz ohne Autobesitz.

(b) Automechaniker der Schweiz mit Autobesitz.

(c) Churer Automechaniker, die ein Auto besitzen.

(d) Schweizer ohne Automechaniker mit Auto.

(e) Einwohner der Schweiz ohne Einwohner von Chur.

(f) Autobesitzer der Schweiz ohne Churer Autobesitzer

(g) $\overline{C} \cap \overline{A} = \overline{C \cup A}$ ist einfacher nämlich Schweizer ohne Churer und Automechaniker

(h) Nicht-Churer oder Schweizer ohne Einwohner von Chur

8.39 Überlege, ob die Zuordnung der Einwohner einer Stadt zu ihrem Geburtstag eine Abbildung ist. Ist diese Zuordnung umkehrbar also eineindeutig? Untersuche, ob das für deine Familie anstelle der Gemeinde auch zutrifft.

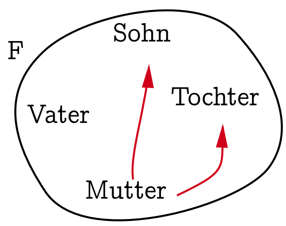
39 Ja, denn jeder Einwohner hat genau einen Geburtstag. Nein, nicht umkehrbar, denn bei einer grösseren Menge hat es sicher mindestens zwei Personen, mit gleichem Geburtstag. In meiner Familie haben keine zwei Personen am selben Tag Geburtstag, also keine Zwillinge. Deshalb ist die Zuordnung Geburtstag zu Person eindeutig, und somit die Abbildung eineindeutig.

8.40 Die Autos in deiner Strasse bilden eine Menge M. Es werden die Teilmengen aus roten, grünen und schwarzen und sonstigen Autos gebildet. Sind die Teilmenge paarweise disjunkt (elementfremd)? Wir nehmen noch die Teilmenge der Allradfahrzeuge hinzu, die nicht leer ist. Was kann man jetzt sagen?

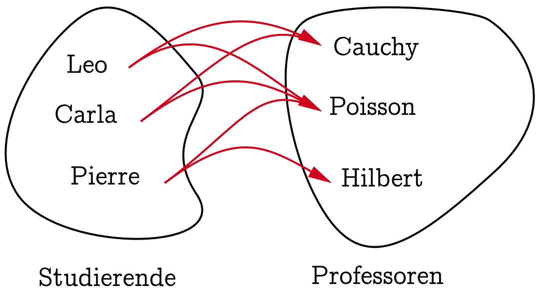
40 Ja, die Teilmengen sind disjunkt (unter der Annahme, dass jedes Fahrzeug nur eine Farbe hat). Ein Allradfahrzeug kann verschiedene Farben haben. Deshalb ist z.B. "rot" und "Allrad" nicht unbedingt elementfremd. Farbe und Allrad-Nicht-Allrad sind nicht disjunkt.

8.41 Zeichne ein Pfeildiagramm, das der Menge {Vater, Mutter, Sohn, Tochter} die Relation "ist Mutter" zeigt.

41 Wie folgt



8.42 Gegeben ist das Pfeildiagramm, das Studenten und Professoren verbindet.



(a) Bestimme die Mengen $R(\text{Studierende}, \text{Professoren})$ und $R(\text{Professoren}, \text{Studierende})$. Ein erstes Elemente könnte $(\text{Leo}, \text{Cauchy})$ sein.

(b) Man nenne die drei Elemente, die nicht Elemente der Produktmenge $(\text{Studierende} \times \text{Professoren})$ sind.

42 **(a)** $R(\text{Studierende}, \text{Professoren}) =$ {(Leo,Cauchy), (Leo, Poisson), (Carla, Cauchy),(Carla, Poisson), (Pierre,Poisson),(Pierre, Hilbert)} und $R(\text{Professoren}, \text{Studierende}) =$ {(Cauchy, Leo),(Cauchy, Carla),(Poisson, Carla),(Poisson, Pierre),(Hilbert, Pierre)}.

(b) {(Leo,Hilbert),(Carla, Hilbert),(Pierre, Cauchy)}.

8.43 ** Wenn man den Spruch "drink OR drive" als Wahrheitstabelle beschreibt, dann erkennt man, dass es nicht der Absicht des Gesetzgebers entspricht. Wieso?

43 Die Aussagen sind "drink" und "drive".

A	B	$A \vee B$
drink	drive	w
drink	drive not	w
drink not	drive	w
drink not	drive not	f

Es sollte heissen "drink XOR drive" oder auf Deutsch "entweder trinke oder fahre" und nicht "trinke oder fahre".

A	B	$A \veebar B$
drink	drive	f
drink	drive not	w
drink not	drive	w
drink not	drive not	f

8.44 ** Wie lassen sich die beiden folgenden beiden Aussagen zu einer einzigen wahren Aussage zusammenfügen?

- A_1: "Das Viereck ist ein Quadrat."
- A_2: "Das Viereck hat vier gleich grosse Innenwinkel."

Was für eine Art der Aussage erhält man hierbei, wenn man die zweite Aussage um den Zusatz "und es hat gleich lange Seiten" ergänzt?

44 Die Aussage ist eine Implikation, eine Folgerung gemäss, "wenn, dann" also $A_1 \Longrightarrow A_2$. Das gilt aber auch für ein beliebiges Rechteck. Mit dem Zusatz sind nur Quadrate, also Rechteckk mit gleicher Seitenlänge, zulässig, somit gilt die Beziehung auch in die andere Richtung:

$$A_1 \Longleftrightarrow A_2$$

8.45 ** Es ist eine Aussage gegeben (Der Zug fährt nach Zürich) $\wedge$ (Der Zug fährt nach Basel). Was ist die Negation dieser Aussage?

45 Sprachlich: "Es ist nicht so, dass der Zug nach Zürich und Basel fährt". Formal gilt $\overline{(A \wedge B)} \iff \overline{A} \vee \overline{B}$. Das ist "der Zug fährt nicht nach Zürich oder er fährt nicht nach Basel.". Das heisst, er fährt igendwohin, das nicht Zürich und Basel ist, oder nach Basel oder nach Zürich. Wenn er nur nach Zürich oder Basel fahren könnte, dann hiesse es (exklusives Oder) "er fährt entweder nach Zürich oder nach Basel".

8.46 ** Welche Aussage entsteht durch eine Oder-Verknüpfung der Aussagen $A_1 : \; 1 < 2$ und $A_2 : \; 1 = 2$? Welchen Wahrheitswert haben die beiden Aussagen A_1 beziehungsweise A_2, welchen die Gesamtaussage?

46 Formal gilt, wenn $a < b$ und $a = b$, dann $a \leqslant b$. Hier also $1 \leqslant 2$. A_1 ist wahr und A_2 ist falsch. Mit der Oder-Verbindung muss nur eine wahr sein, damit der Verbund wahr ist. Deshalb ist $A_1 \vee A_2 = w$, denn $1 \leqslant 2$ ist wahr.

Kapitel 8

Die Natürlichen und Ganzen Zahlen

Wir kennen alle die natürlichen Zahlen, denn sie lassen sich zum Beispiel durch abzählen an den Fingern oder einer Perlenkette darstellen. *Zahl kommt von Zählen.*
Hunderte von Jahren vor Christus wurde die Zahl Null in Indien erfunden. Sie ist für unser Positionssystem der Zahlen unerlässlich, denn ohne sie könnte man nicht 106 schreiben. Höchstens 16. Im Abendland ist sie erst im 12. Jahrhundert angekommen.
Es herrscht ein wenig Willkur hinsichtlich der Frage, ob die Null zu den natürlichen Zahlen zählt. Aus dem vorhergehenden Kapitel haben wir die Mächtigkeit kennen gelernt. Für die leere Menge ist sie null. Deshalb wäre es sinnvoll, die null hinzuzunehmen.

8.1 Begriffe

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge im Sinne der Mengenlehre.

Definition 36. Die *Natürlichen Zahlen* sind Elemente der Menge

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \infty\}$$

.

Die Punkte in der Menge soll angeben, dass die Reihe sich nach rechts bis ins Unendliche fortsetzt. Das Symbol für Unendlich ist ∞. Denn für die 5 kann man einen Nachfolger festlegen, der um 1 grösser ist und dasselbe immer wiederholen.

8.1.1 Axiome von Peano**

Die natürlichen Zahlen lassen sich durch Axiome, d.h. Forderungen, beschreiben. Nur zur Illustration:

Anmerkung 8.1. Es wird gefordert:

(1) 0 ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.

(3) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(4) Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich. (oder: zwei unterschiedliche natürliche Zahlen besitzen niemals denselben Nachfolger).

(5) Jede Eigenschaft der Null, die auch der Nachfolger jeder natürlichen Zahl besitzt, kommt allen natürlichen Zahlen zu.

Hier wird zuerst eine Anker bei Null gesetzt und dann der Nachfolger als Rekursion festgelegt. Das ist eine andere Art als durch die Mengenlehre festgelegt, nämlich Zahlen als Eigenschaft der Menge.

8.1.2 Ganze Zahlen

Die ganzen Zahlen sind eine Erweiterung der natürlichen Zahlen. Da Zahl vom Zählen kommt, und man ja auch rückwärts zählen kann. Es stell sich die Frage, wie es weitergeht, wenn man von 5, 4, 3, 2, 1, 0 runterzählt. Es könnte heissen: "1 weniger als null", "2 weniger", "3 weniger" etc. Nun heisst aber gerade "minus" auf lateinisch "weniger"! Da das Minuszeichen auch das Vorzeichen der negativen Zahlen ist, kann man die Ganzen Zahlen als Menge folgendermassen definieren:

Definition 37. Die *Ganzen Zahlen* sind Elemente der Menge

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \infty\}$$

.

Anmerkung 8.2. Man sieht sofort, dass die natürlichen Zahlen eine echte Teilmenge der ganzen Zahlen sind, also $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Definition 38. Das *Plusminuszeichen* $\pm$ vor einer natürlichen Zahl n meint die ganzen Zahlen $+n = n$ und $-n$. Es ist eine Kurzschreibweise für zwei Zahlen.

Somit kann man für die Ganzen Zahlen schreiben:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots, \pm\infty\}$$

.

Anmerkung 8.3. Das Vorzeichen $-$ sieht genau gleich aus wie das Minuszeichen in einem Ausdruck wie $7 - 2$. Wenn das Minuszeichen das am weitesten links stehende Zeichen ist, dann ist es ein Vorzeichen. Ein Minuszeichen verbindet zwei Terme, das Vorzeichen aber nicht.

8.1.3 Ordnungsrelation

Die wichtigste Ordnungsrelation, also Beziehung zwischen zwei Objekten, ist wohl die "kleiner als" $<$ ("grösser als" $>$) Relation. Für Zahlen gilt:

Satz 8.4. Zwischen zwei Zahlen a und b besteht genau eine der drei Grössenbeziehungen:

$$a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad b < a.$$

Ersetzt man die "kleiner als" durch die "kleiner oder gleich" $\leqslant$ Relation, dann gilt: Zwischen a und b besteht mindestens eine der zwei Beziehungen:

$$a \leqslant b \quad \text{oder} \quad b \leqslant a.$$

Wenn beide gelten, so ist $a = b$.

8.1.4 Einschub: Repetition Zahlendivision

Im folgenden wird von Teilen gesprochen im Sinne von Division. Deshalb möchten wir hier nochmals die schriftliche Division, eigentliche eine Rechenvorschrift, an einem Beispiel repetieren. Wir berechnen $97128 : 456$. Wir betrachten soviele Ziffern von links der linken Zahl bis wir die gefunden haben, die grösser als der Teiler ist, also hier 971. Wir teilen $971 : 456 = 2, \mathrm{Rest}_1$. Der Rest interessiert noch nicht. Jetzt multiplizieren wir zurück, also $2 \cdot 456 = 912$ und subtrahieren von 971, also 59. Jetzt holen wir die nächste Stelle, hier 2, herunter und teilen $592 : 456 = 1, \mathrm{Rest}_2$. Zurückmultiplizieren gibt 456, subtrahieren gibt 136, nächste Zahl herunternehmen, also 8. Damit $1368 : 456 = 3$ ohne Rest. Die gesuchte Zahl ist 213. Siehe

$$
\begin{array}{l}
97128 : 456 = 213 \\
\underline{912} \\
592 \\
\underline{456} \\
1368 \\
\underline{1368} \\
0
\end{array}
$$

Weiteres Beispiel: $856 : 17$

$$
\begin{array}{l}
856 : 17 = 50 \\
\underline{85} \\
06
\end{array}
$$

Diese Division geht nicht restlos auf, es bleibt 6 übrig. Des Resultat ist vollständig $50, \mathrm{Rest}_{17} = 6$ oder formal korrekt $50\frac{6}{50}$.

8.2 Primzahlen

Definition 39. Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl, die grösser als 1 und ausschliesslich durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.

Die ersten Primzahlen sind in der folgenden Tabelle ersichtlich als aufzählende Menge dargestellt.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229

8.2.1 Fundamentalsatz

Satz 8.1. (**Fundamentalsatz der Arithmetik**) Jede natürlich Zahl grösser als 1 ist entweder eine Primzahl oder kann eindeutig und auf einzige Art als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

Anmerkung 8.2. Dieser Satz sollte jeden in helles Erstaunen versetzen. In Tabelle 8.2 sieht man zwar schon, dass die Primzahlen recht dicht sind, also in diesem Abschnitt rund 20% der Zahlen ausmachen. Es bleiben 80%, die durch Multiplikation gebildet werden müssen.

Satz 8.3. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Dies hat schon Euklid scharfsinnig indirekt bewiesen. Angenommen, es gäbe nur eine endliche Anzahl von Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p$, sodass p die grösste existierende Primzahl wäre, so gibt die Zahl

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot p + 1$$

bei der Division durch jede einzelne Primzahl $2, 3, \ldots p$ den Rest 1. Da m demnach durch keine dieser Primzahlen teilbar ist, so muss m entweder selbst eine neue Primzahl sein oder lauter neue Primzahlen enthalten. Dieser Euklidische Beweis ist auch deshalb besonders schön und wertvoll, weil er gleich einen Bereich angibt, in welchem eine neue Primzahl liegen muss. Denn es folgt ja unmittelbar aus dem Beweis: Ist p eine beliebig gegebene Primzahl, so muss in dem Intervall von $p + 1$ bis und mit m mindestens eine neue Primzahl vorhanden sein.

Vermutung 1. Goldbach'sche Vermutung (1742) Jede gerade Zahl, die grösser als 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen. Jede ungerade Zahl, die grösser als 5 ist, ist Summe dreier Primzahlen.

Anmerkung 8.4. Die Vermutung konnte bis heute weder widerlegt noch bewiesen werden. Zur Widerlegung reicht eine einzige Zahl, die der Vermutung nicht entspricht.

8.2.2 Primfaktorzerlegung

Der Fundamentalsatz besagt also, dass man jede natürlich Zahl $n > 1$ als Produkt von Potenzen von Primzahlen p_k darstellen kann, formal

$$n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot p_M^{i_M}$$

Beispielsweise ist $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ oder $7 = 7 \cdot 1$ oder $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$.

8.5 Rezept Grösster gemeinsamer Teiler Wir schreiben die Zahl, für die die Zerlegung nach Primfaktoren gesucht ist, oben auf eine T-förmigen Tabelle. Wir beginnen zu probieren, ob die obige Zahl durch die erste Primzahl teilbar ist, also die 2. Wenn ja, schreiben wir die Primzahl links und das Resultat der Division rechts. Wenn nein, versuchen wir die nächste Primzahl. Diese Schleife wiederholen wir solange, bis zuunterst eine Primzahl steht. Als Beispiele:

1260	
2	630
2	315
$\boxed{3}$	105
$\boxed{3}$	35
$\boxed{5}$	7
$\boxed{7}$	1

2205	
$\boxed{3}$	735
$\boxed{3}$	245
$\boxed{5}$	49
$\boxed{7}$	7
7	1

3465	
$\boxed{3}$	1155
$\boxed{3}$	385
$\boxed{5}$	77
$\boxed{7}$	11
11	1

Die Zerlegungen lauten also: $1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ usw.

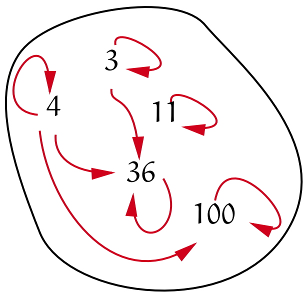
Das Verfahren zum Finden der Primfaktorzerlegung kann aber ziemlich mühsam sein. Zum Beispiel ist die Zahl 3599 die Multiplikation von 59 mit 61. Diese Mühsal wird in der Krypographie sehr gerne verwendet, um Informationen zu verschlüsseln.

8.3 Teiler und Vielfache

Teiler und Vielfache sind miteinander verknüpft durch die Gleichung $a = b \cdot c$, wobei a und b ganzen Zahlen sind mit Ausnahme der 0.

Definition 40. Wir nennen a ein *Vielfaches* von b, wenn es eine ganze Zahl c gibt, so dass $a = b \cdot c$ gilt. b heisst in diesem Fall *Teiler* von a.

Wir vergleichen natürliche Zahlen untereinander in Hinblick auf die Primfaktorzerlegung. Zwei unterschiedliche Zahlen, z.B. 102 und 97, haben unterschiedliche Primfaktoren. Uns interessieren sowohl die gemeinsamen als auch die nicht gemeinsamen. Man kann auch mehr als zwei Zahlen vergleichen.
Im Erinnerung an die Mengenlehre kann man die Teiler einer Zahl als Menge auffassen. Damit kann man auch die Mittel der Mengenlehre anwenden, also Durchschnitt und Rest etc.
Zudem kann man "ist Teiler von" als *Relation* auffassen, die zwei Objekte miteinander verbindet. Relationen sind Pfeile, könnte man sagen.



8.3.1 Grösster gemeinsamer Teiler ggT

Definition 41. Er ist die grösste natürliche Zahl m, durch die sich zwei ganze Zahlen a und b ohne Rest teilen lassen. Zudem ist jede ganze Zahl, die ebenfalls die Zahlen a und b teilt, ihrerseits Teiler von m.

Anmerkung 8.1. Diese Definition lässt sich einfach auf mehr als zwei Zahlen ausdehnen.

8.2 Beispiel Wir nehme die Rechnung von oben auf, wo wir die Teiler, d.h die Primfaktoren, der Zahlen 1260, 2205 und 3465 bestimmt haben. Als Mengen geschrieben lauten sie:

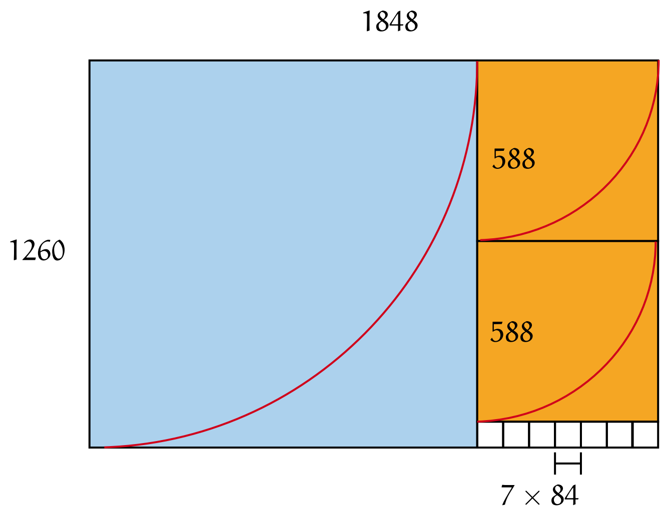
$$\begin{aligned}
T(1260) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 28, 30, 35, 36, 42, 45, 60, 63, 70, 84, 90,\\
&\quad 105, 126, 140, 180, 210, 252, \boxed{315}, 420, 630, 1260\}\\
T(2205) &= \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 49, 63, 105, 147, 245, \boxed{315}, 441, 735, 2205\}\\
T(3465) &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 33, 35, 45, 55, 63, 77, 99, 105, 165, 231, \boxed{315}, 385, 495, 693,\\
&\quad 1155, 3465\}
\end{aligned}$$

Damit bilden wir den Durchschnitt, also jene Teilmenge, die zu allen geschnittenen Menge gehört. Deshalb "gemeinsam". Bei grossen Zahlen ist das Bestimmen des ggT über den Vergleich der Teiler nicht praktikabel.
Einfacher ist die Bestimmung der gemeinsamen Primfaktoren und das Produkt derselben ergibt den ggT. Hier also multiplizieren wir die gemeinsamen Faktoren 3,3,5,7 und erhalten 315. Das ist der gesuchte ggT.
Eine dritte Art ist die Verwendung der Euklidischen Methode.

◁

Methode von Euklid

Gesucht ist der ggT von 1848 und 1260. Wir könnten die Methode von oben verwenden und die Primfaktoren bestimmen. Schaue das folgende Bild. Es zeigt ein Rechteck mit den Längen der zwei Zahlen.



Mit dem Zirkel trägt man die kurze Seite von der langen ab. Das wiederholt man, bis das Rechteck vollständig ausgefüllt ist. Die zweite kürzere Strecke des Restes ist $1848-1260 = 588$. Nach zweimaligem Abtragen bleiben noch 7 Quadrate mit Seitenlänge 84 übrig. Das ist der ggT!
Das graphische Verfahren kann man auch rechnerisch nachvollziehen. Zuerst haben wir die Rechnung gemacht, wobei wir mit R den Rest der Division bezeichnen:

$$1848 : 1260 = 1, R_{1260} = 588$$

Dann führen wir die folgende Division aus:

$$1260 : 588 = 2, R_{588} = 84$$

und schliesslich

$$588 : 84 = 7, R_{84} = 0$$

Die Regel heisst also, den vorhergehenden Divisor durch den Rest zu teilen.

8.3 Übung Wir machen noch eine zweite Rechnung. Wenn wir anstatt 1260 neu 1259 wählen würden und wir wüssten, dass es eine Primzahlen ist, so ist das Resultat bekannt, nämlich ggT=1. Nehmen wir also zwei neue Zahlen, 3465 und 2205. Die Rechnung ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
3465 : 2205 &= 1, R = 1260 \\
2205 : 1260 &= 1, R = 945 \\
1260 : 945 &= 1, R = 315 \\
945 : \boxed{315} &= 3, R = 0
\end{aligned}$$

Es resultiert der ggT(3465,2205)=315. Das ist der letzte Divisor, der keinen Rest mehr produziert. ◁

Anzahl Teiler

Aus der Primfaktorzerlegung lässt sich die Anzahl Teiler berechnen. Aus $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ folgen die Teiler $T(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, deren 6. Für $1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ kann man schreiben $1260 = 2^2 3^2 5^1 7^1$ und aus den Hochzahlen dann rechnen $|T(1260)| = (2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 9 \cdot 4 = 36$. Die Zahl 1260 hat 36 unterschiedliche Teiler $T(1260) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \ldots, 105, 126, 140, 180, 210, 252, 315, 420, 630, 1260\}$.

Formel 8.4. Anzahl Teiler In der Primfaktorzerlegung werden alle Exponenten um 1 erhöht und miteinander multipliziert. Das Produkt ist gleich der Teileranzahl.

Verifikation für $T(12)$: aus $2^2 \cdot 3^1$ folgt $(2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$.

Lemma von Bézout**

Satz 8.5. Lemma von Bézout Der grösste gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen a und b kann als Kombination dargestellt werden gemäss

$$u \cdot a + v \cdot b = ggT(a, b)$$

wobei u und v ganzzahlig sind.

8.6 Beispiel Wir bestimmen u und v für ggT(3465,2205)=315 vom obigen Beispiel. Es ist somit $a = 3465$ und $b = 2205$.

$$\begin{aligned}
3465 &= 2205 \cdot 1 + 1260 & \qquad 1260 &= 3465 - 2205 \cdot 1 \\
2205 &= 1260 \cdot 1 + 945 & 945 &= 2205 - 1260 \cdot 1 \\
1260 &= 945 \cdot 1 + 315 & 315 &= 1260 - 945 \cdot 1 \\
945 &= 315 \cdot 3 & &
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir in die rechte untere Gleichung ein:

$$315 = 1260 - 945 = [3465 - 2205] - [2205 - 1260] = 3465 - 2205 = 1 \cdot 3465 + (-1) \cdot 2205$$

oder $u = 1$, $v = -1$. ◁

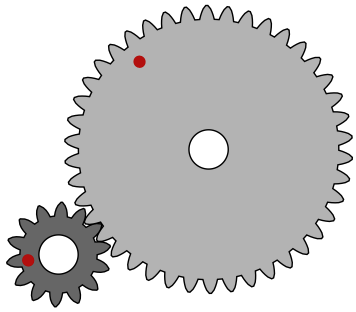
8.3.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV

Fritz und Fränzi haben Schuhbändel unterschiedlicher Länge, nämlich 40 cm und 70 cm. Sie sollen so viele zusammenknüpfen, bis diese Ketten gleich lang sind. Die eine Schnur wächst zu 80 cm, dann 120 cm. Die zweite ist 70 cm, dann 140 etc. Mit einer Tabelle gewinnt man den Überblick:

70	140	210	$\boxed{\mathbf{280}}$	350	420	490	540
40	80	120	160	200	240	$\boxed{\mathbf{280}}$	320

Bei 280 cm werden sie das erste Mal gleich lang. Somit werden sie bei 560 cm wieder gleich lang.

Als zweites einführendes Beispiel nehme wir zwei Zahnräder – man denke zum Beispiel an eine Uhr. Das grosse Rad mit der Kurbel hat 150 Zähne, das kleinere 60. Wieviel mal muss man die grosse Kurbel drehen, bis die zwei Räder wieder in der Ausgangposition sind? Antwort: 2 Mal, denn $2 \cdot 150$ sind $5 \cdot 60$. Was aber, wenn das kleinere Rad 61 Zähne hätte, also eine Primzahl? Antwort: 61 Mal! Dabei hat man $61 \cdot 150$ Zahnstellungen, also 9150 durchlaufen.



Definition 42. Das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier ganzer Zahlen a und b ist die kleinste positive natürliche Zahl, die sowohl Vielfaches von a als auch Vielfaches von b ist. Für den Fall $a = 0$ oder $b = 0$ ist das kgV definiert als $\mathrm{kgV}(m, n) := 0$.

Auch der kgV ist aus den Primfaktorzerlegung bestimmbar. Dazu verwendet man folgendes Rezept:

8.7 Rezept Kleinstes gemeinsames Vielfaches Wir nehme dieselben Zahlen wie in Rez. 8.5. Jetzt rahmen wir nicht die gemeinsamen Faktoren, sondern diejenigen in einer der Zerlegungen, die insgesamt am häufigsten vorkommen. Also

1260		2205		3465	
$\boxed{2}$	630	3	735	3	1155
$\boxed{2}$	315	3	245	3	385
$\boxed{3}$	105	5	49	5	77
$\boxed{3}$	35	$\boxed{7}$	7	7	11
$\boxed{5}$	7	$\boxed{7}$	1	$\boxed{11}$	1
7	1				

Der kgV berechnet sich durch Multiplizieren der gerahmten Faktoren, $\mathrm{kgV}(1260, 2205, 3465) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot = 97020$.

8.3.3 Zusammenhang ggT und kgV

Es gibt einen interessante Zusammenhang zwischen grösstem gemeinsamen Teiler und kleinstem gemeinsamen Vielfachen.

Satz 8.8. Das Produkt von ggT und kgV zweier Zahlen ist gleich dem Produkt der beiden Zahlen,

$$a \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b).$$

8.9 Beispiel Wir kennen $\mathrm{kgV}(1260, 2205) = 4\cdot 9\cdot 5\cdot 49 = 8820$ und $\mathrm{ggT}(1260, 2205) = 9\cdot 5\cdot 7 = 315$. Das Produkt gibt 2'778'300. Nun $1260 \cdot 2205 = 2'778'300$. Beweis verifiziert. ◁

Mit dieser Formel lässt sich unter Umständen der andere Wert einfacher berechnen.

8.3.4 Ein paar Teilbarkeitssätze

Satz 8.10. Drei ganze Zahlen a, b und t sind gegeben. Wenn t Teiler von a und von b ist, dann ist t auch Teiler der Summe $a + b$.

Im folgenden geben wir ein paar Sätze zur Teilbarkeit an, die man sich einfach merken sollte. Es sind nicht alle bekannten Regeln, die es gibt, sondern nur eine Auswahl.

Teilbarkeit durch 2, 4, 8

Satz 8.11. Es gilt:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre *letzte Ziffer* eine durch 2 teilbare Zahl darstellt.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre *letzten zwei Ziffern* eine durch 4 teilbare Zahl darstellt.

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre *letzten drei Ziffern* eine durch 8 teilbare Zahl darstellt.

Die Grundüberlegung ist, dass die Zahlen ohne die letzten Ziffern schon durch die Zahl teilbar sind. Also für 3124: $3120 + 4$, oder $3100 + 24$ und $3000 + 124$. Zehner sind durch 2, Hunderter durch 4 und Tausender durch 8 teilbar.

Teilbarkeit durch 5, 25, 125

Satz 8.12. Es gilt:

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die *letzte Ziffer* eine 0 oder eine 5 ist.

Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn die *letzten zwei Ziffer* 00 sind oder eine durch 25 teilbare Zahl bilden, also 25, 50 und 75.

Eine Zahl ist durch 125 teilbar, wenn die *letzten drei Ziffer* 000 sind oder eine durch 125 teilbare Zahl bilden, also 125, 250, 375, 500, 625, 750 und 875.

Teilbarkeit durch 3 und 9

Satz 8.13. Eine Zahl ist durch 3, beziehungsweise durch 9, teilbar, wenn ihre *Quersumme* durch 3, beziehungsweise 9, teilbar ist.

Während die obigen Regeln recht einfach zu verstehen sind, wird man sich schon fragen, was jetzt die Quersumme für eine Rolle spielt.
Wir betrachten die Zahl 2358. Wir schreiben als Summe $2358 = 2000 + 300 + 50 + 8$. Jetzt ersetzen wir $1000 = 999 + 1$, $100 = 99 + 1$, $10 = 9 + 1$, also

$$\begin{aligned} 2358 &= 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \\ &= 2 \cdot (999 + 1) + 3 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 8 \\ &= (2 \cdot 999 + 3 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + (2 + 3 + 5 + 8) \end{aligned}$$

Die erste Klammer ist durch 3 teilbar, weil jeweils ein Faktor, z.B. 99, durch 3 teilbar ist. Somit ist für die Teilbarkeit durch 3 nur noch von Bedeutung, ob die Summe $(2 + 3 + 5 + 8)$

durch 3 teilbar ist. Diese Summe nennt man *Quersumme*. In diesem Fall ist die Quersumme 18 und somit durch 9, und damit auch durch 3, teilbar.

8.4 Operationen erster Stufe

Die sogenannten vier Rechenarten sind schon seit der Grundschule bestens bekannt. Aufgrund von Eigenschaften, die noch erklärt werden, unterscheidet man die Rechenarten oder Operationen nach Stufen. Es sind vier Stufen bekannt, wie in der Tabelle gezeigt wird.

	Operation Umkehroperation	Umkehroperation Operation
1. Stufe	Addition	Subtraktion
2. Stufe	Multiplikation	Division
3. Stufe	Potenzieren	Wurzelziehen
4. Stufe	Potenzieren (Exponentieren)	Logarithmieren

Die vier unterschiedlichen Stufen informieren über den Vorrang der Operatoren. Operatoren gleicher Stufe haben somit gleichen Vorrang, sind gleichberechtigt. Je höher die Stufe desto höher der Vorrang. Bekanntlich sagt man: "Punkt vor Strich". Denn Punkt ist 2. Stufe, Strich 1. Stufe. Diesen Vorrang kann man durch Klammerung, dem Einklammern von Termen, aufheben. Wir werden noch viel damit zu tun haben.

Wichtig 3. Eine Klammer um Zahlen und Variablen, z.B. $(a + b)$, deutet an, dass man den Klammerinhalt als eine Zahl betrachtet. Eine negative Zahl ist z.B. $-(x - y)$. Wenn man an Teilen dieser Zahl interessiert ist, muss man die Klammer nach festen Regeln auflösen. Anderseits kann man auch Zahlen in einer Klammer zu einer neuen Zahl zusammenfügen, wiederum nach festen Regeln. ⊣

Die *Umkehroperation* ist diejenige, die eine vorhergehende Operation wieder rückgängig macht. Hat man also zuerst 5 addiert, so hebt eine Subtraktion von 5 diesen Vorgang auf. Dasselbe gilt bei einer ersten Multiplikation mit 5 und einer anschliessenden Division durch 5.

Zur Übersicht und Wiederholung die Begriffe zu den Rechenarten. Man erkennt, dass die Addition und die Multiplikation einfacher strukturiert sind. Beide Terme heissen gleich, was darauf hindeutet, dass deren Reihenfolge im Ausdruck unwichtig ist.

	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Verknüpfung	$+$	$-$	$\cdot, \times$	$:$
sprich	"plus"	"minus"	"mal"	"durch"
Beispiel	$12 + 5$	$13 - 7$	$8 \cdot 6$	$15 : 4$
Linker Term	Summand	Minuend	Faktor	Dividend
Rechter T.	Summand	Subtrahend	Faktor	Divisor
Ergebnis	Summe	Differenz	Produkt	Quotient

Bevor wir zu den Rechenarten kommen noch ein paar Definitionen, also Sprachregelungen, um einfacher kommunizieren zu können.

Definition 43. Eine *Variable* ist ein Zeichen oder Buchstabe, der als Platzhalter für eine Zahl dient. Es hat die Eigenschaften einer Zahl.

Ein *Term* ist eine sinnvolle Kombination aus Zahlen, Variablen, Verknüpfungssymbolen und Klammern, z.B. $x+1$ oder $2(a+b\cdot 3)$.

Wichtig 4. ☠ Eine Variable in einer Rechnung, z.B. a vertritt immer dieselbe Zahl. ⊣

8.4.1 Die Addition

Die Addition verbindet zwei oder mehrere Summanden. Die zwei Zahlen oder Vertreter der zwei Zahlen sind durch das Verknüpfungszeichen (Funktor) $+$ verbunden, wie etwa in $12+4$. Wir wissen, dass diese Summe auch $4+12$ geschrieben werden kann und dass das Resultat, ebenfalls die "Summe" 16 ist. Wenn wir die zwei Zahlen durch einen Vertreter, Variable genannt, darstellen, so gilt ebenfalls $a+b=b+a$.

Definition 44. (Summe) Die *Summe* zweier Zahlen ist jene Zahl, die durch die Addition zweier Summanden entsteht.

Anmerkung 8.1. Mengentheoretisch ergibt sich die Summe als Mächtigkeit der Vereinigung zweier elementfremder Mengen, $|A\cup B|$.

Das Gesetz der Vertauschbarkeit wird Kommutativgesetz genannt. Es gilt also für die Addition:

Satz 8.2. Die Addition ist kommutativ (vertauschbar), d.h. $a+b=b+a$.

Anmerkung 8.3. Wegen der Vertauschbarkeit werden beide Terme der Summe gleich bezeichnet, nämlich Summand.

Betrachten wir nun drei Zahlen, $7+4+9$, so können wir uns ein Summe $7+4$ addiert zu 9 vorstellen, oder eine Summe aus 7 plus die Summe $4+9$. Wir können also die Reihenfolge der Summanden beliebig wählen. Mit Variablen etwas $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=a+(c+b)=\ldots$. Diese Eigenschaft der Addition gehorcht dem Verbindungsgesetz, was man assoziativ nennt.

Satz 8.4. Die Addition ist assoziativ, $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Beispiel: $(96+48)+4=(96+4)+48=148$
Die Addition besitzt ein sogenanntes Nullelement. Es ist dadurch gekennzeichnet, dass jede Zahl durch die Verknüpfung mit dem Nullelement auf sich selbst abgebildet wird.

Satz 8.5. Es gilt also $a+0=a$.

Anmerkung 8.6. Wenn man die Eigenschaften der Addition mit denen der Vereinigung von Mengen vergleicht, siehe Satz 7.3.8 auf Seite 7-7, so erkennt man, dass diese gleich sind.

8.4.2 Die Subtraktion

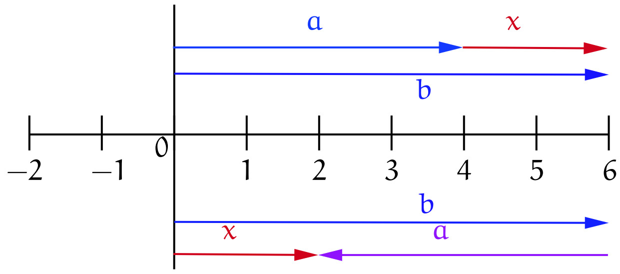
Die Subtraktion ergibt sich aus der Fragestellung: Wieviel muss man zu a addieren, damit die Summe gleich b ist? Also

$$a + x = b.$$

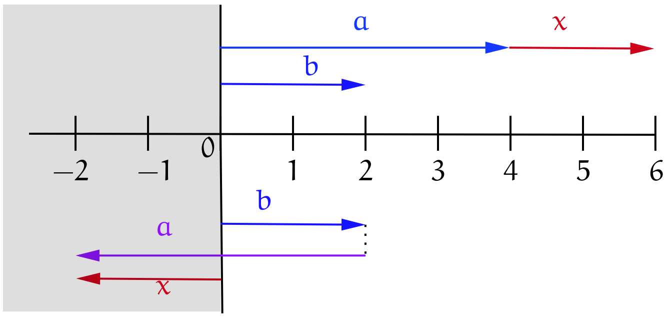
Die Antwort: Man muss a von b in Abzug bringen, geschrieben

$$b - a = x.$$

das Zeichen $-$ ist das Minuszeichen.
Auf dem Zahlenstrahl sieht diese Situation wie folgt aus:



Nun zeichnen wir die Situation, bei welcher immer noch $a + x = b$ gilt, aber jetzt ist $b < a$. Wie man in der Figur sieht, landet man im negativen Zahlenbereich.



Anmerkung 8.7. Das führt zu folgender Feststellung: Für natürliche Zahlen ist die Subtraktion nicht *unbeschränkt ausführbar*, für ganze Zahlen, also mit Einschluss der negative Zahlen, aber schon. Man sagt: In der Grundmenge $G = \mathbb{N}$ ist die Subtraktion nicht abgeschlossen, d.h. $4 - 7$ nicht ausführbar. In $G = \mathbb{Z}$ ist die Subtraktion abgeschlossen, d.h. $4 - 7 = (-3)$.

In Anlehnung an die Addition schauen wir, ob die Subtraktion assoziativ und kommutativ ist. Sind $5 - 3$ und $3 - 5$ dasselbe? In den ganzen Zahlen, wo beide Terme sinnvoll sind, stimmt die Vertauschung nicht, denn die erste Differenz ist 2 und die zweite (-2). Sodann fragen wir nach der Gleichheit von $(7 - 3) - 1$ und $7 - (3 - 1)$. Der erste Term ist gleichbedeutend mit $4 - 3$ und der zweite $7 - 2$. Die Differenzen sind nicht gleich. Gibt es ein Nullelement? Ja, denn $a - 0 = 0$. Zusammenfassend:

Satz 8.8. Die Subtraktion ist nicht kommutativ und nicht assoziativ. Die 0 ist Nullelement.

Satz 8.9. Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition, et vice versa.

Definition 45. (Differenz) Die *Differenz* zweier Zahlen ist gleich jener Zahl, die zum Subtrahenden addieren muss, um den Minuenden zu erhalten. Formal:

$$\text{Minuend} - \text{Subtrahend} = \text{Differenz}$$

$$\text{Subtrahend} = \text{Minuend} - \text{Differenz}.$$

8.4.3 Verknüpfung von Addition und Subtraktion

Wir betrachten hier Terme mit 3 oder mehr Variablen, die wir addieren und subtrahieren, und zwar für ganze Zahlen, die negative Zahlen einschliessen.
Operationen gleicher Stufe, hier Addition und Subtraktion, kann man einfach von links nach rechts ausführen. Z.B.,auch mit negativen Zahlen (-3),

$$3-4-5+7-12+(-3)+12+4=2.$$

Mit Klammer kann man die Priorität ändern. Anstatt nur von links nach rechts heisst es dann, zuerst die Klammern ausrechnen. Sie haben höhere Priorität. Deshalb:

$$3-(4-5)+7-12+(-3)+(12+4)=10.$$

Wir vergleichen die zwei Ausdrücke und stellen fest: $-4-5=-9\neq-(4-5)=1$ und $+12+4=16=1(12+4)$. Klammern sind nur notwendig, wenn ein Minuszeichen vor der Klammer oder in der Klammer vorkommt.

Satz 8.10. Eine Summe darf man gliedweise subtrahieren, $a-(b+c)=a-b-c$.

8.11 Beispiel $8-(5+1)=8-6=8-5-1=3-1=2$ ◁

Satz 8.12. Man kann eine Differenz addieren, indem man den Minuenden addiert und den Subtrahenden subtrahiert, $a+(b-c)=a+b-c$.

Satz 8.13. Die Differenz einer Zahl a mit einer Differenz $b-c$ ist $a-(b-c)=a-b+c$.

Wir zeigen die Richtigkeit dieser Formel, indem wir die zwei Subtrahenden der linken und der rechten Seite subtrahieren. Wenn sie gleich sind, wie angenommen, dann müssen sie sich aufheben, verschwinden. Wir untersuchen ausgehend von $a-(b-c)=a-b+c$:

$$\begin{aligned}a-b+c+(b-c)&=a-b+[c+(b-c)]\\&=a-b+[c+b-c]=a-b+[b]=a.\end{aligned}$$

Eigenschaften 8.14. Klammerregeln 1. Stufe

- Pluszeichen vor der Klammer: Terme können mit ihren Vorzeichen aus der Klammer gezogen werden, $a+(b-c-x)=a+b-c-x$
- Beliebige Terme können ohne weiteres in eine Klammer mit vorangehendem Pluszeichen gestellt werden, $a+c-d+e=a+(c-d+e)$
- Minuszeichen vor Klammer: Terme können mit geändertem Vorzeichen aus der Klammer gezogen werden, $x-(y+z-c)=x-y-z+c$.
- Terme können in eine Klammer mit negativem Vorzeichen gestellt werden, indem man das Vorzeichen ändert, $a-b-c+d=a-(b+c-d)$

8.15 Übung Wir formen um: $(x+2y-3z+a)+(2x-3y+z-4a)+(2a-3x+y-z)$. Die Klammern kann man weglassen, denn sie folgen alle einem Pluszeichen. Also $x+2y-3z+a+2x-3y+z-4a+2a-3x+y-z$. Am besten schiebt man alle gleichartigen Terme zusammen: $x+2x-3x+2y-3y+y-3z+z-z-4a+2a+a$ und summiert $0x+0y-3z-a=-3z-a$.
◁

8.16 Übung Bestimmen wir $a-(3b-2c+a)-(2b-a-c)-(6-c+a)$. Wir lösen die Klammer auf unter Berücksichtigung der Vorzeichen $a-3b+2c-a-2b+a+c-6+c-a$ und somit $0a-5b+4c-6$. ◁

8.17 Übung Im Ausdruck $a+bd-c+eb$ sollen die drei letzten Terme in einer Klammer mit negativem Vorzeichen geschrieben werden. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen folgt $a-(-bd+c-eb)$. ◁

8.5 Operationen zweiter Stufe

8.5.1 Die Multiplikation

Die Multiplikation folgt aus der wiederholten Anwendung der Addition. Generell gilt für natürliche Zahlen n:

$$n\cdot a=\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n\text{ Mal}}$$

Satz 8.1. Die Multiplikation natürlicher Zahlen ist die Addition von gleichen Summanden.

Der Sprachgebrauch zur Multiplikation ist wie folgt:

Definition 46. Das *Produkt* ist die Multiplikation zweier Zahlen, die man Faktoren nennt.

Definition 47. Das Operationszeichen der Multiplikation ist der Punkt $\cdot$ oder das Kreuz $\times$.

Anmerkung 8.2. Das Operationszeichen kann dort weggelassen werden, wo es nicht missverständlich ist, also anstatt $2\cdot a$ dann $2a$, $a\cdot b$ als ab. Aber nicht $2\cdot 2$ durch 22 zu ersetzen.

Wir wissen schon seit langem, dass $5\cdot 3$ dieselbe Zahl ist wie $3\cdot 5$. Faktoren sind vertauschbar. Desgleichen gilt $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ wie in $3\cdot 4\cdot 5=12\cdot 5=3\cdot 20=60$. Im weiteren führt die Multiplikation mit 1 zur Identität, also $a\cdot 1=a$. 1 ist Nullelement. Zusammengefasst gilt:

Eigenschaften 8.3. Multiplikation Die Multiplikation für ganze Zahlen ist

(1) kommutativ $a\cdot b=b\cdot a$,

(2) assoziativ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$,

(3) besitzt 1 als Nullelement $a\cdot 1=a$ und

(4) ist unbeschränkt ausführbar.

Aus der Summe von Summen:

$$\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n\text{ Mal}}+\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{k\text{ Mal}}=(n+k)\cdot a$$

folgt, dass

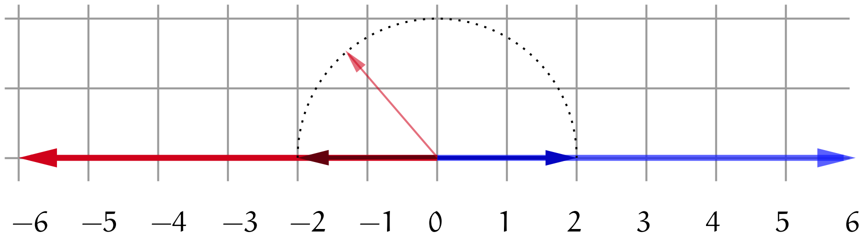
$$n\cdot a+k\cdot a=(n+k)\cdot a.$$

Ganz analog mit der Differenz:

$$\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n\text{ Mal}}-\underbrace{(a+a+a+\ldots+a)}_{k\text{ Mal}}=(n-k)\cdot a$$

folgt, dass
$$n \cdot a - k \cdot a = (n-k) \cdot a.$$

In diesem Beispiel ist das Resultat eine positive Zahl, wenn $n > k$, eine negative Zahl, wenn $n < k$ und null, wenn $n = k$.
Die Multiplikation mit einer negativen Zahl, z.B. (-3), kann man als Streckung einer Zahl, hier 2, um den Faktor 3 verstehen, gekoppelt mit einer Drehung um 180 Grad auf dem Zahlenstrahl.



Für ganze Zahlen muss man die jeweiligen Vorzeichen berücksichtigen.

Satz 8.4. Vorzeichenregel Es gilt folgende Vorzeichenregel:
$$\begin{aligned}(+1)\cdot(+1) &= 1\\ (+1)\cdot(-1) &= (-1)\\ (-1)\cdot(+1) &= (-1)\\ (-1)\cdot(-1) &= 1\end{aligned}$$

Anmerkung 8.5. Jedes negative Vorzeichen eines Faktors führt zu einer Drehung um 180 Grad auf dem Zahlenstrahl. Eine zweimalige Anwendung der Drehung führt auf die Ausgangsrichtung zurück.

Eine andere Begründung ist wie folgt: Wir gehen von $(-a)\cdot(-b)$ aus und nehmen eine dritte Variable c zu Hilfe, die wir als $c - c = 0$ einfügen. Wir schreiben
$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot[c-(c+b)]\\ &= (-a)\cdot c - (-a)\cdot(c+b)\\ &= -ac - [-ac - ab]\\ &= -ac + ac + ab\\ &= +ab\end{aligned}$$

Damit kann man die Multiplikation ganzer Zahlen wie folgt festlegen:

Satz 8.6. Zwei ganze Zahlen werden multipliziert, indem man ihre jeweiligen Beträge (Zahl ohne Vorzeichen) multipliziert und mit dem Vorzeichen nach Regel 8.4 versieht.

8.7 Übung Wir berechnen die Produkte (a) $(-2)\cdot 3\cdot(-3)\cdot(-1)$. Wir bilden zwei Produkte $[(-2)\cdot 3]\cdot[(-3)\cdot(-1)] = [-6]\cdot[3] = -18$. Man kann auch einfach alle Beträge multiplizieren, also $2\cdot 3\cdot 3\cdot 1 = 18$ und dann die Minuszeichen zählen. Ist diese Zahl gerade, denn folgt eine positive Zahl, ist sie ungerade, dann folgt eine negative Zahl. Wir zählen 3 negative Vorzeichen, also bleibt es negativ. Somit ist die Lösung -18. ◁

Verteilungsgesetz

Das Verteilungsgesetz der Multiplikation, auch Distributivgesetz genannt, befasst sich mit der Multiplikation von Summen und Differenzen.

Wir fangen mit dem Ausdruck $m \cdot a + n \cdot a$ und gehen von der Multiplikation zurück auf die Addition

$$\begin{aligned} m \cdot a &= \overbrace{a + a + \ldots + a}^{m} \\ n \cdot a &= \overbrace{a + a + a + \ldots + a}^{n} \\ \hline (m+n) \cdot a &= \overbrace{a + a + a + \ldots + a + a}^{m+n} \end{aligned}$$

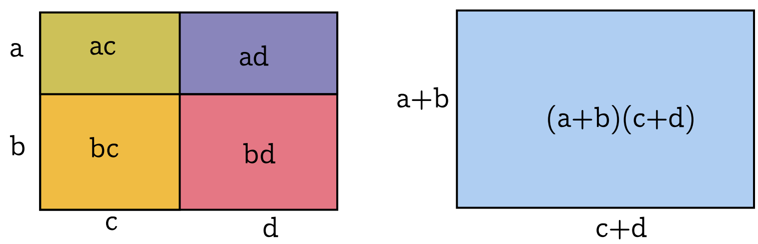
Es gilt also die Formel

$$m \cdot a + n \cdot a = a(m+n)$$

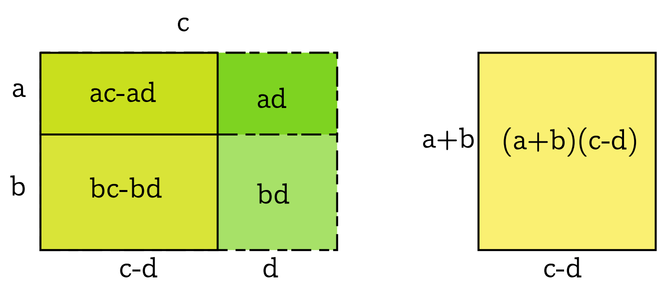
Wenn man die Gleichung von links nach rechts liest, dann nennt man die Umformung "ausklammern" oder "faktorisieren", wenn man von rechts nach links umformt, dann "ausmultiplizieren" oder "entwickeln". Man sieht ebenfalls aus der obigen Addition, dass auch $m \cdot a - n \cdot a = (m-n) \cdot a$ sein muss.

Wir betrachten einen Ausdruck wie $(a+b)(c+d)$. Aus der folgenden Abbildung geht sofort hervor, dass gilt

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$



In analoger Weise für die Multiplikation einer Summe mit einer Differenz



Wir fassen zusammen.

Eigenschaften 8.8. Verteilungsgesetz und Faktorisieren Für alle reellen Zahlen a, b und c:

- **Distributivgesetz:**

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ a(b-c) &= ab-ac \\ (a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd \\ (a+b)(c-d) &= ac-ad+bc-bd \end{aligned}$$

- **Faktorisieren:**

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

Wichtig 5.

- Multipliziert man eine Klammer einer Summe oder Differenz, so wird jeder Term in der Klammer mit dem Faktor multipliziert, $a \cdot (b-c+e) = ab - ac + ae$
- Multipliziert man zwei Klammerausdrücke mit Summen oder Differenzen, so wird, mit Beachtung der Vorzeichenregel 8.4, jeder Term mit jedem multipliziert, $(a+b)\cdot(c-d) = ac - ad + bc - bd$.

$\dashv$

8.9 Übung Klammere aus: $ax + bx + c$. Ein gemeinsamer Faktor ist x, so dass $x(a+b)+c$ ein aequivalenter Ausdruck ist. $\triangleleft$

8.10 Übung Multipliziere aus: $(p+q)(x+3)$. Jeder mit jedem, also $px + 3p + qx + 3q$. $\triangleleft$

8.11 Übung Multipliziere aus: $(a+b+c)(x+y-z)$. Wi beginnen mit a und multiplizieren jeden Summanden der zweiten Klammer, also $ax + ay - az$, dasselbe mit b: $bx + by - bz$ und zuletzt mit c: $cx + cy - cz$. Alles zusammen

$$(a+b+c)(x+y-z) = ax + ay - az \; + \; bx + by - bz \; + \; cx + cy - cz.$$

$\triangleleft$

8.12 Übung Multipliziere $(x-y)(x-y)$ aus. Es ist $(x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Das ist eine Formel zum Merken. Ebenso $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Zusammen also

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2.$$

$\triangleleft$

8.13 Übung Wir rechnen $(x+y)^3$ mit der Vorarbeit von oben, also $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y^2)$ ergibt

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

$\triangleleft$

8.14 Übung Was gibt $(a-b)(a+b)$? Ausmultiplizieren führt zu

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$\triangleleft$

Merke!

Formel 8.15. Binomische Formeln

(1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(2) $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

8.16 Übung Schreibe um mit den binomischen Formeln: $(5-x)^2$. Das Quadrat ergibt mit der ersten binomischen Formel $5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + x^2$. $\triangleleft$

8.17 Übung Forme $64x^2 - 1$ um. Beide Terme sind Quadrate, also folgt mit der zweiten binomischen Formel $64x^2 - 1 = (8x-1)(8x+1)$. Ebenso $16x^4 - 1$: es folgt $(4x^2-1)(4x^2+1)$ und weiter nochmals mit der zweiten Binomischen: $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$. $\triangleleft$

8.18 Übung Man multiplizere $xy + mn - xm - yn$ mit $xy - mn + xm - yn$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
(xy + mn - xm - yn)\cdot(xy - mn + xm - yn) = {} & x^2y^2 - mnxy + x^2ym - xy^2n \\
& + mnxy - m^2n^2 + m^2nx - mn^2y \\
& - x^2my + xm^2n - x^2m^2 + xymn \\
& - xy^2n + ymn^2 - xymn + y^2n^2 \\
= {} & x^2y^2 - \cancel{mnxy} + \cancel{x^2ym} - \cancel{xy^2n} \\
& + \cancel{mnxy} - m^2n^2 + \cancel{m^2nx} - \cancel{mn^2y} \\
& - \cancel{x^2my} + \cancel{xm^2n} - x^2m^2 + \cancel{xymn} \\
& - \cancel{xy^2n} + \cancel{ymn^2} - \cancel{xymn} + y^2n^2 \\
= {} & x^2y^2 - m^2n^2 - x^2m^2 + y^2n^2
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Quadratische Ausdrücke faktorisieren

Es ist einfach, einen Ausdruck wie $(x+3)(x+2)$ auszurechnen. Man multipliziert jeden Summanden mit jedem und erhält $x^2 + 2x + 3x + 6$ oder $x^2 + 5x + 6$. Solche quadratischen Ausdrücke hingegen in Faktoren zu verwandeln, ist etwas schwieriger. Wir betrachten das allgemeinere Problem $(x+a)(x+b)$ und rechnen aus $x^2 + (a+b) + a \cdot b$. Wenn wir die Koeffizienten vergleichen mit obigem Ausdruck, so sehen wir

$$a + b = 5 \qquad \text{und} \qquad a \cdot b = 6$$

Der schlaue Versuch ist die Faktorzerlegung des Terms $ab = 6$. Dafür gibt es zwei Kandidaten, entweder $6 \cdot 1$ oder $2 \cdot 3$. Jetzt prüfen wir $a + b = 5$. Die Rechnung stimmt mit $a = 3$ und $b = 2$ überein. Es gibt zwar $6 - 1$ auch 5, aber wenn ein Term negativ ist, dann ist das Produkt negativ, was hier nicht zutrifft. Wir haben die Faktorisierung $(x+2)(x+3)$ gefunden.

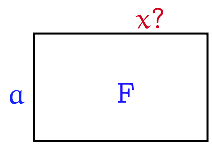
8.19 Übung Wir betrachten $x^2 - 10x - 11$. Der Term ab kann nur $(-1) \cdot 11 \cdot 1$ sein, denn 11 ist eine Primzahl. Mit $a = -11$ und $b = 1$ ist $a + b = -10$. Damit die Zerlegung $(x - 11)(x + 1)$ ◁

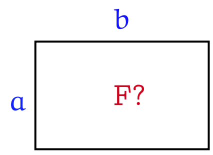
8.20 Übung Wir suchen die Faktoren von $x^2 - 18x + 65$. Es ist $65 = 5 \cdot 13$. Nun muss $a + b = -18$ sein. Wegen des Minuszeichens muss $a = -13$ und $b = -5$ sein. Beim Produkt ab heben sich die Vorzeichen gegenseitig auf, es ist $65 = (-13)(-5)$. Somit muss die Faktorisierung $(x - 13)(x - 5)$ sein. ◁

8.21 Übung Nun der Ausdruck $x^2 - 14x + 49$. Die Zahl 49 hat die Faktoren $49 \cdot 1$ oder $7 \cdot 7$. Mit 49 und 1 bekommt man keine Differenz oder Summe von 14, aber $-7 - 7$ gibt -14. Somit ist die Lösung $(x - 7)(x - 7)$. Nun hätte man erkennen können, dass der Ausdruck der ersten binomischen Formel gehorcht. ◁

8.5.2 Die Division

Die Division leitet sich von der Multiplikation ab. Die Multiplikation fragt nach dem Produkt, wenn zwei oder mehr Faktoren gegeben sind.





Die Division fragt nach einem Faktor, wenn Produkt und ein Faktor gegeben sind. Die geometrische Darstellung im Bild rechts vermittelt die Fragestellung. Division: Finde eine Seite des Rechtecks, wenn die andere Seite und die Fläche gegeben sind. Eine andere Motivation geht aus der Formel

$$F = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ Mal}}$$

hervor. Es wird nach der Zahl n gefragt. Oder, bei bekannten n wird nach a gefragt. Wie gross muss n sein, wenn die n-malige Addition zu F führt? Die Division beantwortet auch die Frage, wie viel Mal die eine Grösse in der anderen enthalten ist. Für die Division brauchen wir ein Operationszeichen.

Definition 48. Das Operationszeichen der Division ist "$\div$" oder ":" oder $\frac{\square}{\square}$ oder "/". Für $a \div b$ sagt man "a dividiert durch b" oder "a durch b".

Anmerkung 8.22. Im Zeichne $\div$ steckt ein kleiner Bruchstrich.

Definition 49. *Dividieren* heisst, aus einem Produkt zweier Zahlen und einem bekannten Faktor den unbekannten Faktor zu finden.

$$(a \cdot b) \div a = b.$$

Man kann auch sagen: Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren heisst, eine dritte Zahl $a \div b$ zu finden, die mit der zweiten multipliziert die erste zum Produkt hat, $(a \div b) \cdot b$=a. Damit ist hinlänglich klar:

Satz 8.23. Die Division ist die Umkehrabbildung der Multiplikation und umgekehrt.

Definition 50. Der Term $a \div b$ nennt sich *Quotient* (oder Bruch), wobei a der *Dividend* und b der *Divisor* genannt werden.

Abgeschlossenheit

Wir haben weiter oben gesehen, dass die Subtraktion nicht abeschlossen ist in Bezug auf die Natürlichen Zahlen. Das bedeutet, dass die Differenz zweier natürlicher Zahlen keine natürliche Zahl sein muss. Dasselbe Phänomen tritt uns bei der Division entgegen. Wenn wir zwei ganze Zahlen dividieren so ist das Resultat meist keine ganze Zahl. Wenn $\frac{10}{2} = 5$ ist, so ist $\frac{2}{5} = 0.4$ oder $\frac{1}{6} = 1.6\overline{6}$. Diese neue Art von Zahl nennt sich rationale Zahl und wird im nächsten Kapitel vertieft.

Rechenregeln

Wir wenden uns den Rechenregeln zu. Aus der Definition

$$(a \cdot b) \div a = b$$

folgt $a \cdot b = a \cdot (a \cdot b) \div a$ Zahlenmässig: mit $a = 12$ und $b = 4$ folgt: $12 \cdot 4 = 12 \cdot (12 \cdot 4) \div 12 = 48 = 12 \cdot (48 \div 12) = 12 \cdot 4 = 48$

Die Division $a \div 1 = \frac{a}{1}$ ist gleich $a = a \div 1$. Somit ist 1 das *neutrale Element* der Division. Eine Zahl durch sich selbst geteilt gibt 1, $\frac{a}{a} = 1$. Merke:

$$a = a \div 1 \quad \text{und} \quad \frac{a}{a} = 1$$

Wenn $a \div b = a \div c$, bzw. $b \div a = c \div a$ dann folgt, dass $b = c$.

Jede Zahl mit 0 multipliziert gibt 0, $a \cdot 0 = 0$. Die Umkehrung, "mit welcher Zahl muss man 0 multiplizieren, um a zu bekommen" $x \cdot 0 = a$, ist nicht definiert. Deshalb ist die Division durch 0 nicht zulässig.

Wichtig 6. Die Division durch die Null ist nicht definiert und deshalb nicht zulässig. $\dashv$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{(a : d)}{(b : d}$$

Satz 8.24. Es gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{(a : d)}{(b : d}.$$

Da eine Bruch eine Zahl ist, kann sie auch negativ sein. Man kann einen negativen Bruch auf drei aequivalente Arten schreiben.

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Wenn man den ersten Ausdruck mit $(-1)/(-1) = 1$ erweitert, folgt der dritte Ausdruck.

Division mit Rest

Satz 8.25. Zu je zwei natürlichen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen m und r mit den Eigenschaften

$$a = m \cdot b + r \qquad \text{mit} \quad 0 \leqslant r < b.$$

Definition 51. Die Zahl m heisst *ganzzahliger Quotient* von a und b, die Zahl r Rest von a nach Division durch b.

8.26 Beispiel Aus 5/3 folgt der ganzzahlige Quotient 1 und der Rest 2. $\triangleleft$

8.5.3 Brüche

Den Begriff Bruch kennen wir schon seit langem aus der Grundschule. Der Bruch ist eine bestimmte Darstellung der *Division*, nämlich als zwei Zahlen, die übereinander stehen und durch einen Strich getrennt sind.

Definition 52. Die Zahl über dem Strich nennt man *Zähler*, die untere Zahl *Nenner*,

$$\text{Bruch} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

.

Interpretation

Im Alltag kommen Brüche beim Teilen z.B. von Esswaren vor. Die Mutter teilt zwei Äpfel für ihre vier Kinder oder eine Torte in acht Stücke. Diese Betrachtung geht von einem Ganzen aus, das dann zerstückelt wird. Diese Sicht wird mit dem *Prozent* verdeutlicht, das auf deutsch "von Hundert" bedeutet. In älteren Bücher findet man deshalb vielfach anstatt "%" noch "v.H." als Angabe.
Teilen ist das deutsche Wort für Division. Bei dieser haben wir den Sprachgebrauch von Quotient.

$$\text{Bruch} = \text{Quotient}$$

und deshalb

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}.$$

8.5.4 Erweitern und Kürzen, gleichnamig

Brüche kann man umformen, indem man im Wesentlichen den Bruch mit 1 multipliziert, wobei $1 = \frac{c}{c}$ beim Erweitern oder $1 = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}}$ beim Kürzen ist.

Kürzen

Formel 8.27. Kürzen von Brüchen Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl $c \neq 0$ dividiert werden:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

Anmerkung 8.28. Es können nur Faktoren gekürzt werden, aber nicht Summanden oder Differenzen. Der Bruch $\frac{c(a+b)}{cd}$ ist gekürzt $\frac{(a+b)}{d}$, denn c ist ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner. Der Bruch $\frac{ca+b}{cd}$ kann nicht einfach gekürzt werden, aber umgeschrieben $\frac{ca}{cd} + \frac{b}{cd} = \frac{a}{d} + \frac{b}{cd}$. Das c hier ist nicht Faktor des ursprünglichen Zählers, sondern nur Faktor eines Summanden. Zusammenfassend

$$\frac{c(a+b)}{cd} = \frac{(a+b)}{d} \quad , \quad \frac{ca+b}{cd} = \frac{ca}{cd} + \frac{b}{cd} = \frac{a}{d} + \frac{b}{cd}$$

8.29 Übung Wir schauen uns den Bruch $\frac{1024}{32}$ an. Ein gemeinsamer Faktor ist 2, also kann man schreiben $\frac{1024}{32} = \frac{2\cdot 512}{2\cdot 16}$ und kürzen $\frac{512}{16}$. Nun kann man weitere Faktoren abspalten. Wir schreiben die Zerlegung $\frac{512}{16} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 16}{16} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$. Oder

$$\frac{1024}{32} = \frac{512}{16} = \frac{256}{8} = \frac{128}{4} = \frac{64}{2} = 32$$

◁

8.30 Übung Die analysieren den Bruch $\dfrac{(x-2)(x^2-9)}{(x-1)(x+3)}$. Mit der zweiten binomischen Formel folgt

$$\frac{(x-2)(x^2-9)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x-2)(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x-1)\cancel{(x+3)}} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)}$$

◁

8.31 Übung Wir vereinfachen durch Kürzen folgenden Ausdruck $\dfrac{a^2bc^5 - ab^3d}{a^3b^2}$. Wir faktorisieren

$$\frac{a^2bc^5 - ab^3d}{a^3b^2} = \frac{ab(ac^5 - b^2d)}{ab\cdot a^2b} = \frac{\cancel{ab}(ac^5 - b^2d)}{\cancel{ab}\cdot a^2b} = \frac{ac^5 - b^2d}{a^2b}$$

◁

Wichtig 7. ☠☠☠ Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen. ⊣

8.32 Übung Mittels Kürzen kann man auch Dezimalzahlen in Brüche verwandeln. Die Zahl 0.125 ist

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{5\cdot 25}{40\cdot 25} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

◁

Erweitern

Man kann sich die Analogie der Addition von 10cm zu 2m vorstellen. Bevor man die Addition ausführen kann, muss man dieselben Einheiten bestimmen, also $0.1+2$ in Meter oder $10+200$ in cm. Oder Kuchenstücke, vom einen Kuchen je achte Teile und vom anderen Viertel.
Erweitern ist die Voraussetzung, um Quotienten addieren oder subtrahieren zu können. Diese zwei Operationen funktionieren nur für Quotienten mit gleichem Divisor, oder Nenner, wie in Satz 8.45 festgehalten .
Der Satz 8.24 zur *Erweiterung* bringt die Lösung näher. Wir wollen die zwei Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ addieren. Dazu müssen sie gemäss Satz 8.45 gleichnamig sein. Wir müssen beide Quotienten so erweitern, dass sie einen gemeinsamen Nenner aufweisen. Die Summe ist in diesem Beispiel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ?$$

Der einfachste gemeinsame Nenner ist $b\cdot d$.

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{a}{b} & & \frac{a}{b}\frac{d}{d} \\ & \xrightarrow{\text{erweitern}} & \\ \frac{c}{d} & & \frac{c}{d}\frac{b}{b} \end{array}$$

Somit haben wir zwei Quotienten mit gleichem Nenner. Diese können wir nun addieren

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Ein weiteres Beispiel mit Summen und Differenzen im Zähler:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{a+w}{\color{blue}{b}}\\[2em]\dfrac{c-u}{\color{red}{d}}\end{array}\right|\xrightarrow{\text{erweitern}}\left|\begin{array}{c}\dfrac{(a+w)}{b}\dfrac{\color{red}{d}}{\color{red}{d}}\\[2em]\dfrac{(c-u)}{d}\dfrac{\color{blue}{b}}{\color{blue}{b}}\end{array}\right.$$

8.33 Übung Bringe auf den kleinsten gemeinsamen Nenner:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{6}{6}\frac{1}{x}+\frac{3}{3}\frac{1}{2x}+\frac{2}{2}\frac{1}{3x}=\frac{6}{6x}+\frac{3}{6x}+\frac{2}{6x}=\frac{11}{6x}$$

Hauptnenner ist 6x. ◁

Formel 8.34. Erweitern von Brüchen Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl, die nicht Null ist, multipliziert werden:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

8.35 Übung Wir erweitern den Bruch $\frac{2x}{a}$ mit $\frac{b}{b}$. Die Multiplikation ergibt

$$\frac{2x}{a}=\frac{2bx}{ab}$$

◁

Gleichnamigkeit

Definition 53. *Gleichnamig machen* bedeutet, Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen.

Definition 54. Der *Hauptnenner* mehrerer Brüche ist das kleinste gemeinsame Vielfache kgV der Nenner dieser Brüche.

Anmerkung 8.36. Es gibt beliebig viele gleichnamige Nenner, der Hauptnenner ist der maximal gekürzte Nenner.

Wichtig 8. ☠☠ Gleichnamigkeit der Nenner ist Voraussetzung für die Addition und Subtraktion von Brüchen ⊣

8.37 Übung Bestimmen wir den kgV von $4a^2$ und $6ac$. Dazu zerlegen wir in Faktoren $2\cdot2\cdot a\cdot a$ und $2\cdot3\cdot a\cdot c$. Gemäss Rezept 8.7 muss man die am häufigsten auftretenden Faktoren bestimmen. Hier also $2\cdot2\cdot3\cdot a\cdot a\cdot c=12a^2c$. Nun fragt man: womit muss ich den bestehenden Nenner muoltiplizieren, damit ich den Hauptnenner bekomme? Für den ersten Term ist dies $3c$ und für den zweiten $2a$. $12a^2c=3c\cdot4a^2=2a\cdot6ac$. ◁

8.38 Übung Wir machen die zwei Terme gleichnamig: $\frac{7}{x^2}$ und $\frac{4}{x}$. Der Hauptnenner ist x^2, wir müssen nur den zweiten Term mit $\frac{x}{x}$ erweitern, also: $\frac{4}{x}\frac{x}{x} = \frac{4x}{x^2}$. ◁

8.39 Übung Mache gleichnamig: $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{b+c}$. Da die Nenner keine gemeinsamen Faktoren besitzen, ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner, also $b(b+c)$. Den ersten Term muss man mit $(b+c)/(b+c)$ erweitern, den zweiten mit b. Somit folgt

$$\frac{a(b+c)}{b(b+c)} \quad , \quad \frac{ab}{b(b+c)}.$$

◁

8.40 Übung Machen wir folgende Brüche gleichnamig: $\frac{a}{2b}$ und $\frac{b}{2a}$. Gleichnamige Nenner haben dieselben Faktoren. Unterschiedliche Faktoren sind a und b. Gemeinsamer Nenner ist $2ab$. Beim ersten Bruch fehlt ein a im Nenner, deshalb mit $\frac{a}{a}$ erweitern. Beim zweiten fehlt ein b, deshalb mit $\frac{b}{b}$ erweitern. Somit

$$\frac{a}{2b} = \frac{a \cdot a}{2b \cdot a} \quad \text{und} \quad \frac{b}{2a} = \frac{b \cdot b}{2a \cdot b}$$

◁

8.41 Übung Mache gleichnamig: $\frac{8}{m}$, $\frac{11}{np}$ und $\frac{6}{p}$. Hauptnenner ist das Produkt aller unterschiedlicher Faktoren, hier mnp. Erster Term mit np erweitern, zweiter mit m und dritter mit mn. Somit

$$\frac{8}{m} = \frac{8 \cdot np}{m \cdot np} \quad , \quad \frac{11}{np} = \frac{11 \cdot m}{np \cdot m} \quad \text{und} \quad \frac{6}{p \cdot mn} = \frac{6}{p \cdot mn}.$$

◁

8.42 Übung Gleichnamig machen von $\frac{x-y}{x}$ und $\frac{x^2+y^2}{x^2-xy}$. Den zweiten Nenner zerlegen wir in Faktoren durch Ausklammern: $x(x-y)$. Das ist auch der Hauptnenner. Ersten Term mit $\frac{x-y}{x-y}$ erweitern, zweiter sein lassen, denn besitzt schon Hauptnenner. Somit

$$\frac{x-y}{x} \cdot \frac{x-y}{x-y} = \frac{(x-y)^2}{x(x-y)} \quad \text{und} \quad \frac{x^2+y^2}{x(x-y)}.$$

◁

8.43 Übung Gleichnamig machen: $\frac{2p}{p+2q}$ und $\frac{q}{p+q}$. Obwohl die Nenner ähnlich ausschauen sind sie unterschiedliche Faktoren. Deshalb ist der Hauptnenner das Produkt dieser Faktoren, hier $(p+2q)(p+q)$. Die Erweiterungen ergeben

$$\frac{2p}{p+2q}\frac{p+q}{p+q} = \frac{2p(p+q)}{(p+2q)(p+q)} \quad \text{und} \quad \frac{q}{p+q}\frac{p+2q}{p+2q} = \frac{q(p+2q)}{(p+q)(p+2q)}.$$

◁

8.5.5 Verknüpfungen der vier Rechenarten

Die Division ist eine Operation zweiter Stufe wie die Multiplikation (“Punkt-Operation”). Addition und Subtraktion sind erster Stufe (“Strich-Operation”). Nun möchten wir diese

Operationen in Verbindung bringen. Aus der Grundschule wissen wir, dass man folgende Rechnung machen darf:

$$848 \div 8 = (800 + 40 + 8) \div 8 = 100 + 5 + 1 = 106.$$

Diese Rechnung ist formal gleich wie:

$$(x + y + z) \div m = \frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{m}$$

Satz 8.44. Summe durch Zahl dividieren:

$$(a + b) \div m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}.$$

Differenz durch Zahl dividieren:

$$(a - b) \div m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

Die Umkehrung dieses Lehrsatzes führt dann zu:

Satz 8.45. Quotienten mit gleichem Divisor addieren:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m}.$$

Quotienten mit gleichem Divisor subtrahieren:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}.$$

Man beachte, dass die zwei Sätze explizit nur für gleiche Divisoren, also Nenner, gelten. Solche Brüche nennt man gleichnamig. Für Brüche, die nicht gleichnamig sind, also unterschiedliche Nenner aufweisen, muss man die Umformung des Gleichnamigmachens ausführen.

Satz 8.46. Ein Produkt von Zahlen wird durch eine Zahl dividiert, indem man nur einen Faktor durch den Divisor dividiert und diesen Quotienten mit den anderen Faktoren multipliziert. Formal:

$$(a \cdot b) \div m = \frac{a}{m} \cdot b = a \cdot \frac{b}{m}.$$

Ein Zahlenbeispiel zeigt die Gültigkeit des Lehrsatzes: $(16 \cdot 4) \div 2 = 8 \cdot 4 = 16 \cdot 2 = 32$.

Satz 8.47. Quotienten mit Zahl multiplizieren:

$$\frac{b}{c} \cdot a = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Satz 8.48. Quotienten durch eine Zahl dividieren:

$$\frac{a}{c} \div b = \frac{a \div b}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

Beispiel: $\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3 \div 5}{2} = \frac{3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$

Satz 8.49. Zahl durch Produkt dividieren:

$$a \div (b \cdot c) = \frac{a}{b} \div c.$$

Beispiel: $360 \div (9 \cdot 8) = \frac{360}{9} \div 8 = 40 \div 8 = 5$

Satz 8.50. Zahl durch Quotienten dividieren:

$$a \div \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Die Division mit einem Quotienten ist gleich der Multiplikation mit dem Kehrwert!

Beispiel: $5 \div \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{3}{1} = 15$.

Satz 8.51. Zwei Quotienten multiplizieren:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}.$$

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$.

Satz 8.52. Quotienten durch Quotienten dividieren:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Man multipliziert mit dem Kehrwert.

Beispiel: $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

8.53 Übung Rechne! Ein Arbeiter A braucht x Tage zur Erledigung einer Arbeit, B deren y und C genau z. Wenn sie zusammenarbeiten (und sich nicht gegenseitig behindern) dann schaffen sie in einem Tag wieviel der ganzen Arbeit? A schafft an einem Tag $\frac{1}{x}$, B $\frac{1}{y}$ und C $\frac{1}{z}$. Zusammen also $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. ◁

Zusammenfassend

Eigenschaften 8.54. Brüche a, b, c und d sind ganze Zahlen (und im Nenner nicht null).

- **Identität:** $a = \frac{a}{1}$ und $\frac{a}{a} = 1$.
- **Gleichheit:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $ad = bc$.
- **Multiplikation:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- **Division:** $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
- **Addition und Subtraktion:** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

Wichtig 9. ☠☠Für die Addition und Subtraktion von Brüchen ist die Gleichnamigkeit der Nenner zwingend. ⊣

Anmerkung 8.55. Für die Multiplikation und Division sind keine gemeinsamen Nenner notwendig.

Anmerkung 8.56. Speziell gilt: $1 \div \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ und $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

Klammerregeln

Die Operationen haben eine vorgegebene Priorität. Je höher die Stufe desto höher die Priorität. Gibt man einen Ausdruck wie $100/5/2*4+7-90/3$ in einen Rechner ein, so weiss dieser, wie zu rechnen ist. Das Resultat ist jedenfalls 17. Es gibt also nur eine Art, diesen Ausdruck zu berechnen. Eine kleine Umstellung $100*4/5/2+7-90/3$ ergibt wiederum 17. Ebenso $100*4/5/2-90/3+7$.
Mit Klammersetzung kann man diese innewohnende Ordnung ändern. Die Ausdrücke in der Klammer bekommen die höchste Priorität, sie müssen zuerst bestimmt werden. Anderseits gibt es Klammersetzungen, die nichts bewirken, ausser vielleicht bessere Lesbarkeit.

8.6 Prozentrechnen und Proportionen

Das Wort Prozent stammt aus dem Lateinischen und bedeutet "vom Hundert". Der Sinn ist der einheitliche Bezug auf die Zahl 100 als Ganzes. Anstatt drei von fünf, wo man sich auf 5 bezieht, würde man sagen 60 vom Hundert oder 60 Prozent. Anstatt 1025 von 100'000 würde man sagen 1.02%.
Das Zeichen "%" ist gleichbedeutend mit dem Bruch $\frac{1}{100}$.

Definition 55. Ein *Prozent* ist der hundertste Teil von einem Ding. Man schreibt "%", "p.c." und "v.H." für "vom Hundert" als Postfix.

8.1 Übung Wir schreiben die Prozentzahlen als Dezimalzahlen: 1%, 12%, 100%, 125% und 1000%. Anstatt % könnte man $\frac{1}{100}$ schreiben, also $1 \cdot \frac{1}{100} = 0.01$, $12 \cdot \frac{1}{100} = 0.12$, analog $125 \cdot \frac{1}{100} = 1.25$ und 10.0. ◁

Definition 56. Ein *Promill* ist der tausendste Teil von einem Ding. Man schreibt "‰" als Postfix.

8.2 Übung Im Strassenverkehr sind 0.5‰Alkohol als Volumenanteil im Blut erlaubt, um noch fahren zu dürfen. Ein Mann habe 6.25 Liter Blut. a) Wieviele Liter Alkohol ist das? Eine Flasche Schnaps hat 40% Alkohol im Volumen. b) Wieviel Liter Schnaps darf er trinken, um noch fahren zu können? c) Nun verteilt sich der Alkohol nicht nur im Blut sondern in der ganzen Körperflüssigkeit. Diese ist 70% des Körpergewichts in Liter. Der Mann ist 80kg schwer. Wieviel mehr darf er trinken?
a) Der Anteil in Dezimalbruchform ist $\frac{0.5}{1000} = 0.0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. Der Prozentwert ist $0.0005 \cdot 6.25[l] = 0.00313[l] = 3[ml]$. Das sind 3 Milliliter.
b) 40% eines Liters sind Alkohol. Das sind 40/100 oder 400/1000. Als Wert entspricht dies 400 [ml]. Nun macht man den Dreisatz

$$\begin{aligned} 400[ml]\text{Alkohol} &\mathrel{\widehat{=}} 1000[ml]\text{Schnaps} \\ 1[ml] &\mathrel{\widehat{=}} 2.5[ml] \\ 3[ml] &\mathrel{\widehat{=}} 7.5[ml] \end{aligned}$$

c) Für Bier gilt

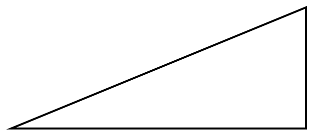
$$\begin{aligned} 50[ml]\text{Alkohol} &\mathrel{\widehat{=}} 1000[ml]\text{Schnaps} \\ 1[ml] &\mathrel{\widehat{=}} 20[ml] \\ 3[ml] &\mathrel{\widehat{=}} 60[ml] \end{aligned}$$

Das sind nur 0.6 Deziliter. c) Nun können wir proportional skalieren mit dem Faktor $\frac{0.7 \cdot 80}{6.25} \approx 9$. Damit wären es also $7.5 \cdot 9 = 67.5[\mathrm{ml}]$ Schnaps und $60 \cdot 9 = 540[\mathrm{ml}] = 5.4[\mathrm{dl}]$. Er könnte also einen guten halben Liter trinken. ◁

Formel 8.3. Prozentformel Es ist G der Grundwert, W der Prozentwert und p der Prozentsatz. Es gilt

$$W = p\% \cdot G = \frac{p \cdot G}{100} \qquad \Leftrightarrow \qquad p = 100 \cdot \frac{W}{G} \qquad \Leftrightarrow \qquad G = \frac{100 \cdot W}{p}$$

8.4 Übung In einer Klasse von 26 Studenten hat es 17 Mädchen. Wie hoch ist ihr prozentualer Anteil? Es ist $p = 100 \cdot \frac{17}{26} = 65.4$ und $p\% = 65.4\%$. ◁



Die Steigung von Strassen und Schienenwegen wird als Verhältnis von Höhenunterschied zu horizontaler Längenunterschied angegeben und zwar in Prozenten. In der Abbildung sieht man den Höhenunterschied a und die Länge b. Die Steigung ist $p = \frac{100 \cdot a}{b}$. Die alte Strasse nach Mutten ist 4.8km lang, hat einen Höhenunterschied von 600m und ist von Anfang bis Ende in Luftlinie 1.34km auseinander. Die mittlere Steigung der Strasse ist $f = 100\frac{600}{4800} = 12.5$ und damit 12.5%. Streckenweise ist die steiler, denn insgesamt geht sie auch noch ein bisschen nach unten. Die Steigung des Geländes ist $q = 100\frac{600}{1340} = 44.8$ oder 44.8%.

8.5 Übung Eisenbahnen haben eine maximale Steigung von rund 3.5%. Von Thusis nach Preda wird eine Höhe von 1080m überwunden. Wie lange sollte die horizontale Strecke mindestens sein? Mit einem Dreisatz folgt

$$\begin{aligned} 3.5\,\text{Höhenmeter} &\mathrel{\widehat{=}} 100\,\text{Streckenmeter} \\ 1\,\text{Höhenmeter} &\mathrel{\widehat{=}} \frac{100}{3.5} = 28.57\,\text{Streckenmeter} \\ 1080\,\text{Höhenmeter} &\mathrel{\widehat{=}} 1080 \cdot 28.57 = 30.86\,\text{Kilometer} \end{aligned}$$

oder kurz

$$G = 100\frac{W}{p} = \frac{1080 \cdot 100}{3.5} = 30857\mathrm{m} = 30.86\mathrm{km}$$

Tatsächlich ist sie rund 72 Kilometer, was einer mittleren Steigung von $p = 100\frac{1080}{72000} = 1.5$ oder 1.5% entspricht. ◁

8.6 Übung Im Ausverkauf wird behauptet, auf alles wird ein Rabatt von 22% gewährt. Was kostet ein Paar Schuhe, die regulär Fr. 150 gekostet haben? Mit der Formel für den Wert W: $W = \frac{p \cdot G}{100} = \frac{22 \cdot 150}{100} = 33$. Der Rabatt wird vom Grundwert abgezogen, also neuer Preis: $150 - 33 = 117$. Man hätte auch rechnen können: Nun kosten die Schuhe noch 78%, also (100-22)% des regulären Preises, also

$$N = \frac{78 \cdot 150}{100} = 117.$$

◁

8.7 Übung Ein Wirt macht die einfache Kalkulation für Weine: Verkaufspreis ist der Ankaufspreis mit einem Zuschlag von 75%. Eine Flache Mouton Blanc kostet Fr. 26.00 beim Weinlieferanten. Welcher Preis steht auf der Weinliste des Restaurants?
Es ist $1.75 \cdot 26 = 45.50$ ◁

8.8 Übung Auf Konsumgütern wird eine Mehrwertsteuer von 8% erhoben. Ein Kopfhörer kostet Fr. 80.– im Laden. Wieviel kostet er vor Steuern? Der Ladenpreis ist 108% des Vorsteuerpreises. Dieser beträgt $80/1.08 = 74.07$. ◁

8.9 Übung Die Bank verspricht eine Verzinsung von Sparguthaben von 3% pro Jahr. Das heisst, bei einem anfänglichen Guthaben von Fr. 100 bekommt man nach einem Jahr Fr. 3.– gutgeschrieben. Herr Ihler hat Fr. 12'345.– auf dem Konto, wieviel ist es nach einem Jahr? Der Zins ist Fr. 3 pro Fr. 100, also $Z = 123.45 \cdot 3 = 370.35$. In der Summe also $12345 + 370.35 = 12715.35$. Einfacher ist die Rechnung $12345 \cdot 1.03 = 12715.35$. Dabei haben wir die $100\% + 3\% = 103\% = 1.03$ berechnet. ◁

8.10 Übung Die Geldentwertung, Inflation genannt, beträgt 4.3% pro Jahr, während der Zinssatz bei Banken 1.5% per annum ist. Wieviel sind Fr. 100 von heute in einem Jahr wert? Es wird wie folgt gerechnet:

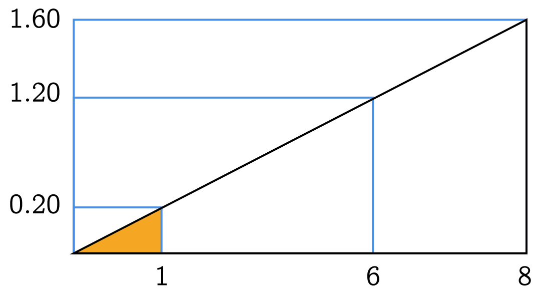
$$W = \frac{1.015}{1.043} 100 = 97.32$$

Der Zins kann die Entwertung nicht ausgleichen. ◁

Proportionen

Proportionalität kennen wir von der Grundschule vor allem in der Form des Dreisatzes.

Dabei wird z.B. gesagt, 6 Eier kosten Fr. 1.20, deshalb kostet ein Ei ein Sechstel, also Fr. 0.20 und somit kosten 8 Eier Fr. 1.60. Wie man aus der Abbildung sieht, wird im zweiten Satz das Verhältnis von Preis zu Menge gestaucht und dann im dritten Satz wieder gestreckt. Die Abbildung zeigt auch den Strahlensatz, wonach 0.2:1=1.2:6 etc. gilt.



Definition 57. Eine *Proportion* ist die Gleichheit zweier oder mehrerer Verhältniss oder Quotienten,

$$a : b = c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a : b : c = d : e : f \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{b}{c} = \frac{e}{f}, \frac{a}{c} = \frac{d}{f}$$

Anmerkung 8.11. Der Zusammenhang mit dem Dreisatz ist offensichtlich. Man könnte direkt schreiben für unser Eier-Beispiel:

$$6 : 1 : 8 = 1.20 : 0.20 : 1.60 = 12 : 2 : 16$$

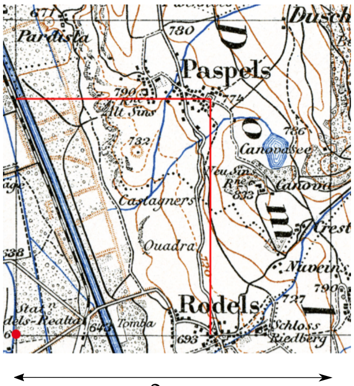
oder

$$\boxed{x} : 8 = 1.2 : 6 \quad \Leftrightarrow \quad 1.6 = 8 \cdot \frac{1.2}{6} = 1.6$$

Definition 58. Als *Massstab* wird bei Zeichnungen und Karten das Verhältnis bezeichnet, in dem eine abgebildete Länge zur entsprechenden realen Länge steht. Also

$$\text{Massstab} = \frac{\text{abgebildete Länge}}{\text{reale Länge}}$$

8.12 Übung Wir betrachten eine Karte. Sie zeichnet eine verkleinerte Ansicht der Landschaft. Die Verkleinerung ist durch den angegebenen Massstab festgelegt. Eine häufig verwendete Grösse ist das Verhältnis 1:50000.



2 cm
Massstab 1 : 50 000

Es gilt also

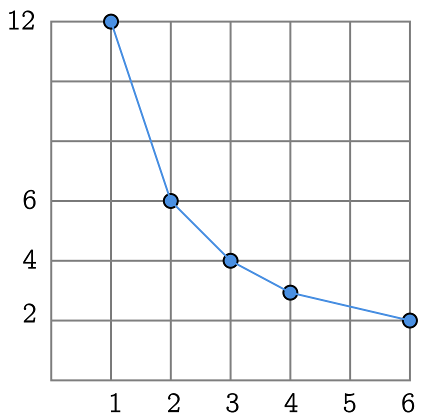
$$\text{Massstab} = \frac{1}{50000} = \frac{\text{abgebildete Länge}}{\text{reale Länge}} = \frac{2\text{cm}}{1\text{ km}}$$

Wir messen auf der Karte die zwei roten Längen, vertikal 1.4 cm und horizontal 1.2 cm. Wie lange sind die Strecken in der Wirklichkeit? Es gelten die Proportionalitäten

$$\frac{1.4\text{cm}}{x} = \frac{1}{50000} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{1.4\text{cm}} = \frac{50000}{1} \quad\Leftrightarrow\quad x = 50000 \cdot 1.4[\text{cm}] = 70000[\text{cm}]$$

70000[cm] sind 700 Meter. Da $\frac{1.2}{1.4} = \frac{600}{700}$ ist die horizontale Strecke 600 Meter. ◁

Umgekehrte Proportionalität



Wir kennen dieses Begriff schon aus der Grundschule vom sogenannten “Maurerdreisatz”. Das Modell ist ein Maurer, der für die Wände 12 Arbeitstage braucht. Er mauert 1/12 des ganzen pro Tag. Wenn noch ein Maurer hinzukommt, dann brauchen sie zusammen 6 Arbeitstage. Drei Maurer benötigen 4 Arbeitstage, 6 zwei und 12 einen Arbeitstag. Bei der Proportionalität gilt: “je mehr, desto mehr”, bei der umgekehrten “je mehr, desto weniger”.
Wir kennen die Beziehung Weg=Geschwindigkeit mal Zeit: $s = v \cdot t$ und $v = \frac{s}{t}$. Wenn sich die Zeit verdoppelt, dann ist der Weg doppelt so lang und die Geschwindigkeit halb so gross. Der Weg ist proportional zur zeit, die Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional zur Zeit.
In der Abbildung erkennen wir auch, dass die Kurve von Arbeitstagen in Abhängigkeit der Anzahl Maurer nicht linear ist, also keine gerade Linie bildet.

8.13 Übung Bauer Huber hat 16 Pferde und 19 Kühe im Stall. Eine Kuh frisst doppelt so viel Heu wie ein Pferd. Der Heuvorrat reicht für 120 Tage. Nach 40 Tagen nimmt der Bauer noch weitere drei Kühe in seinem Stall auf. Wie lange reicht der Heuvorrat nun insgesamt? Das sind typische *Kapazitätsprobleme*, bei denen man die anfängliche Kapazität, das Fassungsvermögen, bestimmen muss, das dann verzehrt wird. Sie ist häufig eine Zeit-Mengen-Produkt. Beim Maurer war die Kapazität ein Haus.
Wir setzten eine Portion als Fressmenge eine Pferdes. Damit ist die Tagesmenge $16+19\cdot 2 = 54$ Portionen und gesamt mit 120 Tagen $54 \cdot 120 = 6480$ Portionen. Nach 40 Tagen sind noch $80 \cdot 54 = 4320$ vorhanden. Neu wird die Tagesration $16 + 22 \cdot 2 = 60$ verzehrt, also reicht der Vorrat noch für $4320 : 60 = 72$ Tage. Total also $40 + 72 = 112$. $\lhd$

Aufgaben

0.14 Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren:
(a) 231 **(b)** 1071 **(c)** 2231 **(d)** 258 **(e)** 1071 **(f)** 16170

14 **(a)**
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{231} \\ \hline 3 & 77 \\ 7 & 11 \\ 11 & 1 \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{1071} \\ \hline 3 & 357 \\ 3 & 119 \\ 7 & 17 \\ 17 & 1 \end{array}$$
(c)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{2231} \\ \hline 23 & 97 \\ 97 & 1 \end{array}$$
(d)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{258} \\ \hline 2 & 129 \\ 3 & 43 \\ 43 & 1 \end{array}$$
(e)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{16170} \\ \hline 2 & 8085 \\ 3 & 2695 \\ 5 & 539 \\ 7 & 77 \\ 7 & 11 \\ 11 & 1 \end{array}$$

0.15 Berechne folgende grösste gemeinsame Teiler:
(a) ggT(172,77) **(b)** ggT(121,132) **(c)** ggT(3256,396)

15 **(a)**
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{172} \\ \hline 2 & 86 \\ 2 & 43 \\ 43 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{77} \\ \hline 7 & 11 \\ 11 & 1 \end{array}$$
ggT=1.

(b)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{121} \\ \hline 11 & 11 \\ 11 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{132} \\ \hline 2 & 66 \\ 2 & 33 \\ 3 & 11 \\ 11 & 1 \end{array}$$
ggT=11.

(c)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{3256} \\ \hline 2 & 1628 \\ 2 & 814 \\ 2 & 407 \\ 11 & 37 \\ 37 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{396} \\ \hline 2 & 198 \\ 2 & 99 \\ 3 & 33 \\ 3 & 11 \\ 11 & 1 \end{array}$$
$\text{ggT} = 2 \cdot 2 \cdot 11 = 44.$

0.16 Bestimme den ggT(16,60) mit dem Euklidischen Algorithmus

16

$$60 : 16 = 3, R = 12$$
$$16 : 12 = 1, R = 4$$
$$12 : \boxed{4} = 3, R = 0$$

ggT=4

0.17 Bestimme, ob folgende Zahlen durch 2, 4 und 8 teilbar sind:
(a) 34 **(b)** 36 **(c)** 127142 **(d)** 6782 **(e)** 73592 **(f)** 37004 **(g)** 4516
(h) 10000

17 **(a)** ja, nein, nein **(b)** ja, ja, nein **(c)** ja, nein, nein **(d)** ja, nein, nein
(e) ja, ja, nein **(f)** ja, ja, nein **(g)** ja, ja, nein **(h)** ja, ja, ja

---

0.18 Bestimme, ob folgende Zahlen durch 5, 25 und 125 teilbar sind:
(a) 35 **(b)** 360 **(c)** 127300 **(d)** 67825 **(e)** 73592 **(f)** 37000 **(g)** 4515 **(h)** 10000
(i) 110 **(j)** 5890125

18 **(a)** ja, nein, nein **(b)** ja, nein, nein **(c)** ja, ja, nein **(d)** j1, ja, nein
(e) nein, nein, nein **(f)** ja, ja, ja **(g)** ja, nein, nein **(h)** ja, ja, ja **(i)** ja, nein, nein
(j) ja, ja, ja

0.19 Rechne die Summen gleichartiger Terme aus
(a) Addiere $3x$, $5x$, x, $4x$, $11x$. 15.1
(b) $4a^2 - 5a^2 - 8a^2 - 7a^2$.
(c) $-2a^2 + 5a^2 + 3a^2 - 7a^2 + 11a^2$.
(d) From $5a^3 - 3a^3$.
(e) $-2xy^3 - 7xy^3$.
(f) $9x - 4y + 3z - (5x - 3y + z)$.
(g) $x + (a + b) + y + (c - d) + (x - y)$.
(h) $a - (3b - 2c + a) - (2b - a - c) - (6 - c + a)$.

19 **(a)** Alles gleichartige Terme: $23x$.
(b) $-16a^2$
(c) $10a^2$
(d) $2a^3$
(e) $-9xy^3$
(f) $9x - 4y + 3z - 5x + 3y - z = 4x - y + 2z$
(g) $x + a + b + y + c - d + x - y = 2x + a + b + c - d$
(h) $a - 3b + 2c - a - 2b + a + c - 6 + c - a = a - a + a - a - 3b - 2b + 2c + c + c - 6 = -b + 4c - 6$

0.20 Multipliziere aus
(a) $(x^2 + xy + y^2) \cdot x^2y^2$.
(b) $(x^3 - 2x^2 + x) \cdot (x^2 + 3x + 1)$.
(c) $(x + 2)(x + 7)$.
(d) $(x - 11)(x - 2)$.
(e) $(y + \frac{3}{4})(y + \frac{1}{5})$.

0.21 Es sollen die letzten drei Terme in einer Klammer mit negativem Vorzeichen stehen.
(a) $a^4 + a^3x + a^2x^2 - ax^3 - 4x^4$ **(b)** $xy + mn - xm - yn$

21 **(a)** $a^4 + a^3x - [-a^2x^2 + ax^3 + 4x^4]$ **(b)** $xy - [-mn + xm + yn]$

0.22 Schreibe als Quadrat (erste binomische Formel)
(a) $x^2 + 4x + 4$ **(b)** $x^2 - 6x + 9$ **(c)** $4x^2 - 28x + 49$

22 **(a)** $(x + 2)^2$ **(b)** $(x - 3)^2$ **(c)** $(2x - 7)^2$

0.23 Schreibe als Faktoren gemäss $(x + a)(x + b) = x^2 + (\boxed{a + b})x + \boxed{ab}$. (Oft hilft eine Primzahlzerlegung von ab, dem letzten Term, also für $x^2 - 8x + 7$, $7 = 7 \cdot 1$, $(x?1)(x?7)$).
(a) $x^2 + 6x + 8$ **(b)** $x^2 - 4x - 21$ **(c)** $x^2 + 10x - 11$ **(d)** $x^2 - 18x + 81$ **(e)** $x^2 - 7x + 12$
(f) $2x^2 - 3x - 35$ **(g)** $12x^2 + x - 1$ **(h)** $2x^2 - 25x + 33$

23 **(a)** $(x+2)(x+4)$ **(b)** $(x+3)(x-7)$ mit $21 = 3 \cdot 7$ **(c)** $(x-1)(x+11)$
(d) $(x-9)(x-9)$ **(e)** $(x-4)(x-3)$ **(f)** $(2x-7)(x+5)$ **(g)** $(3x+1)(4x-1)$
(h) $(x-11)(2x-3)$

0.24 Benutze die zweite binomische Formel sooft wie möglich
(a) $(3600-1)$ **(b)** a^2-b^2 **(c)** a^4-b^4 **(d)** $\frac{64x^2}{9}-\frac{121}{25}$ **(e)** $9a^4-4b^2$

24 **(a)** $(60-1)(60+1) = 59 \cdot 61 = 3599$ **(b)** $(a-b)(a+b)$ **(c)** $(a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ **(d)** $(\frac{8x}{3}+\frac{11}{5})(\frac{8x}{3}-\frac{11}{5})$ **(e)** $(3a^2-2b)(3a^2+2b)$

0.25 Führe die Division von Hand aus, wenn du kannst.
(a) $94096:7$ **(b)** $5928:13$

25 **(a)** $94096:7 = 13442$

$$\begin{array}{l} \underline{7} \\ 24 \\ \underline{21} \\ \;\;30 \\ \;\;\underline{28} \\ \;\;\;\;29 \\ \;\;\;\;\underline{28} \\ \;\;\;\;\;\;16 \\ \;\;\;\;\;\;\underline{14} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;2 \end{array}$$

(b) $5928:13 = 456$

$$\begin{array}{l} \underline{52} \\ \;\;72 \\ \;\;\underline{65} \\ \;\;\;\;78 \\ \;\;\;\;\underline{78} \\ \;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

0.26 Vereinfache
(a) $a-b-\frac{2ab}{a+b}$ **(b)** $\frac{7x^2}{3y}+\frac{5xy}{2a}+\frac{x^3}{ay}$. **(c)** $\frac{2x}{3}-x+\frac{3x}{5}$. **(d)** $\frac{2x}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}$.
(e) $\frac{1}{2c^2d}\cdot a^2d$. **(f)** $\frac{a^2-4a-21}{a^2-3a-10}\cdot(a-5)$. **(g)** $\frac{18cd^3}{5x}\div 6cd^3$. **(h)** $\frac{m+n}{2m^2-2mn}\cdot(m^2-n^2)$.
(i) $\frac{5x^2y-5y^3}{2x^2z}\div(4x+4y)$.

26 **(a)** Gleichnamig $\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{a^2-b^2-2ab}{a+b}$

(b) $\frac{7x^2}{3y}+\frac{5xy}{2a}+\frac{x^3}{ay}=\frac{2a\cdot 7x^2}{6ay}+\frac{3y\cdot 5xy}{6ay}+\frac{6x^3}{6ay}=\frac{2a\cdot 7x^2+3y\cdot 5xy+6x^3}{6ay}=\frac{14ax^2+15xy^2+6x^3}{6ay}$
43-18

(c) $\frac{2x}{3}-x+\frac{3x}{5}=\frac{5\cdot 2x}{5\cdot 3}-\frac{15x}{15}+\frac{3\cdot 3x}{3\cdot 5}=\frac{10x-15x+9x}{3\cdot 5}=\frac{4x}{15}$. 43-31

(d) $\frac{2x}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{-2x}{4-x^2}+\frac{2+x}{(2-x)(2+x)}+\frac{2-x}{(2+x)(2-x)}=\frac{-2x+2+x+2-x}{4-x^2}=\frac{2(-x+2)}{4-x^2}=\frac{2}{2+x}$

(e) $\frac{1}{2c^2d}\cdot a^2d=\frac{a^2\cancel{d}}{2c^2\cancel{d}}$.

(f) $\frac{a^2-4a-21}{a^2-3a-10}\cdot(a-5)$: Nenner und Zähler faktorisieren: $\frac{(a-7)(a+3)(a-5)}{(a-5)(a+3)}=a-7$

(g) $\frac{18cd^3}{5x}\div 6cd^3=\frac{18cd^3}{5x\cdot 6cd^3}=\frac{3}{5x}$.

(h) $\frac{m+n}{2m^2-2mn}\cdot(m^2-n^2)=\frac{m+n}{2m(m-n)}\cdot(m-n)(m+n)=\frac{(m+n)\cancel{(m-n)}(m+n)}{2m\cancel{(m-n)}}=\frac{(m+n)^2}{2m}$

(i) $\frac{5x^2y-5y^3}{2x^2z}\div(4x+4y)=\frac{5y(x^2-y^2}{(2x^2z)(4x+4y)}=\frac{5y(x-y)(x+y)}{(2x^2z)4(x+y)}=\frac{5y(x-y)}{8x^2z}$

0.27 Berechne folgende Brüche

(a) $\frac{1}{4}+\frac{6}{7}$ **(b)** $\frac{5}{12}-\left(\frac{47}{30}-\frac{7}{3}\right)$ **(c)** $\frac{(2(2)+1)(-3-(-3))-5(4-7)}{4-2(3)}$

(d) $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$

27 **(a)** Hauptnenner ist $4\cdot 7=28$:

$$\frac{1}{4}+\frac{6}{7}=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{4}=\frac{7}{28}+\frac{24}{28}=\frac{31}{28}$$

(b) Hauptnenner ist 60:

$$\begin{aligned}\frac{5}{12}-\left(\frac{47}{30}-\frac{7}{3}\right) &= \frac{5}{12}-\frac{47}{30}+\frac{7}{3}\\ &= \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{5}-\frac{47}{30}\cdot\frac{2}{2}+\frac{7}{3}\cdot\frac{20}{20}\\ &= \frac{25}{60}-\frac{94}{60}+\frac{140}{60}\\ &= \frac{71}{60}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{(2(2)+1)(-3-(-3))-5(4-7)}{4-2(3)} &= \frac{(4+1)(-3+3)-5(-3)}{4-6}\\ &= \frac{(5)(0)+15}{-2}\\ &= -\frac{15}{2}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) &= \frac{3\cdot 5}{5\cdot 13}-\frac{4\cdot(-12)}{5\cdot 13}\\ &= \frac{15}{65}-\frac{-48}{65}\\ &= \frac{15}{65}+\frac{48}{65}\\ &= \frac{63}{65}\end{aligned}$$

0.28 Bestimme den Prozentwert

(a) 30% von 45 **(b)** 25% von 3750 kg **(c)** 2.4% von Fr. 150000 **(d)** 3.5‰von 1200km

28 **(a)** $\frac{30}{100}=0.3\cdot 45=13.5$

(b) $0.25\cdot 3750=937.5$kg

(c) $\frac{2.4}{100}\cdot 150000=2.4\cdot 1500=3600$ Fr.

(d) $\frac{3.5}{1000}\cdot 1200=4.2$km

0.29 Bestimme den Prozentsatz

(a) 12'420 Infizierte von 100'000

(b) 18 Gramm von 0.8 kg.

(c) Anteil Knaben, wenn die Schule 438 Knaben und 534 Mädchen aufweist.

(d) Zinssatz, wenn 1200 Fr. auf ein Kapital von 75'000 ausbezahlt werden.

29 **(a)** $p=\frac{12420}{100000}=0.124$, damit $p\%=100\cdot 0.124=12.4\%$

(b) $p=\frac{18}{800}=0.0225$, somit $p\%=2.25\%$

(c) $p=\frac{438}{438+534}=0.451$, $p\%=45.1\%$

(d) $p=\frac{1200}{75000}=0.016$, $p\%=1.6\%$

0.30 Bestimme den Grundwert

(a) Der Rabatt auf ein Radio ist 22% oder 37 Franken, was kostete er ursprünglich?

(b) An der Schule sind 5% oder 21 Studierende rothaarig. Wieviele Schüler hat die Schule?

(c) Die mittlere Steigung der Bahn ist 32‰bei einem Höhenunterschied von 450 Meter. Wie gross ist die horizontale Distanz?

3 **(a)** $G = \frac{37}{22\%} = \frac{37 \cdot 100}{22} = \frac{37}{0.22} = 168.20$

(b) $G = \frac{21}{0.05} = 21 \cdot 20 = 420$

(c) $G = \frac{450}{0.032} = 14'062.5$ Meter oder 14.0625 km.

0.31 Skaliere entsprechend

(a) In einem Rezept für 4 Personen heisst es, man solle 6 Eier nehmen. Wir sind aber 6 Personen. Wieviele Eier brauche ich?

(b) Ein Auto verbraucht auf 100 km 6.4 Liter Benzin. Welche Strecke kann er mit einer Tankfüllung von 60 Litern zurücklegen?

(c) Der Wechselkurs Schweizer Franken zu Britischem Pfund ist 0.81, d.h. für 1 Franken bekommt man 0.81 Pfund. Der Tourist möchte 300 Franken wechseln. Wieviele Pfund bekommt er?

31 **(a)** $\frac{6}{4} \cdot 6 = 9$ Eier.

(b) $S = \frac{100}{7.5} \cdot 60 = 800$ km

(c) $M = \frac{0.81}{1} \cdot 300 = 243$.

0.32 4 Maurer verputzen eine Hausfassade und benötigen dafür 5 Tage. Da aber für die nächsten Tage Regen angesetzt ist, setzte der Bauleiter insgesamt 10 gleichwertige Arbeiter ein. a) Wie lange brauchen sie? b) Nach einem Tag fallen 5 Maurer aus. Wie lange brauchen die restlichen Maurer?

32 a) Die "Kapazität" ist 20 Manntage, also 4×5. Zehn Mannen verrichten 20 Manntage in 2 Tagen. b) Nach einem Tag sind 10 Manntage weg, es bleiben noch 10. Fünf Maurer brauchen noch 2 Tage (10/5).

0.33 Ein Gefäss wird mit Wasser durch zwei Rohre in 10 Minuten gefüllt. Das erste Rohr kann alleine das Gefäss in 30 Minuten füllen. Wie lange braucht das zweite Rohr alleine?

33 Die Grundformel ist Menge = Zuflussgeschwindkeit × Zeit und deshalb Zuflussgeschw. = $\frac{\text{Menge}}{\text{Zeit}}$. Die Menge ist 1. Zum einen gilt $1 = (v_1 + v_2) \cdot 10$ oder $\frac{1}{10} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$, wobei $t_1 = 30$. Gesucht ist also t_2. Es folgt $\frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{1}{t_2}$. Das ist $\frac{30-10}{300} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$. Somit ist $t_2 = 15$.

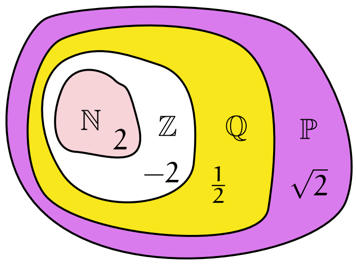
Kapitel 9

Reelle Zahlen

Bevor wir die reellen Zahlen besprechen gehen wir auf eine Teilmenge davon ein, nämlich die Bruchzahlen. Da die Division nicht abgeschlossen ist bezüglich der natürlichen Zahlen, entstehen aus der Division natürlicher Zahlen Brüche, die zu einer anderen Zahlenmenge gehören.

9.1 Rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen ergeben sich als Konsequenz der Brüche. Denn in der Menge der ganzen Zahlen ist eine Zahl wie $\frac{1}{2}$ nicht enthalten oder die Division $1 \div 2$ nicht ausführbar. Deshalb müssen wir den Zahlenbegriff erweitern, denn bekanntlich ist $1/2$ 0.5. In unserem Mengendiagramm (Abbildung) wird eine Übermenge $\mathbb{Q}$ hinzugenommen, welche natürliche und ganze Zahlen umfasst.



Definition 59. Eine *rationale Zahl* r (oder "gebrochene Zahl") ist eine reelle Zahl, die als Verhältnis zweier ganzer Zahlen, a und $b \neq 0$, dargestellt werden kann. Formal:

$$q = \frac{a}{b}$$

Die Menge der rationalen Zahlen wir mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Anmerkung 9.1. Die Verwendung von Brüchen markiert den Übergang von Zählen zum *Messen*. Beim Messen vergleicht man das zu messende mit einem geeigneten Mass.

Anmerkung 9.2. Der Bruch $\frac{\pi}{180}$ ist keine rationale Zahl, weil π keine ganze Zahl ist.

Der Erfinder der Mengenlehre hat sich gefragt, wie viele rationale Zahlen gibt es denn im Vergleich zu den natürlichen Zahlen? Mit einem bemerkenswerten Abzählschema gemäss Abbildung ist ersichtlich, dass man jeder rationalen Zahl eine Ordnungszahl, eine natürliche Zahl zuordnen kann. Deshalb sind die rationalen Zahlen *abzählbar* unendlich viele. Sie haben die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen, obwohl zwischen zwei ganzen Zahlen unendlich viele Brüche Platz haben!

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1}\ (1) & \rightarrow & \frac{1}{2}\ (2) & & \frac{1}{3}\ (5) & \rightarrow & \frac{1}{4}\ (6) & & \frac{1}{5}\ (11) & \rightarrow \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1}\ (3) & & \frac{2}{2}\ (\cdot) & & \frac{2}{3}\ (7) & & \frac{2}{4}\ (\cdot) & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1}\ (4) & & \frac{3}{2}\ (8) & & \frac{3}{3}\ (\cdot) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1}\ (9) & & \frac{4}{2}\ (\cdot) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1}\ (10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Auf eine andere Art versinnbildlicht die Zuordnung von rationalen Zahlen zu natürlichen Zahlen.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & 5 & \frac{1}{5} & \cdots
\end{array}
$$

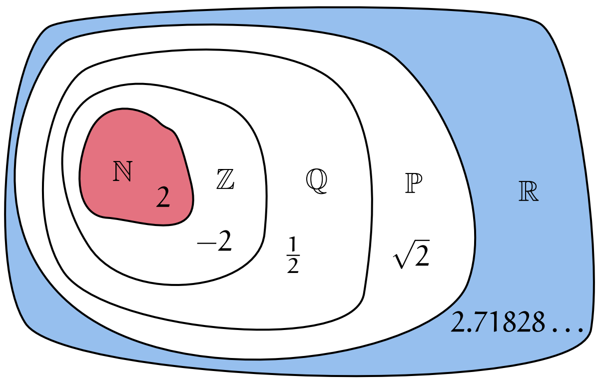
Satz 9.3. Die Mengen der natürlichen, der ganzen und der rationalen Zahlen haben dieselbe Mächtigkeit, d.h. sie sind abzählbar unendlich.

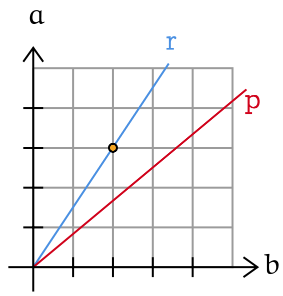
Anmerkung 9.4. Hilberts Hotel: Ein normales Hotel mit endlich vielen Zimmern ist ausgebucht, wenn kein Zimmer mehr frei ist. Kommt der Mathematiker Hilbert an die Rezeption eines Hotels mit unendlich vielen Zimmern, alle sind belegt. Er macht den Vorschlag, dass Nummer 1 in Nummer 2 umzieht, dieser Gast ins Zimmer 3 geht, dessen Gast ins 4 und so weiter bis unendlich. Dann nimmt er Zimmer 1. Dasselbe gilt für jeden neuen Gast, so dass unendlich vielen neue Gäste beherbergt werden können. Obwohl unendlich viele Gäste schon da sind, hat es noch für unendliche viele Platz! Zimmer und Gäste sind gleichmächtig.

9.2 Mengen reeller Zahlen

Wir haben bis hierhin natürliche und ganze Zahlen verwendet und die Eigenschaften einfacher Rechenoperationen aufgezählt. Nun gehen wir eine Schritt weiter und betrachten sogenannte reelle, also wirklichkeitsnahe, Zahlen.

Als Menge umfassen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die ganzen Zahlen, die wiederum die natürlichen Zahlen beinhalten, also: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
In Zusammenhang mit Brüchen wird die Menge der Bruchzahlen oder rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definiert und die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Das Aushängeschild für diese Menge ist $\sqrt{2}$. Die Wurzel von 2 hat unendlich viele Stellen nach dem Dezimalpunkt.





Die irrationalen Zahlen *vervollständigen* die Lücken und Leerstellen der rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl. Zwischen zwei reellen Zahlen hat es keine Lücken.
In der Abbildung erscheinen die rationalen Zahlen r als Linien, die einen Gitterpunkt treffen. Denn ihre Steigung ist irgendwo das Verhältnis zweier ganzer Zahlen a und b. Die irrationalen Zahlen p hingegen entsprechen Linien, die *nie* einen Gitterpunkt treffen werden. So betrachtet ist dies schon sehr erstaunlich, wenn man zusätzlich noch bedenkt, dass es viel mehr Zahlen p als r gibt.

9.2.1 Reelle Zahlen

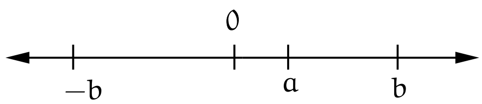
Definition 60. Eine *reelle Zahl* ist eine Zahl, die eine Dezimaldarstellung besitzt. Die Menge wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ dargestellt.

Definition 61. Eine *irrationale Zahl* p ist eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist ($p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Wir haben die Menge von Zahlen schon als Zahlengerade dargestellt. Daraus leitet sich die Überlegung ab:

Satz 9.1. Jedem Punkt einer Zahlengerade ist genau eine reelle Zahl zugeordnet und umgekehrt jeder reellen Zahl genau ein Punkt der Zahlengerade.

Das bedeutet für zwei reelle Zahlen a und b, dass für die Beziehung $a < b$ die Zahl a links von der Zahl b liegt. Diese Aussage beruht auch auf der Eigenschaft, dass die Zahlengerade keine Löcher aufweist. Sie ist *vollständig*. Wie klein auch immer die Differenz $b - a$ gewählt wird, es sind darin unendliche viele Zahlen eingeschlossen!



Satz 9.2. Ordnungsrelation Für zwei reelle Zahlen a und b gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} a &< b \quad \text{oder} \\ a &> b \quad \text{oder} \\ a &= b. \end{aligned}$$

Eine zweite Anschauung ist die reelle Zahl als *nicht abbrechender Dezimalbruch*. Am Beispiel der Zahl $\sqrt{2}$ können wir annähern:

$$\begin{aligned} 1.4 &< \sqrt{2} < 1.5 \\ 1.41 &< \sqrt{2} < 1.42 \\ 1.414 &< \sqrt{2} < 1.415 \\ 1.4142 &< \sqrt{2} < 1.4143 \\ 1.41421 &< \sqrt{2} < 1.41422 \\ \cdots &< \sqrt{2} < \cdots \end{aligned}$$

Dieses Verfahren kann man beliebig lang mit beliebig kleiner Differenz zwischen Obergrenze und Untergrenze fortführen, denn es bricht nicht ab (irrationale Zahl). Mit den Zeichen $\ldots$ in der Angabe $1.41421\ldots$ markieren wir dieses Nicht-Abbrechen.
Im Gegensatz dazu nehmen wir einen abbrechenden Dezimalbruch wie 0.3. Mit der Periode $\overline{0}$ oder $\overline{9}$ kann man einen nicht abbrechende Dezimalzahl erzeugen gemäss:

$$0.3 = 0.3\overline{0} = 0.2\overline{9}.$$

Damit können an sich abbrechende Zahlen auch als nicht abbrechende gedacht und verallgemeinert werden.

Satz 9.3. Jeder reellen Zahl ist umkehrbar eindeutig ein nicht abbrechender Dezimalbruch zugeordnet.

9.2.2 Dichte der Zahlen

Zwischen zwei bestimmten reellen Zahlen liegt mindestens ein rationale und eine irrationale Zahl. Daraus folgt, dass zwischen diesen zwei Zahlen *unendliche viele* rationale und irrationale Zahlen liegen.
So bilden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die irrationalen Zahlen $\mathbb{P}$ eine *dichte* Teilmenge in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Das bedeutet u.a., dass man irrationale Zahlen beliebig genau durch rationale Brüche beziehungsweise durch endliche Dezimalzahlen approximieren kann.

9.2.3 Intervalle

Intervalle spielen eine grosse Rolle in der Mathematik, besonders für Abbildungen, wo es gilt Definitions- und Wertbereiche zu beschreiben.
Ein Intervall ist eine Menge von Zahlen, darunter auch die reellen Zahlen. Es gilt folgende Festlegung:

Definition 62. Ein (beschränktes) *Intervall* besteht aus allen Elementen x, die man mit zwei begrenzenden Elementen der reellen Zahlen, der unteren Grenze a und der oberen Grenze b des Intervalls, der Größe nach vergleichen kann und zwischen den Grenzen liegen.

Damit ist ein Intervall eine Strecke der Zahlengerade.

Anmerkung 9.4. Wir unterscheiden je nach dem, ob die Grenzpunkte dazu gehören oder nicht:

- *abgeschlossenes* Intervall: $a \leqslant x \leqslant b$ oder $[a, b]$,
- *offenes* Intervall $a < x < b$ (a, b) und
- *halboffenes* Intervall, $a \leqslant x < b$ oder $a < x \leqslant b$, $[a, b)$ oder $(a, b]$.

Anmerkung 9.5. Man unterscheidet auch *endliche* und unendliche Intervalle. Diese werden mit dem Symbol $\pm\infty$ markiert, also:

$$\begin{aligned}
(a, \infty) &= \{x \mid a < x < \infty\} \\
[a, \infty) &= \{x \mid a \leqslant x < \infty\} \\
(-\infty, b) &= \{x \mid \infty < x < b\} \\
(-\infty, b] &= \{x \mid \infty < x \leqslant b\}
\end{aligned}$$

Den Ausdruck bezüglich der Unendlichkeit kann man auch weglassen, also anstatt $\infty < x \leqslant b$ kürzer $x \leqslant b$.

Anmerkung 9.6. Eine alternative Darstellung zum Symbol (ist]. Damit wird schöner dargestellt, dass die Grenze nicht mitgemeint ist, also $]a, b[$ anstatt (a, b) oder $]a, b]$ an der Stelle von $(a, b]$.

9.7 Übung Das Intervall ist eine Menge. Anstatt $[1, 3)$ schreibt man $\{x \,|\, 1 \leqslant x < 3\}$. ◁

9.3 Grundoperationen

Die reellen Zahlen verhalten sich bezüglich der Grundoperationen (Operationen erster und zweiter Stufe) identisch zu den ganzen Zahlen. Wir wollen hier die Eigenschaften nicht wiederholen. Zur Division ergibt sich allerdings eine Erweiterung.

Die schriftliche Division

Zwei reelle Zahlen kann man wie ganze Zahlen dividieren, wenn man den Quotienten erweitert. Also wird aus

$$10.05 \div 0.65 = 1005 \div 65.$$

Wir kennen die Vorschrift, um schriftlich zu dividieren. Zur Erinnerung:

$$\begin{array}{l}
856:17 = 50 \\
\underline{85} \\
06
\end{array}$$

ergab als Lösung 50 Rest 6 oder $50\frac{6}{50}$. Mit reellen Zahlen folgt

$$\begin{array}{l}
856.00:17 = 50.35 \\
\underline{85} \\
06.0 \\
\underline{5.1} \\
90 \\
\underline{85} \\
5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
856.000:17 = 50.352 \\
\underline{85} \\
06.0 \\
\underline{5.1} \\
90 \\
\underline{85} \\
50 \\
\underline{34} \\
16
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
856.0000:17 = 50.3529 \\
\underline{85} \\
06.0 \\
\underline{5.1} \\
90 \\
\underline{85} \\
50 \\
\underline{34} \\
160 \\
\underline{153} \\
7
\end{array}$$

Man dividiert wie bei den ganzen Zahlen und setzt dann den Punkt an die richtige Stelle. Wie man am Beispiel erkennt, ist die Division nicht beendet, es bleibt eine 7. Das heisst, man könnte die Division fortführen. Es würde erst abbrechen, wenn ein Dividend erscheint, der ein Vielfaches des Divisors 17 ist. Dies ist aber nie der Fall. Wir betrachten die folgenden drei Divisionen.

$$\begin{array}{l}
1.0:2 = 0.5 \\
\underline{1.0} \\
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1.00:33 = 0.\overline{03} \\
\underline{99} \\
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1.00:6 = 0.1\overline{6} \\
\underline{6} \\
40 \\
\underline{36} \\
4
\end{array}$$

Im ersten Fall ergibt die Division 0.5, alle folgenden Dezimalzahlen sind 0. Im zweiten Fall wiederholt sich die Zahlenfolge. Dies wird mit dem Überstrich angezeigt. Also ist $0.\overline{03} = 0.03030303\ldots$. Im dritten Fall ist nur der Schluss sich wiederholend, hier $0.1\overline{6} = 0.166666666\ldots$. Die Division reeller Zahlen führt immer zu einer Zahl als folgender Einteilung:

(1) endlicher,

(2) unendlicher, *reinperiodischer*,

(3) unendlicher, *gemischtperiodischer* Dezimalbruch.

Endliche Dezimalbrüche entstehen, wenn der Divisor nur 2 und 5 als Primfaktoren enthält. Reinperiodisch wird das Resultat, wenn der Divisor weder 2 noch 5 als Faktor enthält und gemischtperiodisch in allen anderen Fällen. Der periodische Teil kann auch recht lange werden, bei $856 : 17$ ist dies $\overline{3529411764705882}$, eine Periode der Länge 16.

Umformung Dezimalbruch

Ein endlicher Dezimalbruch wie 0.648 lässt sich einfach als $\frac{648}{1000}$ darstellen und dann kürzen

$$0.648 = \frac{648}{1000} = \frac{81}{125}.$$

Man erweitert mit Zehnerpotenzen.
Beim periodischen Bruch geht man wie folgt vor: Wir setzen für den unbekannten Bruch q, das dem Bruchwert gleich sein soll:

$$q = 0.\overline{675}$$

Dann multiplizieren wir mit zehn hoch der Länge der Periode, hier 3, also mit 1000 und ziehen q davon ab:

$$\begin{aligned} 1000 \cdot q &= 675.\overline{675} \\ 1 \cdot q &= \quad 0.\overline{675} \\ \hline 999 \cdot q &= 675 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$0.\overline{675} = \frac{675}{999} = \frac{225}{333} = \frac{73}{111}.$$

Für einen gemischtperiodischen Bruch, z.B. $0.4\overline{7}$ analog:

$$\begin{aligned} 10 \cdot q &= 4.7\overline{7} \\ 1 \cdot q &= 0.4\overline{7} \\ \hline 9 \cdot q &= 4.3 \end{aligned}$$

Damit

$$0.4\overline{7} = \frac{4.3}{9} = \frac{43}{90}.$$

9.1 Übung Man finde den ganzzahligen Bruch von $0.12\overline{71}$. Multiplikation mit 100, denn Periodenlänge 2. Also $100q = 12.71\overline{71}$ abziehen von einem q: $99q = 12.71\overline{71} - 0.12\overline{71} = 12.59$. Damit $q = \frac{12.59}{99} = \frac{1259}{9900}$. Wir sind fertig, denn 1259 ist eine Primzahl. ◁

9.4 Operationen dritter Stufe

9.4.1 Potenzen

Das Potenzieren geht aus der wiederholten Multiplikation hervor.

$$a^{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Mal}}$$

Definition 63. Unter der n-ten *Potenz* einer beliebigen ganzen Zahl a versteht man das n-fache Produkt von a mit sich selbst. Man schreibt $a^n = b$. Dabei heisst a die *Basis*, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ der *Exponent* (oder Hochzahl) und b der *Potenzwert*.

Formel 9.1. Für $n = 0$ und $a \neq 0$ wird festgelegt:

$$a^0 = 1$$

Aus der Definition folgt der Zusammenhang:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Mal}} = a^{n+m}$$

Ebenso folgt für die Division

$$a^n \div a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{m \text{ Mal}}}_{n \text{ Mal}} = a^{n-m}$$

Und weiter

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Mal}} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ Mal}} = (a \cdot b)^n$$

oder auch

$$a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Mal}} \div \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Mal}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Mal}} = (a \div b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Zuletzt gilt auch, alles aus der Definition:

$$(a^n)^m = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Mal}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Mal}}}_{m \text{ Mal}} = a^{n \cdot m}$$

Wir fassen zusammen:

Eigenschaften 9.2. Ganzzahlige Potenzen Für reelle Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ und ganzen Zahlen n und m gilt:

- **Produktregel:** $(ab)^n = a^n b^n$ und $a^n a^m = a^{n+m}$.
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ und $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- **Potenzregel:** $(a^n)^m = a^{nm}$.

Anmerkung 9.3. Der Ausdruck 0^n für negative ganze Zahlen $n \leqslant 0$ ist nicht definiert, genauso wie 0^0.

Wichtig 10. Während $(ab)^c = a^c b^c$ gilt, ist $(a+b)^2$ eben nicht $a^2 + b^2$! ⊣

Mir der folgenden Definition erweitern wir die Exponenten um die negativen Zahlen. Somit sind Potenzen für die ganzen Zahlen festgelegt.

Definition 64. **Negativer Exponent** Ein negativer Exponent soll bedeuten:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $a \neq 0$.

Somit kann man schreiben

$$\frac{a^n}{b^m \cdot c^2} = a^n \cdot b^{-m} \cdot c^{-2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{x^{-2}} = x^2$$

9.4 Übung Wir bestimmen $5^2 + 3^4$. Es ist $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ und $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 27 = 81$. Somit ergibt die Summe $25 + 81 = 106$. ◁

9.5 Übung Wir suchen die Ausrechnung von $7a^m + 8b^n - 5a^m - 20b^n + b^m - a^m + b^n - 3b^m$. Nur gleichartige Terme zusammenfassen: $a^m(7-5-1) + b^n(8-20+1) + b^m(1-3) = a^m - 13b^n - 2b^m$. ◁

Wichtig 11. Bei der Addition und Subtraktion von Potenzen ist zu beachten, dass nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten zusammengefasst werden können. ⊣

Bevor wir mit Übungen beginnen wollen wir drei äusserst wichtige Formeln in Erinnerung rufen. Sie lassen sich leicht durch Nachrechnen bestätigen

Formel 9.6. Binomische Formeln

- $(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2)$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Wichtig 12. ☠☠ Die binomischen Formeln muss man auswendig kennen. ⊣

9.7 Übung Gesucht ist $(5 \cdot 12)^2$. Mit der Rechenregel von Satz 9.22 gilt $(5 \cdot 12)^2 = 5^2 \cdot 12^2$. Man kann also rechnen: $(5 \cdot 12)^2 = (60)^2 = 3600$ oder $(5 \cdot 12)^2 = 5^2 \cdot 12^2 = 25 \cdot 144 = 100 \cdot 36$. ◁

9.8 Übung Berechnen wir $(-3x)^2 \cdot (-4)^4 = (-1)^2 3^2 x^2 (-1)^4 4^4 y^4 = 1 \cdot 9x^2 \cdot 1 \cdot 256y^4 = 9x^2 \cdot 256y^4 = 2304x^2y^4$. ◁

9.9 Übung Wir formen folgenden Ausdruck um: $\left(\frac{2m}{3n}\right)^5 \cdot \left(\frac{3n}{2m}\right)^4 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{-1}$

$$\left(\frac{2m}{3n}\right)^5 \cdot \left(\frac{3n}{2m}\right)^4 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{-1} = \frac{(2m)^5}{(2m)^4}\frac{(3n)^4}{(3n)^5}\frac{n}{m} = (2m)\frac{1}{3n}\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$$

◁

9.10 Übung Ein Produkt mit gleichem Exponenten ist umzuformen:

$$2^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

Aus der Regel $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ folgt

$$2^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}.$$

◁

9.11 Übung Man dividiere $-36a^3b^2c^4$ durch $-4ab^2c^2$. Zur besseren Übersicht schreiben wir die Division als Bruch:

$$\frac{-36a^3b^2c^4}{-4ab^2c^2} = \frac{9a^3b^2c^4}{ab^2c^2} = \frac{9a^2b^2c^4}{b^2c^2} = \frac{9a^2c^4}{c^2} = 9a^2c^2.$$

◁

9.12 Übung Gesucht $\frac{1}{8} \cdot (3x)^2 \cdot (-2y)^3$:

$$\frac{1}{8} \cdot (3x)^2 \cdot (-2y)^3 = \frac{1}{8}9x^2(-8y^3) = -9x^2y^3$$

Fertig. ◁

9.13 Übung Wir dividiere $72x^5y^6 - 36x^4y^3 - 18x^2y^2$ durch $9x^2y$. Als Bruch

$$\frac{72x^5y^6 - 36x^4y^3 - 18x^2y^2}{9x^2y} = \frac{8x^5y^6 - 4x^4y^3 - 2x^2y^2}{x^2y} = \frac{8x^3y^6 - 4x^2y^3 - 2y^2}{y}$$

Und noch die Division durch y:

$$= 8x^3y^5 - 4x^2y^2 - 2y$$

Voraussetzung ist, dass der Divisor nicht Null ist, oder kürzer $xy \neq 0$. ◁

9.14 Übung Wir vereinfachen folgenden Ausdruck, wobei wir gleichnamig machen müssen :

$$\frac{x^2 - y^2}{4(x-y)^3} - \frac{y^2}{6(y-x)^3} = \frac{3(x^2 - y^2)}{3 \cdot 4(x-y)^3} - \frac{2y^2}{2 \cdot 6(y-x)^3} = \frac{3x^2 - 3y^2 - 2y^2}{12(x-y)^3} = \frac{3x^2 - 5y^2}{12(x-y)^3}$$

◁

9.15 Übung Vereinfache $(-x^2y^3z^2) \cdot (-x^4y^5z^4) \div 2x^3y^3z^4$. Wie fast immer gibt es mehrere Vorgehensweisen. Wir sammeln mal alle gleichartigen Faktoren:

$$\begin{aligned} &(-x^2y^3z^2) \cdot (-x^4y^5z^4) \div 2x^3y^3z^4 \\ =&((-1)^2x^2y^3z^2 \cdot x^4y^5z^4) \div 2x^3y^3z^4 \\ =&(x^6y^8z^6) \div 2x^3y^3z^4 \\ =&(x^3y^5z^2) \div 2 \\ =&\frac{1}{2}x^3y^5z^2 \end{aligned}$$

◁

Eigenschaften 9.16. Teilbarkeit von speziellen Binomen

- $a^n - b^n$ ist durch $(a - b)$ für jedes n teilbar,
- $a^n - b^n$ ist durch $(a + b)$ für gerade n teilbar,
- $a^n + b^n$ ist durch $(a + b)$ für ungerade n teilbar,
- $a^n + b^n$ ist durch $(a - b)$ nie teilbar.

9.17 Übung Wir berechnen das folgende Produkt:

$$\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab^3 + \frac{1}{3}b^6\right) \cdot \left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab^3 + \frac{1}{3}b^6\right)$$

Wir machen gleichnamig auf 12

$$\left(\frac{3 \cdot 3}{12}a^2 - \frac{6}{12}ab^3 + \frac{4}{12}b^6\right) \cdot \left(\frac{9}{12}a^2 + \frac{6}{12}ab^3 + \frac{4}{12}b^6\right)$$

$$\frac{1}{12}\left(9a^2 - 6ab^3 + 4b^6\right) \cdot \left(9a^2 + 6ab^3 + 4b^6\right)\frac{1}{12}$$

Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12^2}\left(9a^2 - 6ab^3 + 4b^6\right) \cdot \left(9a^2 + 6ab^3 + 4b^6\right)\\
=&\frac{1}{12^2}\left(81a^4 + \cancel{54a^3b^3} + \cancel{36a^2b^6} - \cancel{54a^3b^3} - \cancel{36a^2b^6} - \cancel{24ab^9} + 36a^2b^6 + \cancel{24ab^9} + 16b^{12}\right)\\
=&\frac{1}{9 \cdot 16}\left(81a^4 + 36a^2b^6 + 16b^{12}\right)\\
=&\frac{9}{16}a^4 + \frac{1}{4}a^2b^6 + \frac{1}{9}b^{12}
\end{aligned}$$

Alternativ hätte man die zweite binomische Formel verwenden können mit der Umstellung

$$\left(\left[\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^6\right] - \frac{1}{2}ab^3\right) \cdot \left(\left[\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^6\right] + \frac{1}{2}ab^3\right)$$

mit

$$\left[\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^6\right]^2 - \left(\frac{1}{2}ab^3\right)^2 = \frac{9}{16}a^4 + \frac{1}{2}a^2b^6 + \frac{1}{9}b^{12} - \frac{1}{4}a^2b^6$$

$\triangleleft$

Potenzen von Summen

Wir betrachten die Potenzen $(a-b)^n$, die wir durch wiederholte Multiplikation mit $(a-b)$ erzeugen können. ($(a+b)$ folgt daraus, indem man alle Minuszeichen durch Pluszeiche ersetzt.) Das gibt folgendes Bild:

$$\begin{aligned}
(a-b)^0 &= 1\\
(a-b)^1 &= 1a - 1b\\
(a-b)^2 &= 1a^2 - 2ab + 1b^2\\
(a-b)^3 &= 1a^3 - 3a^2n + 3ab^2 - 1b^3\\
(a-b)^4 &= 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4\\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Man kann drei Muster für die Koeffizienten erkennen: Erstens sind die ersten und letzten immer 1. Zweitens sind die Koeffizienten einer Zeile jeweils die Summe der zwei darüberstehenden Koeffizienten. Drittens wechseln die Vorzeichen jeweils, mit Minus beginnend.
Das Muster der Exponenten ist, dass in jedem Term die Summe der Exponenten dem Exponenten der Summe entspricht. Zudem nimmt der Exponent des ersten Terms immer um 1 ab und der Exponent des zweiten Terms immer um 1 zu, also a^3b wird gefolgt von a^2b^2 usw. Das Muster der Koeffizienten ist das berühmte Dreieck genannt *Pascal'sches Dreieck*.

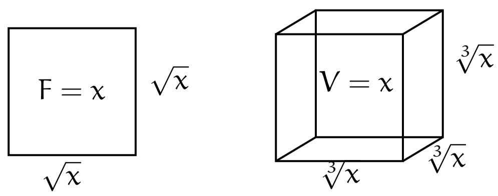
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

9.18 Übung Ausgehend von den Mustern entwickeln wir ohne Rechnung $(x+y)^5$: Wir finden die sechste Zeile mit den Koeffizienten $1, 5, 10, \ldots$ und beginnen mit x^5, x^4y etc. Also

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

◁

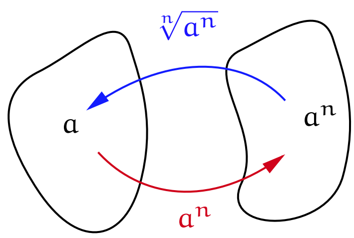
9.4.2 Wurzeln



Die Wurzel ist eine Verallgemeinerung der Vorstellung, eine quadratische Fläche sei bekannt und man soll die Kantenlänge daraus berechnen. Das ist die Quadratwurzel. Analog die Vorstellung, das Volumen eines Würfels gleicher Kantenlänge sei bekannt und die Kantenlänge gesucht. Daraus der Begriff der kubischen Wurzel. Den Zusammenhang mit den Potenzen ist leicht einsehbar. Die Fläche eines Quadrats ist die Multiplikation der Kantenlängen, beim Volumen ist es das Tripelprodukt der Kantelängen. Die Wurzel kann als die Umkehrung des Potenzierens mit natürlichen Zahlen aufgefasst werden, d.h.

$$a = g(a^n)) = \sqrt[n]{a^n}$$

In der Geometrie kennen wir die Bestimmung der Seiten von Quadraten oder Kuben. Es gibt Wurzeln zu jeder natürlichen Zahl, also nicht nur 2 und 3. Man spricht von Wurzeln n-ten Grades. Die Wurzel n-ten Grades ist die Umkehrung einer Potenz n-ten Grades.



Definition 65. Die n-te *Wurzel* aus einer nicht negativen Zahl a ist diejenige nicht negative Zahl b, fur die gilt $b^n = a$. Man schreibt $b = \sqrt[n]{a}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Dabei heisst a der *Radikand*, n der Wurzelexponent und b der Wurzelwert.

Anmerkung 9.19. In der Definition wir ausdrücklich gesagt, dass der Wurzelwert b nicht negativ sein darf. Die Definition würde aber auch für den korrekten Term $(-2)^3 = -8$

funktionieren, also einem negativen Wurzelwert -2. Für gerade Exponenten existieren keine negativen Wurzelwerte, also $x^2 > 0$ oder $y^4 > 0$ gilt immer.
Für Dezimalzahlen wie 0.21 ist das Konzept von gerade und ungerade nicht sinnvoll. In Hinblick auf die Erweiterung der Wurzeloperation zu solchen Zahlen ist eine Fallunterscheidung gerade/ungerade nicht machbar. Deshalb sollte man bei dieser Definition bleiben. Um dennoch Sonderfälle einzufangen, fordert man, dass die Gleichung $b^3 = -8$ nicht $\sqrt[3]{-8}$ als Lösung hat sondern $-\sqrt[3]{8}$ zu schreiben ist, aber eben nur für ungerade Exponenten.

Satz 9.20. Es gilt

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geqslant 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Anmerkung 9.21. Dieser Satz ist wichtig, um Widersprüche zu vermeiden. Denn wäre $\sqrt{a^2} = a$, dann wäre $\sqrt{(-a)^2} = -a$ und $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = a$ nicht vereinbar.

Eigenschaften 9.22. **Wurzeln** a und b sind reelle, m und n natürliche Zahlen. Es gilt:

- **Produktregel** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[n+m]{a}$
- **Quotientenregel** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ für $b \neq 0$.
- **Potenzregel** $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ und $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Mit der folgenden Definition gelingt es, die Wurzeln als Teil der Potenzen zu betrachten und somit deren Regeln zu unterwerfen.

Definition 66. Wir setzen

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Anmerkung 9.23. Mit dieser Definition des Exponenten als Bruch anstelle der Wurzel wird es möglich, dass die Rechenregeln für Wurzeln den Rechenregeln für Potenzen gleich sind. Eigentlich könnte man das Wurzelzeichen abschaffen.

9.24 Übung Wir wenden die Definition auf $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ an. Somit folgt $a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$ und mit Eigenschaft 9.22 folgt, $(ab)^{\frac{1}{n}}$. Das ist wiederum $\sqrt[n]{ab}$. ◁

9.25 Übung Man vereinfache $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{32} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{128} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{500}\right) \cdot 3\sqrt[3]{4}$. Als erstes schauen wir die Radikanden an und zerlegen sie in Primfaktoren, also $32 = 2^5 = 4 \cdot 2^3$, $128 = 2^7 = 2 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 4^3$ und $500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^3$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{32} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{128} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{500}\right) \cdot 3\sqrt[3]{4} =& \left(\frac{1}{2}2\sqrt[3]{4} + \frac{1}{3}4\sqrt[3]{2} - \frac{1}{5}5\sqrt[3]{4}\right) \cdot 3\sqrt[3]{4} \\
=& \left(\frac{1}{3}4\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}\right) \cdot 3 \\
=& 4\sqrt[3]{8} \\
=& 8
\end{aligned}$$

Es ist erstaunlich, auf wie viele Arten man eine Zahl schreiben kann. ◁

9.26 Übung Wir vereinfachen, wieder Schritt um Schritt, mit dem Term rechts beginnend:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{ab^2c^2} \div \sqrt[3]{\frac{27a^{-5}}{64bc^{-6}}} = \sqrt[3]{ab^2c^2} \div \sqrt[3]{\frac{27c^6}{64ba^5}} \\
=&\sqrt[3]{ab^2c^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{64ba^5}{27c^6}} = \sqrt[3]{ab^2c^2 \cdot \frac{64ba^5}{27c^6}} \\
=&\sqrt[3]{\frac{64b^3a^6c^2}{27c^6}} = \sqrt[3]{\frac{2^6b^3a^6}{3^3c^4}} = \frac{4ba^2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{c^4}} \\
=&\frac{4ba^2}{3c}\sqrt[3]{\frac{1}{c}}
\end{aligned}$$

◁

9.27 Übung Bestimme $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) \div (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$. Für eine Lösung muss man Terme wie $\sqrt[3]{a^2}$ umschreiben als $(\sqrt[3]{a})^2$. Als Erklärung dient z.B. die Schreibweise mit rationalen Exponenten. Es ist $\sqrt[3]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{3}}$ und das mit den Rechenregeln $(a^{\frac{1}{3}})^2$. Wir finden also eine Binomialform $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$, hier $(\sqrt[3]{a}^2 - \sqrt[3]{b}^2) = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$. Damit ist die Lösung klar, nämlich $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$. ◁

Brüche mit Wurzeln im Nenner sollen so umgeformt werden, dass sie rational sind.

9.28 Übung Der Nennen soll keine Wurzel mehr enthalten für die folgenden zwei Ausdrücke:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \qquad \text{und} \qquad \frac{12}{\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Mit der zweiten binomischen Formel kann man mit $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ erweitern und bekommt

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x + y}$$

Bei zweiten Term geht es nicht ganz so einfach, wobei der Anfang gleich ist, also erweitern mit $\sqrt{5} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

$$\frac{12}{\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{12(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{5 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{12(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{\cancel{5 - 2 - 3} + 2\sqrt{2 \cdot 3}}$$

Nun erweitern wir zum zweiten Mal, jetzt mit $\sqrt{6}$ und kürzen mit 2

$$\frac{6\sqrt{6}(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{6} = \sqrt{6}(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

◁

9.5 Operationen vierter Stufe

9.5.1 Exponentialfunktion

Die elementaren Funktionen kommen immer in Paaren daher. Denn die eine ist die Umkehrfunktion der anderen. Wir haben drei Stufen bereits besprochen, nun kommt die vierte. Die Einteilung ist wie folgt:

1. Stufe	Addition	Subtraktion
2. Stufe	Multiplikation	Division
3. Stufe	Potenz	Wurzel (Radix)
4. Stufe	Exponentialfunktion	Logarithmus

Zur Erinnerung: Die Stufen bilden eine Reihenfolge der Operationen, wenn diese nicht Klammern verändert wird. Das heisst, dass zum Beispiel ein Polynom in der Reihenfolge der Stufen, von höherer zu niedriger, ausgeführt werden müssen.
Betrachen wir den generischen und zwei spezifische Ausdrücke:

$$y = a^b, \qquad f(x) = x^b \quad \text{und} \quad f(x) = a^x.$$

Alle drei haben eine Basis und einen Exponenten, eine Hochzahl. Für bestimme Setzungen der Variablen, z.B. $a = 5$ und $b = 2$ ergibt der erste Ausdruck, ein Monom, eine Zahle 25. In zweiten Fall wird die unabhängige Variable x in der Menge des Definitionsbereichst variiert und liefert mit derselben Operation die Wertemenge. Im dritten Fall ist der Exponent x die unabhängige Variable.

Wichtig 13. Die *Exponentialfunktion* ist diejenige Potenzfunktion, bei welcher der Exponent die unabhängige Variable darstellt. ⊣

Definition 67. Die Exponentialfunktion ist eine Funktion der reellen Variablen x der Form

$$f(x) = b^x$$

mit einer reellen Zahl $b > 0$ und $b \neq 1$ als Basis (Grundzahl).

Anmerkung 9.1. Es wird auch die Schreibweise $\exp_b(x)$ für b^x verwendet. Wir werden bei Logarithmus sehen, wieso.

Eine Potenz wie $3^{\sqrt{2}}$ ist laut Definition ein zulässiger Wert einer Exponentialfunktion. Nur, wie bestimmt man einen solchen Wert? Wir erinnern uns an die Einschachtelung von $\sqrt{2}$ auf Seite 9-2: $1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$. Wenn wir die Näherung 1.4142 annehmen für die exakte Zahl, dann könnten wir schreiben mit $1.4142 = \frac{14142}{10000}$:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{\frac{14142}{10000}} = \sqrt[10000]{3^{14142}}$$

und wir hätten eine Erklärung, wenn auch eine nicht sehr elegante.

Anmerkung 9.2. Die häufigsten Basen oder Grundzahlen der Exponentialfunktion sind 10 und die irrationale Euler'sche Zahl e. Diese wird auch als *natürliche Basis* bezeichnet.

In Übereinstimmung mit den Eigenschaften der Potenzen können wir wie folgt zusammenfassen.

Eigenschaften 9.3. Exponentialfunktion Es ist $f(x) = b^x$ eine Exponentialfunktion, wobei $b > 0$ und $b \neq 1$, und u und w zwei reelle Zahlen.

- **Produktregel:** $\exp_b(u + w) = \exp_b(u)\exp_b(w)$ oder $b^{u+w} = b^u b^w$
- **Quotientenregel:** $\exp_b(u - w) = \dfrac{\exp_b(u)}{\exp_b(w)}$ oder $b^{u-w} = \dfrac{b^u}{b^w}$
- **Potenzregel:** $(\exp_b(u))^w = \exp_b(uw)$ oder $(b^u)^w = b^{uw}$

9.4 Übung Wir vereinfachen $8^3 \cdot 2^4 \cdot 4^{-1}$: es ist $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$ und $2^9 \cdot 2^4 = 2^{13}$. Zudem ist $4^{-1} = (2^2)^{-1} = 2^{-2}$. Damit $2^{13} \cdot 2^{-2} = 2^{13-2} = 2^{11}$. ◁

9.5 Übung Vereinfache $a^{2^{3^2}}$ und $((a^2)^3)^3$ und faktorisiere $ab^5(a^2b^{-2} - b^{-5+3}a^5)$. Zuerst die Exponenten, wo keine Klammer: $a^{2^9} = a^{512}$. Dann $((a^2)^3)^3 = (a^6)^3 = a^{18}$. Zuletzt

$$ab^5(a^2b^{-2} - b^{-5+3}a^5) = a^5(a^2b^{-2}[1 - a^3]) = a^7b^{-2}(1 - a^3) = \frac{a^7}{b^2}(1 - a^3)$$

$\triangleleft$

9.5.2 Logarithmus

Die Werte der Exponentialfunktion sind Potenzen, und damit wenig Neues. Nun interessiert aber, wie man den Exponenten von $f(x) = b^x$, also $x = g(f(x))$ mit $g(x) = f^{-1}(x)$ bestimmen kann. Die zur Exponentialfunktion inverse Funktion ist die Logarithmusfunktion.

Definition 68. Die Inverse oder Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ nennt man *Logarithmusfunktion* zur Basis b und bezeichnet sie als $f^{-1}(x) = \log_b(x)$.

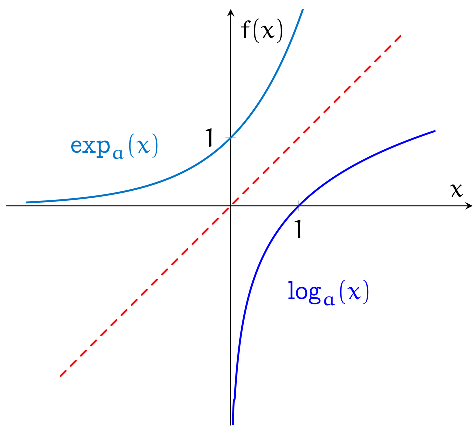
Anmerkung 9.6. Zur Erinnerung: das Aequivalenz-Zeichen $\Leftrightarrow$ bedeutet “genau dann, wenn”.

Satz 9.7. Inverse Es ist $b > 0$, $b \neq 1$ und x reell.

- $(b^a = \exp_b(a) = c) \quad \Leftrightarrow \quad (\log_b(c) = a)$
- $\log_b(b^x) = \log_b(\exp_b(x)) = x$
- $b^{\log_b(x)} = \exp_b(\log_b(x)) = x$ für $x > 0$

Anmerkung 9.8. Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert. Ein Ausdruck $\log_b(-1)$ würde implizieren, dass es einen Exponenten x gäbe, der $b^x = -1$ erfüllen würde. Es gibt aber kein solches x in den reellen Zahlen. Denn mit der Forderung $b > 0$ sind alle Potenzen von b positiv.

Die Tatsache, dass eine Inverse existiert, setzt voraus, dass die Funktionen eineindeutig (bijektiv) sind. Das sieht man leicht ein, wenn man die Exponentialfunktion an der 45°-Achse spiegelt. Die gespiegelte Kurve ist auch eine Funktion.
Ihr Definitionbereich D ist der Wertebereich der Exponentialfunktion $D = (0, \infty)$. Der Wertebereich der log-Funktion ist der Definitionsbereich der exp-Funktion, also $W = (-\infty, \infty)$.
In der Abbildung erkennt man auch, dass die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 0)$ speziell sind. Es gilt nämlich:



Eigenschaften 9.9. Nullelement Für jedes $b > 0$ gilt

$$\exp_b(0) = b^0 = 1$$
$$\log_b(1) = 0$$

Anmerkung 9.10. Das bedeutet, dass jede Exponentialfunktion durch den Punkt $(0, 1)$ geht und jede Logarithmusfunktion durch $(1, 0)$.

Für die Basen 10 und e verwendet man spezielle Namen:

Definition 69. Es ist der *dekadische Logarithmus*

$$\lg(x) = \log_{10}(x)$$

und der *natürliche Logarithmus*

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Anmerkung 9.11. Man findet auf den Taschenrechnern häufig diese zwei Funktionen, welche die Tasten `LOG` für $\lg(x)$ und `LN` für $\ln(x)$ verwenden. Dies reicht aus, um beliebige Logarithmen zu berechnen, denn es gelten einfache Umrechnungsregeln, siehe weiter unten. (Eigentlich würde eine log-Funktion ausreichen.)

Die Eineindeutigkeit kann man in einem Satz formalisieren.

Satz 9.12. Eineindeutigkeit Es sind $b > 0$ mit $b \neq 1$, u und w reelle Zahlen:

- $(b^u = b^w) \quad \Leftrightarrow \quad (u = w)$,
- $\left(\log_b(u) = \log_b(w)\right) \quad \Leftrightarrow \quad (u = w)$ für $u > 0, w > 0$.

Nehmen wir an, $x = \log_b(uw)$, $y = \log_b(u)$ und $z = \log_b(w)$. Aus der Beziehung der Inversen (Satz 9.7) folgt $b^x = uw$, $b^y = u$ und $b^z = w$. Damit folgt auch $b^x = uw = b^y b^z = b^{y+z}$ und somit $b^x = b^{y+z}$. Mit der Eineindeutigkeit (Satz 9.12) folgt nun $x = y + z$. Deshalb

$$\log_b(uw) = \log_b(u) + \log_b(w)$$

Ganz analog für $x = \log_b(u/w)$, $y = \log_b(u)$ und $z = \log_b(w)$. D.h. $b^x = u/w$, $b^y = u$ und $b^z = w$. Damit $u/w = b^y/b^z = b^{y-z}$. Exponentenvergleich: $x = y - z$ und daraus die Setzungen eingesetzt:

$$\log_b(u/w) = \log_b(u) - \log_b(w)$$

Nun betrachten wir $\log_b(u^w)$ und schreiben die Potenz unter der Annahmen, w sei eine ganze Zahl $\log_b(\underbrace{u \cdot u \cdot u \ldots u}_{w\text{ mal}})$. Mit der oben hergeleiteten Formel für das Produkt uw folgt bei mehrfacher Anwendung $\log_b(u^w) = w \cdot \log_b(u)$. Nun ist das noch nicht befriedigend, denn w sollte auch reell sein können. Wir setzen $x = w \log_b(u)$ und damit folgt $x/w = \log_b(u)$. Daraus folgt $\exp_b(x/w) = b^{x/w} = u$ und auch $b^x = u^w$. Nun führt logarithmieren zu $\log_b(b^x) = x = \log_b(u^w)$ und x aus der Setzung eingesetzt

$$\log_b(u^w) = x = w \log_b(u).$$

Eigenschaften 9.13. Logarithmusfunktion Es sind $b > 0$, $b \neq 1$, $u > 0$ und $w > 0$ reelle Zahlen.

- **Produktregel:** $\log_b(uw) = \log_b(u) + \log_b(w)$
- **Quotientenregel:** $\log_b\left(\frac{u}{w}\right) = \log_b(u) - \log_b(w)$
- **Potenzregel:** $\log_b\left(u^w\right) = w \log_b(u)$

Die ursprüngliche Verwendung der Logarithmen war die Vereinfachung der Rechnung mit sehr grossen Zahlen. Die Logarithmen wurden tabelliert, was nun der Verwendung des Taschenrechners entspricht. Wir berechenen einen Ausdruck mit grossen Zahlen “logarithmisch”:

9.14 Übung Wir berechnen $Q = \dfrac{42300 \cdot 17800}{7170}$

$$\ln\left(\frac{42300 \cdot 17800}{7170}\right) = \ln(42300) + \ln(17800) - \ln(7170) = 10.653 + 9.787 - 8.878 = 11.562$$

Und damit $Q = \exp(11.57) = 105013$. Oder alternativ

$$\lg\left(\frac{42300 \cdot 17800}{7170}\right) = \lg(42300) + \lg(17800) - \lg(7170) = 4.626 + 4.250 - 3.855 = 5.021$$

und $10^{5.021} = 105013$. ◁

9.15 Übung Wir vereinfachen $\log_2\left(\dfrac{8}{x}\right)$. Mit der Quotientenregel folgt $\log_2(8) - \log_2(x)$ mit $8 = 2^3$ folgt weiter $\log_2(2^3) - \log_2(x)$. Mit der Potenzregel ergibt sich $3\log_2(2) - \log_2(x)$ und mit der Definition $3 - \log_2(x)$. ◁

9.16 Übung Bringen wir alle Terme in ein Argument einer Logarithmusfunktion ausgehend von $\log(x) + 2\log(y) - \log(z)$.

$$\begin{aligned}
\log(x) + 2\log(y) - \log(z) &= \log(x) + \log\left(y^2\right) - \log(z) && \text{Potenzregel}\\
&= \log\left(xy^2\right) - \log(z) && \text{Produktregel}\\
&= \log\left(\frac{xy^2}{z}\right) && \text{Quotientenregel}
\end{aligned}$$

◁

9.17 Übung Entwickle den Ausdruck $\ln\left(\dfrac{3}{ex}\right)^2$. Potenzregel etc.

$$\ln\left(\frac{3}{ex}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{3}{ex}\right) = 2\Big[\ln(3) - \big(\ln(e) + \ln(x)\big)\Big] = 2\Big[\ln(2) - 1 - \ln(x)\big)\Big]$$

◁

9.18 Übung Wir vereinfachen folgenden Ausdruck $\log_3(x-1) - \log_3(x+1)$. Mit der Quotientenregel schreiben wir

$$\log_3(x-1) - \log_3(x+1) = \log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Da das Argument des Logarithmus grösser als 0 sein muss, muss $x > 1$ sein. Man beachte, dass die Basis des Logarithmus dieselbe sein muss. ◁

9.19 Übung Wir sind daran interessiert, die Basis zu wechseln, also das Problem $a^c = b^y$ zu lösen, indem wir y isolieren. Mit den Rechenregeln folgt

$$y = \log_b(b^y) = y = \log_b(a^c)$$

Mit den Setzungen $a = 3$, $c = 5$ und $b = 4$ folgt:

$$y = \log_4(3^5) = 5\log_4(3)$$

◁

Man kann auch die Basis des log wechseln. Wir nehmen die Identität

$$a^{\log_a(x)} = x$$

und wenden einen Logarithmus auf beiden Seiten an

$$\log_b(a^{\log_a(x)}) = \log_b(x)$$

Mit der Potenzregel folgt

$$\log_a(x)\log_b(a) = \log_b(x)$$

und somit

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Man beachte, dass b nur als Basis der Logarithmen vorkommt. Da b nur grösser als 0 und ungleich 1 sein muss, sonst aber beliebig sein kann, könnte man auch $b = 10$ oder $b = e$ wählen. Es gilt also

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\lg(x)}{\lg(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Damit ist auch klar, wieso es ausreichend ist, auf dem Taschenrechner nur den lg und den ln zu haben. Die Gleichheit der Verhältnisse impliziert, dass die Logarithmen mit unterschiedlichen Basen zum selben Wert x sich nur durch eine Konstante unterscheiden. Es muss also gelten mit Konstanten c_1 und c_2:

$$\log_b(x) = c_1 \cdot \ln(x) = c_2 \cdot \lg(x)$$

Formel 9.20. Basiswechsel Mit $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ und x reelle Zahlen.

- $a^x = b^{x \log_b(a)}$
- $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ für $x > 0$.

9.21 Übung Vereinfache $\log_{0.1}(10x^2)$. Wie so oft gibt es mehrere Möglichkeiten. Wir wählen den Basiswechsel und schreiben

$$\log_{0.1}(10x^2) = \frac{\lg(10x^2)}{\lg(0.1)} = \frac{\lg(10) + 2\lg(x))}{\lg(0.1)} = \frac{1 + 2\lg(x)}{-1} = -(1 + 2\lg(x)).$$

◁

9.22 Übung Man sucht die Zahl 3^{35} als Zehnerpotenz. Mit der Formel folgt der Basiswechsel $3^{35} = \exp_{10}(35\log_{10}(3)) = \exp_{10}(16.70) = 10^{0.7} \cdot 10^{16} = 5.01 \cdot 10^{16}$. ◁

9.6 Reihenfolge der Operationen

Nachdem wir jetzt die Operationen erster bis viert Stufe behandelt haben, können wir auf den Sinn dieser Klassifizierung eingehen. Wir haben verschiedentlich auf die Reihenfolge der Operationen hingewiesen, und fassen deshalb hier zusammen. Kurz gesagt gibt es die Klammer, um die sonst gültige Ordnung aufzuheben. Die Reihenfolge muss unmissverständlich klar sein, denn z.B. ein Computerprogramm muss die Operationen ausführen können.

9.1 Rezept Operationsreihenfolge für die Berechnung von Ausdrücken mit reellen Zahlen.

(1) Berechne Ausdrücke in Klammern (oder ähnlichen Gruppensymbolen)

(2) Berechne Terme mit Exponenten (oder Logarithmen).

(3) Führe die Multiplikation und Division von links nach rechts aus.

(4) Führe die Addition und die Subtraktion von links nach rechts aus.

Anmerkung 9.2. Die Vorschrift, von links nach rechts zu rechnen, klärt Ausdrücke wie $a/b \cdot b$. Das gibt a, wie jeder Tabellenkalkulator auch zeigt. Von rechts nach links würde das falsche Resultat a/b^2 folgen.

Anmerkung 9.3. Das negative Vorzeichen ist insofern speziell, als es nicht wie Plus und Minus zwei Terme verbindet. Das negative Vorzeichen bezieht sich auf den ganzen folgenden Term. Also ist -3^2 als $-(3^2)$ zu verstehen. Andernfalls muss man $(-3)^2$ schreiben.

Einige Eigenschaften der Operationen erlauben es, auch mit Variablen weiter zu rechnen, wo eine Bestimmung nicht möglich ist. Das Verteilungsgesetz z.B. erlaubt es, $a(1-x)$ als $a - ax$ zu entwickeln oder die Potenzregel von Logarithmen $\log(x^a) = a\log(x)$ bringt einen weiter, weil die Variablen nicht bestimmbar sind. Ebenso ist es unpraktisch oder gar unmöglich, einen Ausdruck wie $2^{5327}/2^{5324} = 2^3 = 8$ zuerst zu Potenzieren und dann zu dividieren. Ein Rechenprogramm würde sich wahrscheinlich stur an die Reihenfolge halten müssen.

9.4 Übung An der Summe exerzieren wir die Regeln durch:

$$12(-5)(-5+3)^{-4} + 6(-5)^2(-4)(-5+3)^{-5}.$$

Also, erstens Klammern:

$$12(-5)(-2)^{-4} + 6(-5)^2(-4)(-2)^{-5}$$

Exponenten

$$12(-5)\frac{1}{16} + 6 \cdot 25(-4)\frac{-1}{32}$$

Multipliziern oder Dividieren

$$-\frac{60}{16} + \frac{600}{32} = -\frac{120}{32} + \frac{600}{32}$$

Addieren oder Subtrahieren

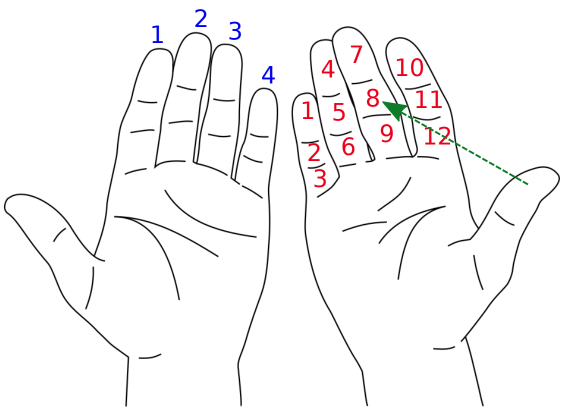
$$\frac{480}{32} = 15$$

◁

Und jetzt zu etwas ganz anderem.

9.7 Zahlendarstellung

Eine Zahl kommt von zählen. Wir haben bis dreiundzwanzig gezählt. Wir kann man diese Zahl darstellen? Wenn wir unseren Körper betrachten, dann kennen wir sofort die 2 Hände, die 5 Finger einer Hand, die 10 Finger beider Hände und die 20 Finger von Händen und Füssen (man denke an *quatre-vingts* im Französischen für 80).



In der Abbildung sieht man, wie man mit den Fingern die Zahlen von 1 bis 60 darstellen kann. Mit dem rechten Daumen zeigt man auf eines der 12 Glieder der vier Finger und mit der linken streckt man einen Finger hoch, wenn das Dutzend voll ist. Wenn der Daumen auf die 8 zeigt, dann ist das mit der linken 4 die Zahl 56. Denn 4 mal 12 plus 8 ist 56. Die Zahl 60 ist ebenfalls eine spezielle Zahl. Die Fingerstellung ist ein temporärer Speicher für die Zahl.

9.7.1 Additionssysteme

Kartenspieler, Gestrandete und Sträflinge benutzen häufig Striche, wobei ein Fünferpaket besonders bezeichnet ist, also

$$\text{dreiundzwanzig} \quad \Leftrightarrow \quad 𝍸\,𝍸\,𝍸\,𝍸\,|||$$

Diese Schreibart ist dann sinnvoll, wenn immer wieder dazugezählt und später die Summe gezogen wird, z.B. jeden Tag ein Strich, bei jeder Durchfahrt eines Fahrzeugs ein Strich u.v.m.
Die Römer verfügten über eine additive Zahlschrift mit den heute üblichen lateinischen Buchstaben, wie man sie an repräsentativen Gebäuden findet:

Zahlwert	1	5	10	50	100	500	1000
Symbol	I	V	X	L	C	D	M

Entsprechend dem Lateinischen, von links nach rechts zu schreiben, werden die Zahlen von links nach rechts der Grösse nach hingeschrieben und deren Zahlenwert addiert – daher der Name *Additionssystem* – , so entspricht

$$\text{MDCCXXII} \quad \Leftrightarrow \quad 1722.$$

Später wurde eine weitere Regel eingeführt, um die Zahlen kürzer schreiben zu können: die Subtraktionsregel. Damit nicht vier Mal dasselbe Zeichen auftritt, werden die Zahlzeichen I, X und C einem ihrer beiden jeweils nächstgrösseren Zahlzeichen vorangestellt und werden dann in ihrem Zahlwert von dessen Wert abgezogen. Also ist IX $\Leftrightarrow$ 9. Damit also z.B.

$$\text{MCMLXXXIV} \quad \Leftrightarrow \quad 1984$$

CM ist 1000-100=900 und IV ist 4. Grössere zahlen als 1000 wurden unter anderem auch als Zahlen mit Überstrich geschrieben, also $\overline{\mathrm{V}} \Leftrightarrow 5000$, $\overline{\mathrm{X}} \Leftrightarrow 10000$ usf. bis $\overline{\mathrm{M}} \Leftrightarrow 1'000'000$. Als

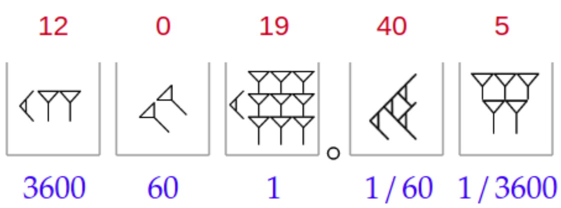
Brüche verwendeten die Römer speziell die Zahl 12 und damit Zwölftel, denn 12 hat die Teiler $\{2, 3, 4, 6\}$. Damit hat man einige Möglichkeiten. In unserem Zahnersystem kann man einen Drittel nicht schön darstellen. Ein Zwölftel heisst auf Lateinisch *uncia*, das in unserer Einheit Unze fortlebt. Die Römer kennen das Numerale Null aber kein Symbol dafür.
Für das Rechnen über die Addition hinaus ist das Additionssystem eher mühsam bis unbrauchbar.
Vor den Römern haben die Ägypter ebenfalls ein Additionssystem verwendet auf der Basis von Zehnerzahlen.

9.7.2 Hybride Systeme

Die Chinesen und abgeleitet auch die Japaner und Koreaner verwendeten oder verwenden immer noch ein gemischtes System von Zahlen. Gemischt bezieht sich auf die Tatsache, dass Zahlen mit einem Zeichen für Zehnerpotenzen versehen und dann addiert werden. Also beispielsweise analog $3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 = 3203$. Man nennt diese Struktur multiplikativ-additiv zur Basis 10.

9.7.3 Positionssysteme

Das älteste Positionssystem stammt von den Sumerern und wurde dann in Mesopotamien mit Hauptstadt Babylon und weit darüber hinaus verwendet. Wir befinden uns ca. im Jahre 3000 v.Chr. In Mesopotamien, dem Zweistromland von Euphrat und Tigris, gibt es haufenweise Sand und Lehm, an den Flüssen Schilf, aber keine Steine. Schrift entsteht dort, wo man sich nicht mehr alles im Kopf merken kann und Zahlen sind ein Teil von Schrift. Die Sumerer haben Tontafeln verwendet und mit Schilfhalmen Abdrücke gemacht. Mit dem Schilf ergeben sich zwei typische Abdrücke, die man als Keil und Winkel bezeichnen könnte.



Die Position kann man sich wie einen Behälter vorstellen, in dem die Ziffer geschrieben ist. Es wird klar, dass keine Position leer sein kann, man muss ein Zeichen für die Null verwenden. Im Behälter stehen Zahlen von 1 bis 59, die additiv gebildet werden. Die Babylonier waren schon gute Mathematiker, sie verwendeten für die Kreiszahl π den Wert $25/8 = 3.125$ und konnten quadratische Gleichungen lösen und kannten den Satz von Pythagoras.
Das 60er-System finden wir noch bei den Winkeln und Stunden mit den Untereinheiten Minuten und Sekunden.

9.1 Übung Es ist 9 Uhr 25 Minuten und 29 Sekunden. Und als Dezimalzahl? Die 9 bleibt: $9 + \frac{26}{60} + \frac{29}{3600} = 9.4414$. ◁

9.2 Übung Die geographischen Koordinaten eines Punktes sind $47.281055°$ nördliche Breite und $8.616776°$ östlicher Länge. Stellen wir die Koordinaten in Grade, Minuten und Sekunden dar. Die Grade sind schon als 47 und 8 gegeben. Nun müssen wir die Dezimalstellen in 60-stel verwandeln, also $\frac{281055}{1000000} = \frac{x}{60}$ oder $0.281055 \cdot 60 = 16.8$. Der Ganzteil ist 16. Nun ziehen wir ab: $0.281055 - 16/60 = 0.014388$. Der Rest ist $0.014388 = \frac{14388}{1000000} = \frac{y}{3600}$. y ist 51.80. Zusammen schreibt man $47°16'51.8''$. Für die andere Koordinate rechnen wir anders: $0.616776 \cdot 60 = 37.0066$, also $37'$, der Rest $0.0066 \cdot 60 = 0.4$ oder $0.4''$. Zusammen $8°37'0.4''$. $\triangleleft$

Dekadisches System

Das von uns üblicherweise verwendete System stammt aus Indien und wurde von den Arabern zu uns gebracht. Es ist ein sogenanntes Positions- oder Stellenwertsystem, weil die Bedeutung einer Ziffer davon abhängt, an welcher Stelle oder Position sie steht. Die Position wird von ganz rechts für ganze Zahlen oder vom Dezimalpunkt (oder Dezimalkomma) gemessen. Man verwendet einen Vorrat an Ziffern, die sich mit einem Schriftzeichen darstellen lassen. Für unser Zehnersystem ist der Vorrat die Menge $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, deren Mächtigkeit der Grundzahl des Systems entspricht.

4	3	2	1	9	•	6	7
10000	1000	100	10	1		1/10	1/100
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}

Wie man aus der Abbildung sieht, besteht das Zehnersystem aus Behältern mit Zehnerpotenzen. Zehn ist die Grundzahl g.

g-adische Zahlen

Nun kann man aber andere Grundzahlen wählen, z.B. häufig 2 oder 16. Für $g = 2$ ist der Zifferenvorrat $\{0, 1\}$ und für $g = 16$ nimmt man noch Buchstaben hinzu, damit jede Position mit nur einem Zeichen belegt wird, also $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Dabei steht A für 11, B für 12 etc. bis F=16.

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	•	a_{-1}	a_{-2}
g^4	g^3	g^2	g^1	g^0		g^{-1}	g^{-2}

Allgemein kann man mit Positionssystemen und Potenzen einer Grundzahl $g \geqslant 2$ Zahlen schreiben, wobei wir mit σ noch das Vorzeichen einführen, als

$$x = \sigma\left(a_k \cdot g^k + a_{k+1} \cdot g^{k+1} + \ldots + a_n \cdot g^n\right)$$

Als Beispiel nehmen wir die Zahl 220 und vergleichen (als Index schreiben wir die Grundzahl)

$$220_{10} = 11011100_2 = 22011_3 = DC_{16}$$

Wie bestimmt man die Umrechnung? Mit der Methode der fortlaufenden Division. Mit $g = 16$:

$$220 : 16 = 13, \text{Rest}_{16} = 12 \qquad (9.1)$$

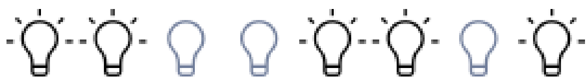
Weil 13 dem Zeichen D entspricht und 12 der C, gilt $220_{10} = DC_{16}$. Und für $g = 2$, dem sogenannten *Binärsystem* sowie $g = 3$ ist

$$\begin{aligned}
220 : 2 &= 110, R = \boxed{0} \\
110 : 2 &= 55, R = \boxed{0} \\
55 : 2 &= 27, R = \boxed{1} \\
27 : 2 &= 13, R = \boxed{1} \\
13 : 2 &= 6, R = \boxed{1} \\
6 : 2 &= 3, R = \boxed{0} \\
3 : 2 &= 1, R = \boxed{1} \\
1 : 2 &= 0, R = \boxed{1}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
220 : 3 &= 73, R = \boxed{1} \\
73 : 3 &= 24, R = \boxed{1} \\
24 : 3 &= 8, R = \boxed{0} \\
8 : 3 &= 2, R = \boxed{2} \\
2 : 3 &= 0, R = \boxed{2}
\end{aligned}$$

Die Binärzahl erscheint als die Reste von unten nach oben gelesen, also z.B. $22011_3 = 220_{10}$.

Binärsystem**

Elektronische Rechner verwenden das Binärsystem, um Zahlen und Buchstaben darzustellen. Wie wir gesehen haben, ist die Anzahl besetzter Positionen von der Höhe der Grundzahl abhängig und deshalb für $g = 2$ einiges länger als im dekadischen System. Elektronenrechner sind im Wesentlichen eine Anhäufung von Schaltern, die entweder an oder aus sind. Ein Schalter hat genau zwei Zustände. Anschaulich könnte man sich die Zahl 11001101_2 wie folgt vorstellen:



Wir zeigen, dass die Addition im Binärsystem genau gleich abläuft wie im dekadischen System. Wir addieren $(187 + 119)_{10}$ und analog $(10111011 + 01110111)_2$.

Summand 1	1	8	7
Summand 2	1	1	9
Übertrag	1	1	
Summe	3	0	6

	1	0	1	1	1	0	1	1
	0	1	1	1	0	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	0	0	1	0

Nun vergleichen wir das Resultat, nachdem wir das binäre Resultat umrechnen mit folgender Tabelle

a_k	1	0	0	1	1	0	0	1	0
g^k	256	128	64	32	16	8	4	2	1
$a_k \cdot g^k$	256	0	0	32	16	0	0	2	0

Es folgt das Resultat $256 + 32 + 16 + 2 = 306$. Die Addition funktioniert nach derselben Methodik wie beim Zehnersystem.
Nun zur Subtraktion:

Minuend	1	8	7
Subtrahend	1	1	9
Borger		1	
Differenz	0	6	8

Und binär:

Minuend	1	0	1	1	1	0	1	1
Subtrahend	0	1	1	1	0	1	1	1
Borger	1	0	0	0	1	0	0	
Differenz	0	1	0	0	0	1	0	0
2^k	128	64	32	16	8	4	2	1
$a_k 2^k$		64				4		

Auch hier stimmt das Resultat überein. Die Subtraktion kann man aber in eine Addition umwandeln, indem man das sogenannte Komplement bestimmt. Dabei werden für eine Zahl einfach 1 durch 0 und 0 durch 1 ersetzt und am Ende addiert man noch 1:

Subtrahend	1	1	1	0	1	1	1
Komplement	0	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$

Man kann nachrechnen, dass Subtrahend plus Komplement die Zahl 10000000_2 ist. Nun wird zum Minuenden das Komplement addiert, wobei man noch eine kleine Korrektur ausführen muss, nämlich die 10000000_2 abziehen (hier führende 1 durch 0 ersetzen):

Minuend	$\cancel{1}\boxed{0}$	0	1	1	1	0	1	1
Komplement	0	0	0	0	1	0	0	1
Übertrag	0	1	1	1	0	1	1	
Summe	0	1	0	0	0	1	0	0

Wie man sieht, ist das Resultat mit der obigen Subtraktion identisch. Elektronische Rechnern subtrahieren nicht sondern verwenden diese Art von Addition.

9.7.4 Addierer**

Wir machen einen Abstecher in die Schaltlogik. Wir betrachten den Anfang der Addition von Binärzahlen $a + b$, wobei $a, b \in \{0, 1\}$ sind:

Summand a		1
Summand b		1
Übertrag ü	1	
Summe s		0

Diese Operation besteht aus zwei Teilen: Erstens werden a und b verglichen. Es gibt vier Fälle $s = 1$, wenn entweder a oder b gleich 1, sonst $s = 0$.Der zweite Teil zum Übertrag: Wenn a und b gleich 1, dann $ü = 1$, sonst 0. Tabellarisch

a	b	s	ü
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

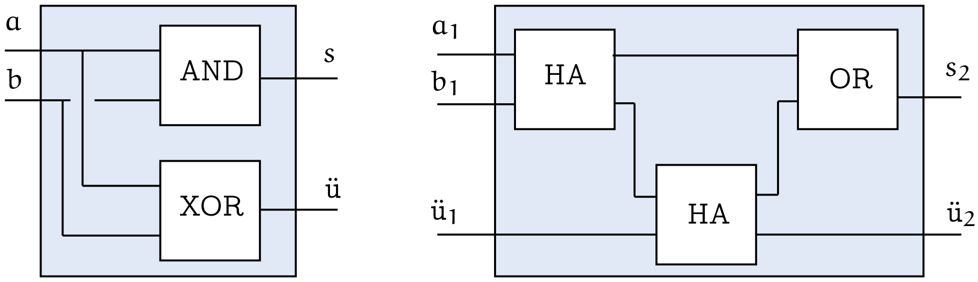
Die Kolonnen von s und $ü$ kann man mit den Wahrheitstabellen 7.9 und 7.5 vergleichen und man erkennt $s = a \veebar b$ und $ü = a \wedge b$. Nun haben wir mit der Liste 7.5.2 auf Seite 7-16 gezeigt, wie man diese Verknüpfung mit einem NOR-Baustein umsetzen kann. Jetzt gehen wir einen Schritt weiter, denn die nächste Summe bestimmt sich aus a, b und dem Übertrag $ü$.

Summand a_2		1	1
Summand b_2		0	1
Übertrag $ü_2$	1	1	
Summe s_2		1	0

Als Wahrheitstabelle geschrieben resultiert folgendes

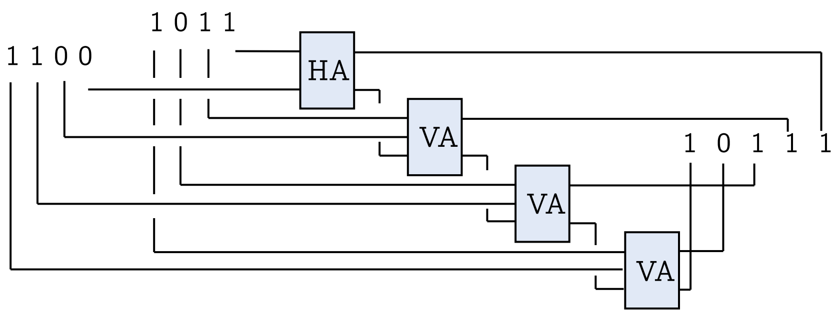
a_2	b_2	$ü_1$	s_2	$ü_2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Hier sieht man, dass ein Baustein drei Eingänge, d.h. a_2, b_2 und $ü_1$, und zwei Ausgänge s_2 und $ü_2$ besitzt. So geht die Rechnung fort, als nächstes $a_3 + b_3 + ü_2$ produziert s_3 und $ü_3$. Wir können die Addition mit Hilfsvariablen in zwei Schritte durchführen. Zuerst a_1 und b_1 addieren gibt die Summe $t = a_2 \veebar b_2$ und Übertrag $v = a_1 \wedge b_2$. Dann addieren wir t und $ü_1$ zur Summe $s_2 = t \veebar ü_1$ und Übertrag $w = t \wedge ü_1$. Nun folgt der Übertrag als $ü_2 = w \vee v$ mit einer Oder-Verbindung. Denn $ü_2$ kann nur 0 oder 1 sein. Wenn $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ und $ü_1 = 1$ sind, dann ist das Resultat 11. Bei beiden Teilsummen $a_1 + b_2$, $a_1 + b_1 + ü_1$ ist der Übertrag 1. Wir dürfen ihn nicht zweimal berücksichtigen. Deshalb "oder".



Halbaddierer HA Volladdierer VA

Wir haben zwei Schaltungen entworfen, erstens den *Halbaddierer*, der nur a und b addiert und zweitens den *Volladdierer*, der a_1, b_1 und $ü_1$ addiert. Der Halbaddierer ist auch ein spezieller Volladdierer mit dem Eingang $ü = 0$. Zusammen ergibt sich aus Halbaddierer plus ein Volladdierer die Möglichkeit, zweistelligen Zahlen zu addieren. Für längere Zahlen schaltet man mehr Volladdierer hintereinander.



In der Abbildung sieht man einen sogenannten 4-Bit-Addierer, der zwei Binärzahlen der Länge 4 zusammenzählen kann.

9.7.5 Rechnen mit Resten**

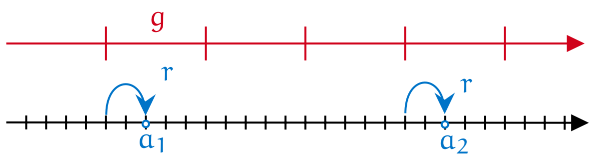
Wir gehen vom Satz 8.25 aus, wonach zwei natürlichen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ als

$$a = m \cdot g + r \qquad \text{mit} \quad 0 \leqslant r < g.$$

mit natürliche Zahlen m und r dargestellt werden können. Bsp. $17 : 3 = 5 \cdot 3 + 2$. Die Zahl m ist der sogenannte *Ganzteil*, der auch mit der typischen *Gauss-Klammer* geschrieben wird

$$m = \left\lfloor \frac{a}{g} \right\rfloor.$$

Die Menge der Zahlen, die für einen bestimmte Teiler g denselben Rest aufweisen, nennt man *Modul* oder *Restklasse* von g. Eine Modulfunktion für den Rest r von $a : g$ könnte man als $\mathcal{M}(a, g) = r$ schreiben[1], beispielsweise $\mathcal{M}(10, 7) = 3$. Damit definiert $\mathcal{M}(a, 2) = 0 \Leftrightarrow a \in \{\dots, -4, -2, 2, 4, 6 \dots\}$ die Menge der geraden Zahlen und $\mathcal{M}(a + 1, 2) = 0$ die ungeraden.



In der Abbildung sieht man zwei Zahlen a_1 und a_2, die beide bezüglich g den Rest $r = 2$ aufweisen, d.h. $\mathcal{M}(a_1, g) = \mathcal{M}(a_2, g) = r$. Es folgt, dass die Differenz $(a_2 - a_1) : g$ keinen Rest hat, denn $a_2 - a_1 = m_2 \cdot g + r - m_1 \cdot g - r = (m_2 - m_1) \cdot g$ ist restlos durch g teilbar. Mit $\mathcal{M}(10, 7) = \mathcal{M}(24, 7) = 3$ folgt $\mathcal{M}(24 - 10, 7) = \mathcal{M}(14, 7) = 0$.

Satz 9.3. Es gilt:

$$\mathcal{M}(a_1, g) = \mathcal{M}(a_2, g) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{M}(a_2 - a_1, g) = 0$$

und

$$\mathcal{M}(a, g) = \mathcal{M}(a + k \cdot g, g) \qquad \text{für } k \text{ ganze Zahl.}$$

Für die Grundzahl g gibt es nur die Reste $\{0, 1, 2, \dots, g - 1\}$. Wenn wir eine grössere Zahl im Zehnersystem wie 123 durch 10 dividieren, dann kann der Rest, die letzte Ziffer der Zahl, nur zwischen 0 und 9, dem Ziffernvorrat liegen.

Definition 70. Zwei Zahlen a und b nennt man *kongruent* im Modul g, wenn $\mathcal{M}(a, g) = \mathcal{M}(b, g)$.

Satz 9.4. Es gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}(a, g) = \mathcal{M}(b, g) \\ \mathcal{M}(c, g) = \mathcal{M}(d, g) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{M}(a + c, g) = \mathcal{M}(b + d, g) \\ \mathcal{M}(a - c, g) = \mathcal{M}(b - d, g) \\ \mathcal{M}(a \cdot c, g) = \mathcal{M}(b \cdot d, g) \end{cases}$$

[1] Die übliche, aber gewöhnungbedürftige Schreibweise ist $a \equiv r (\operatorname{mod} g)$ oder, etwas besser, $(a \mod g) = r$.

9.5 Beispiel Wir setzen $a = 5$, $b = 14$, $c = 7$ und $d = 16$ mit $g = 9$. Es ist $\mathcal{M}(5,9) = \mathcal{M}(14,9) = 5$ und $\mathcal{M}(7,9) = \mathcal{M}(16,9) = 7$. Nun prüfen wir $\mathcal{M}(12,9) = \mathcal{M}(30,9) = 3$, stimmt. Und $\mathcal{M}(-2,9) = \mathcal{M}(-2,9) = 7$, stimmt auch. ◁

Satz 9.6. Modulare Multiplikation Es gilt

$$\mathcal{M}(a \cdot b, g) = \mathcal{M}\big(\mathcal{M}(a,g) \cdot \mathcal{M}(b,g), g\big)$$

Wir überprüfen mit $a = 12$, $b = 9$ und $c = 5$: $\mathcal{M}(12,5) = 2$, $\mathcal{M}(9,5) = 4$ und $\mathcal{M}(108,5) = 3$. Es ist $\mathcal{M}(12,5) \cdot \mathcal{M}(9,5) = 2 \cdot 4 = 8$ und $\mathcal{M}(8,5) = 3$. Das Resultat stimmt.

Satz 9.7. Modulare Potenzen Es gilt

$$\mathcal{M}(a^b, g) = \mathcal{M}\big(\mathcal{M}(a,g)^b, g\big)$$

9.8 Beispiel Für $\mathcal{M}(13^3,5) = \mathcal{M}(2197,5) = 2$ und $\mathcal{M}(13,5) = 3$ sowie $\mathcal{M}(3^3,5) = \mathcal{M}(27,5) = 2$. Hier stimmt die Rechnung. ◁

Der Gelehrte Fermat hat folgenden Satz über Primzahlen erklärt:

Satz 9.9. Kleiner Fermat (1640) Es gilt für a eine ganze Zahl und p eine Primzahl

$$\mathcal{M}(a^p, p) = a$$

Euler hat diesen Satz erweitert, was wir aber hier nicht darstellen. Überprüfen wir: $\mathcal{M}(3^7,7)$ ist $3^7 = 2187$, $2187 : 3 = 312.43$ und $2187 - 312 \cdot 7 = 3$.

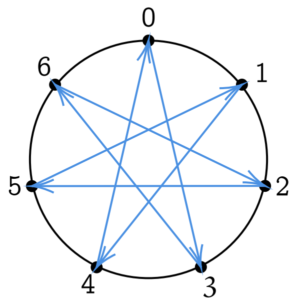
Definition 71. Die *modulare multiplikative Inverse* q von a im Modul g ist definiert durch

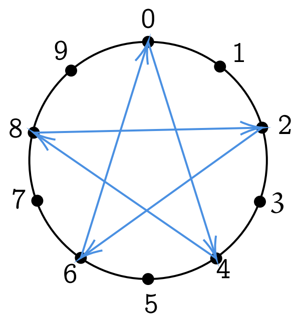
$$\mathcal{M}(q \cdot a, g) = 1.$$

9.10 Beispiel Wir suchen eine Lösung mit Probieren. Für $\mathcal{M}(q \cdot 7, 9) = 1$ folgt die Gleichung $7q = 9k + 1$. Wenn wir die rechte Seite aufzählen für $k = 1, 2, \ldots$ finden wir 10, 19, 28. Halt, 28 ist doch $4 \cdot 7$. Damit wird $7 \cdot 4 = 9 \cdot 3 + 1 = 28$. Somit ist 4 die Inverse von 7 im Modul 9: $\mathcal{M}(7,9)$. ◁

9.11 Beispiel Dasselbe für $\mathcal{M}(q \cdot 3, 9) = 1$. Die Gleichung ist $q \cdot 3 = 9k + 1$. Da 3 und 9 gemeinsame Teiler habe, kann man erkennen, dass man kein passendes q finden wird. ◁

Wir stellen uns 7 und 10 Basketballspieler vor, die im Kreis stehen und sich im ersten Fall dem zweiten Spieler im Uhrzeigersinn, resp. dem vierten, zuspielen. Wie man sieht, wird bei der Konstellation 7 und 2 jeder angespielt, bei 10 und 4 aber jeder zweite für immer ausgeschlossen. Nun sind 7 und 2 teilerfremd, 10 und 4 aber nicht.





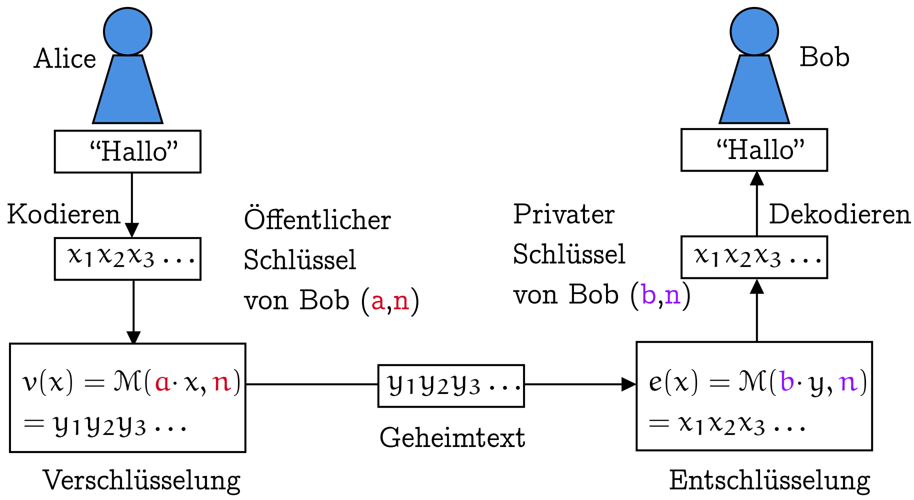
Im rechten Bild kommt man nicht zum Spieler Nummer 1, also hat $\mathcal{M}(10q, 4) \neq 1$ keine Inverse.

Satz 9.12. Sind zwei ganze Zahlen a und g teilerfremd, so existiert eine positive ganze Zahl q mit

$$\mathcal{M}(q \cdot a, g) = 1.$$

Verschlüsselung

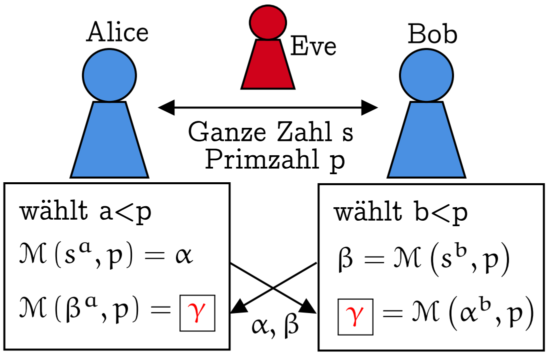
Verschlüsselung und anschliessende Entschlüsselung gehören zusammen. Häufig werden Verfahren verwendet, bei denen die Verschlüsselung (Funktion) sehr einfach ist, die Entschlüsselung (Inverse der Funktion) aber sehr schwierig. Beispielsweise ist die Multiplikation zweier Primzahlen einfach, die Faktorisierung einer Zahl in Primfaktoren aber schwierig. Dies gilt für sehr sehr grosse Zahlen.
Eine einfache Methode ist die Verwendung der Modulofunktion und modularen Inverse. Mit gegebenen Tupel (a, n) wird die jedem Buchstaben zugeordnete Ziffer x verschlüsselt gemäss $y = \mathcal{M}(x \cdot a, n)$ und mit $x = \mathcal{M}(y \cdot b, n)$ entschlüsselt, wobei b die modulare Inverse ist. Die ganzen Zahlen a und n müssen teilerfremd sein.
Wir stellen uns vor, dass jeder Buchstabe mit einer Zahl kodiert wird, also $A \to 0$, $B \to 1$ etc. samt Leerzeichen $<> \to 26$. n muss hier grösser oder gleich der Anzahl Zeichen des verwendeten Vorrats sein.



In der Abbildung ist der ganze Prozess dargestellt. Es muss $\mathcal{M}(ab, g) = 1$ gelten, also b die modulare Inverse von a sein.

Gemeinsames Geheimnis

Wenn zwei Personen A und B verschlüsselt kommunizieren, dann wird meist vorausgesetzt, sie kennen den gemeinsamen Schlüssel. Dabei ist der Austausch des Schlüssels das Problem, weil eben unsicher. Es gibt aber eine Möglichkeit, ein gemeinsames Geheimnis zu erzeugen, ohne dieses ganz auszutauschen. Hierzu nutzt man die obigen Sätze. Die Abbildung zeigt das Schema um den gemeinsamen geheimen Schlüssel γ zu erzeugen. Unter den Augen von Eve werden vier Zahlen zwischen Alice und Bob ausgetauscht, nämlich s, p, α und β. Der Clou ist, dass man aus α und β praktisch das a oder b nicht bestimmen kann.



In der Berechnung von γ steckt modulare Multiplikation und Potenz, denn

$$\gamma = \mathcal{M}(\beta^a, p) = \mathcal{M}(\mathcal{M}(s^b, p)^a, p) = \mathcal{M}(\mathcal{M}(s^a, p)^b, p) = \mathcal{M}(s^{ab}, p)$$

Die ganze Zahl γ wird nun für Ver- und Entschlüsselung verwendet.

Lineare Kongruenz

Definition 72. Eine *lineare Kongruenz* bezeichnet eine Gleichung der Form:

$$\mathcal{M}(ax, g) = b,$$

wobei a, b, x und $g > 0$ ganzen Zahlen sind.

Solche Gleichungen in x sind nur lösbar, wenn der $\text{ggT}(a, g)$ Teiler von b ist. Beispiel $\mathcal{M}(8x, 16) = 4$. Der ggT ist $\text{ggT}(8, 16) = 8$; er teilt 4 nicht. Deshalb gibt es keine Lösung. Anderes Beispiel: $\mathcal{M}(3x, 12) = 3$, $\text{ggT}(3, 12) = 3$, ist Teiler von 3. Somit existieren Lösungen. Für kleine $g < 13$ findet man Lösungen durch Probieren.

9.13 Beispiel Von dieser Aufgabenstellung gibt es viele Varianten. Zehn Piraten finden einen Schatz mit gleichen Münzen, wobei es weniger als 100 sind. Wenn sie sie gleich verteilen würden, blieben 6 übrig für den chinesischen Koch. Sie bekommen Streit, bei dem 3 Piraten über Bord gehen. Jetzt verteilen sie die Münzen unter sich auf und der Koch bekommt nichts. Wieviel Münzen sind es?
Die erste Aussage übersetzt sich zu $\mathcal{M}(N, 10) = 6$ mit N der Anzahl Münzen, 10 Piraten und den 6 für den Koch. Die zweite Gleichung bei nur noch 7 Piraten mit Rest 0 führt zu $N = 7x$. Eingesetzt $\mathcal{M}(7x, 10) = 6$. Nun probieren wir systematisch mit $x = 1, 2, 3, \ldots$. Es folgen die Tupel $(x = 1, R = 7)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(4, 8)$, $(5, 5)$, $(6, 2)$, $(7, 9)$ und $(8, 6)$. Somit ist $x = 8$ eine Lösung, $7 \cdot 8 = 56$. Das ist zudem die einzige Lösung, für die $N < 100$. $\triangleleft$

Wenn man genau hinsieht, dann ist obiges Problem eigentlich ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen.

9.14 Beispiel Aus dem alten China ist folgendes Problem nach Sun Zi bekannt. Ein General hat eine kleine Armee. Wenn er sie in Dreierkolonnen aufstellt, bleiben 2 übrig ($\mathcal{M}(x, 3) = 2$). Wenn er sie zu fünft aufstellt, bleiben 3 ($\mathcal{M}(x, 5) = 3$) und in Siebnerreihe bleiben wieder 2 ($\mathcal{M}(x, 7) = 2$). Die Lösung bringt der sogenannte Chinesische Restsatz. Ohne weitere Angaben ist die kleinste Lösung 23. $\triangleleft$

9.7.6 Anwendungen

Letzte Ziffer

Die letzte Ziffer der g-adischen Darstellung einer natürlichen Zahl a ist der Rest von a bei Division durch g, d.h. $\mathcal{M}(a, g)$. Im dekadischen System (Zehnersystem) ist $g = 10$.

9.15 Übung ** Gesucht ist die letzte Ziffer von 3^{1256}. Nun ist die Faktorzerlegung von $1256 = 8 \cdot 157$. Wir setzen $a = 3^8 = 6561$. Mit der Potenzformel schreiben wir $\mathcal{M}(a^{157}, 10) = \mathcal{M}[\mathcal{M}(a, 10)^{157}, 10] = \mathcal{M}(1^{157}, 10) = 1$. Die letzte Ziffer ist eine 1. ◁

9.16 Übung Neben diesem Verfahren gibt es noch eine zweite Möglichkeit. Als Hilfsmittel schreiben wir eine Tabelle mit allen Endziffern der Potenzen der Zahlen von 2 bis 9. Für die Ziffer 3 folgen die Potenzen $\boxed{3}$, $\boxed{9}$, $2\boxed{7}$, $8\boxed{1}$, $24\boxed{3}$, $72\boxed{9}$ etc. Die Ziffern 3, 9, 7 und 1 kehren zyklisch wieder. Sie werden als 1, 2, 3, 4=0 numeriert.

Ziffer	Endziffern	Anzahl Endziffern
2	(2,4,8,6)	4
3	(3,9,7,1)	4
4	(4,6)	2
5	5	1
6	6	1
7	(7,9,3,1)	4
8	(8,4,2,6)	4
9	(9,1)	2

Nun betrachten wir den Exponenten und berechnen den Rest der Division durch 4, der Anzahl Endziffern, und sehen, dass 1256 restlos teilbar ist, also $\mathcal{M}(1256, 4) = 0$. Dies ist der Index für unsere Menge der Endziffern, also die letzte, d.h. 1. Hätte man nach 3^{1257} gefragt, dann wäre der Rest 1 und damit die Endziffer 3. Für 3^{1258} dann Rest 2 und somit Endziffer 9. (Ohne Tabelle hätte man auch $\mathcal{M}(3^{\mathcal{M}(1256,4)}, 10) = 3^0 = 1$ bestimmen können.) ◁

9.17 Übung Bestimmen wir die letzte Ziffer der riesigen Zahl $123456789^{123456789}$. Dazu brauchen wir nur die letzte Ziffer der Grundzahl zu betrachten, also $9^{123456789}$. Mit der Tabelle sehen wir, dass Potenzen von 9 nur die Endziffern 9 für gerade Exponenten und 1 für ungerade besitzt. Also ist die Endziffer eine 1. ◁

Anzahl Ziffern

Formel 9.18. Anzahl der Ziffern Die Anzahl der Ziffern n der g-adischen Darstellung einer natürlichen Zahl a ist

$$n = \lfloor \log_g(a) \rfloor + 1$$

Dies leuchtet ein, denn die Anzahl Ziffern der g-adischen Zahl a ist der Exponent n von $a = a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_0 g^0$.

Anmerkung 9.19. Das Symbol $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ ist der sogenannte Ganzteil des Quotienten. Z.B. ist der Ganzteil von 12.6 dann 12.

9.20 Beispiel Die Zahl 123^{25} hat im 10-adischen System $n = \lfloor 25 \lg(123) \rfloor + 1$ Ziffern, das sind $n = \lfloor 25 \cdot 2.0899 \rfloor + 1 = \lfloor 52.2 \rfloor + 1 = 53$. Noch ein kontrollierbares Beispiel: die Zahl 123 hat 3 Ziffern. Alternativ $n = \lfloor \lg(123) \rfloor + 1 = \lfloor 2.0899 \rfloor + 1 = 3$. Das stimmt. ◁

Erste Ziffer

Die führenden Ziffern einer Zahl ist im dekadischen System, d.h. $g = 10$, mit dem Logarithmus berechenbar (siehe Basiswechsel mit Formel 9.20 auf Seite 9-17). Die Zahl 3^{1256} kann als g^x gesetzt werden. Damit folgt $1256 \lg(3) = x \lg(10)$ oder $x = 1256 \lg(3) = 599.29$. Damit ist $3^{1256} = 10^{0.29} \cdot 10^{599}$. Nun ist $10^{0.29} = 1.82$. Damit ist die erste Ziffer eine 1.

9.7.7 Reelle Zahlen im Zehnersystem

Reelle Zahlen haben unendlich viele Nachkommastellen. Somit kann man sie nur näherungsweise bestimmen, d.h. mit einer endlichen Anzahl von Stellen. Zahlen haben ganz verschiedene Grössenordnungen, man denke an die Masse des Jupiters und das Gewicht eines Elektrons. Mit einem Stellenwertsystem kann man einfach gedanklich an die Stelle fahren, wo die aussagefähigen Ziffern sind, das heisst an die am weitesten links stehenden Ziffern, die nicht Nullen sind, und sich die Position merken. Dies setzt man mit der wissenschaftlichen Notation um. Denn die Position wird durch den Exponenten der Zehnerpotenz markiert.

Definition 73. Reelle Zahlen werden in *wissenschaftlicher Notation* geschrieben als

$$a = \pm n.a_1 a_2 a_3 \ldots \times 10^k.$$

wobei $0 < n < 10$ und a_i natürliche Zahlen und k eine ganze Zahl sind. Die Zahl $n.a_1 a_2 a_3 \ldots$ nennt man *Mantisse*.

9.21 Beispiel Exempel sind $0.123 \cdot 10^5$, $2.345 \cdot 10^{-14}$ etc. oder physikalische Grössen wie Lichtgeschwindigkeit $2.998 \cdot 10^8 [m/s]$, Ladung eines Elektrons $-1.602176634 \cdot 10^{-19} [C]$. ◁

Anmerkung 9.22. Die sogenannt technische Notation bevorzugt Exponenten der Vielfachheit 3 oder Potenzen von 1000. Also beispielsweise $123.45 \cdot 10^9$ anstatt $1.2345 \cdot 10^{11}$.

Wichtig 14. ☠ Auf Taschenrechnern und in Programmiersprachen wird z.B. `-6.02E-23` angezeigt, wobei "E" für die Basis 10 und der Exponent rechts davon steht. ⊣

9.23 Übung Wir berechnen folgende Zahl

$$\frac{6.626 \times 10^{-34} \cdot 3.14 \times 10^9}{1.78 \times 10^{23}}$$

Es empfiehlt sich, die Mantissen und die Exponenten zu gruppieren. Die Exponenten muss man bei der Multiplikation oder Division ohnehin addieren.

$$\begin{aligned}
\frac{6.626 \times 10^{-34} \cdot 3.14 \times 10^9}{1.78 \times 10^{23}} &= \frac{(6.626)(3.14)}{1.78} \cdot \frac{10^{-34} \cdot 10^9}{10^{23}} \\
&= \frac{20.80564}{1.78} \cdot \frac{10^{-34+9}}{10^{23}} \\
&= 11.685 \cdot \frac{10^{-25}}{10^{23}} \\
&= 11.685 \times 10^{-25-23} \\
&= 11.685 \times 10^{-48}
\end{aligned}$$

In wissenschaftlicher Notation 1.168×10^{-47}. Es stellt sich die Frage, wieviele Nachkommastellen zu verwenden sind. ◁

9.7.8 Rechengenauigkeit

Bei der Rechengenauigkeit, resp. bei der Frage, mit wievielen Ziffern, man rechnen sollte, unterscheiden sich die Operationen erster und zweiter Stufe. Zuerst muss man feststellen, wie die gegebenen Zahlen zustande gekommen sind. Ganze Zahlen, wie die Anzahl Besucher, sind exakt. Bei gemessenen Grössen oder gerundete Zahlen wird die letzte angegebene Ziffer als nicht mehr genau angesehen. Es macht also einen Unterschied, ob man schreibt 20km oder 20.000 km.

Signifikante Ziffern

Die Bestimmung signifikanter, aussagekräftiger Ziffern, ist ein ganzes Regelwerk.

(1) Alle Ziffern zwischen der ersten und der letzten Stelle, die nicht mit null besetzt sind, sind signifikant.

(2) Nullen rechts neben der letzten nicht mit einer Null besetzten Stelle sind signifikant, wenn die Zahl ein Dezimalpunkt aufweist.

9.24 Übung Die Zahl 732 hat 3 signifikante Ziffern, die Zahl 0.0023 hat zwei, die Zahlen 0.2456, 0.2400 und 250.0 vier, 250 hat 2, 0.000230340 hat 6 wie auch 6.30300×10^7. ◁

Multiplikation und Division

Formel 9.25. Bei der Multiplikation soll man so viele Ziffern behalten, wie die Zahl mit der geringeren Anzahl Ziffern besitzt.

9.26 Übung Wir multiplizieren $10.12 \cdot 12.123 \cdot 57.1 = 7005.3$. Da aber der Faktor 57.1 nur drei bedeutende Stellen aufweist, sollte man die wissenschaftliche Darstellung als 7.00×10^3 wählen. ◁

9.27 Übung Im Alten Testament ist von einem runden Behälter die Rede, der 30 Fuss im Umfang und 10 im Durchmesser misst. Die Kreiszahl π ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser, also $\frac{30}{10} = 3$. ◁

Addition und Subtraktion

Formel 9.28. Im Ergebnis nicht mehr Stellen nach dem Dezimalpunkt behalten als jene der gegebenen Zahlen aufweist, welche die kleinste Anzahl Ziffern nach dem Dezimalpunkt hat.

9.29 Übung Wir addieren: $S = 81.352 + 7.32 + 275.4 + 0.0003 = 363.6|723$. Die Ziffern nach dem Strich benutzen wir zum Runden, sodass $S \approx 1363.7$ ist. Der kleinste Summand hat überhaupt keinen Einfluss auf das Resultat. ◁

Wichtig 15. Bei der Multiplikation und Division kommt es auf die Anzahl Stellen an, bei der Addition und Subtraktion auf die Anzahl Stellen *nach dem Dezimalpunkt*. ⊣

Konstanten

Verwendet man in der Operation eine Konstante, z.B. 100 für die Umrechnung von Meter zu Zentimeter, so muss man annehmen, dass die Zahl mit beliebig vielen Stellen bedeutsam sind. Konstanten muss man nicht berücksichtigen bei den Anzahl Stellen des Resultats. Wenn man 100cm in Meter umwandelt, so ist dies 1.00m oder 0.00100 km, aber nicht 1m oder 0.001 km.

9.7.9 Runden von Zahlen

Beim Runden bestimmt man eine Näherung zu einer gegebenen Zahl. Das Runden kann aus praktischen Gründen erfolgen, weil man sich die Rechnung erleichtert oder weil die Genauigkeit es gebietet oder weil nicht alle Werte zugelassen sind. Der letzte Fall tritt beim Kaufmann auf, weil die kleinste Geldeinheit z.B. 5 Rappen oder 0.05 Franken sind.
Beim Runden muss man festlegen, auf wieviele Nachkommastellen (nach dem Dezimalpunkt) gerundet wird. Die darauf folgende Ziffer bestimmt die letzte gerundete Nachkommastelle: Ist erstere 1, 2, 3 oder 4, wird abgerundet, ist sie 5,6,7,8,9, dann wird aufgerundet.
(Beim symmetrischen Runden wir noch der Fall von 5, gefolgt von lauter Nullen, anders behandelt. Es wird immer auf die nächste gerade Zahl gerundet, also $3.3500 \approx 3.4$ und $3.250 \approx 3.2$.)
Man soll erst am Ende der Rechnung runden und nicht laufend. Um runden zu können, sollte man wo möglich mit Zahlen rechnen, die eine Stelle mehr aufweisen als die signifikanten Stellen des Resultats. Z.B. $13 \cdot \pi = 13 \cdot 3.14 = 40.8$ und deshalb 41.

9.7.10 Grössen

Im Alltag kommen Zahlen in Verbindung mit Einheiten vor, also 10 Meter, 20 Franken, 15 Grad Celsius, ein Dutzend Birnen, 5 Liter etc. Viele Einheiten haben eine festgelegtes Symbol, z.B. m für Meter, V für Volt, kg für Kilogramm usw.

Definition 74. Eine *Grösse* soll eine Zahl (Masszahl) mit einer Einheit sein. Grössen sind gleichartig, wenn sie dieselbe Einheit aufweisen.

Anmerkung 9.30. Gleichartige Grössen werden addiert, indem die Masszahlen addiert werden und die Einheit beibehält. Wir schreiben die Masseinheit in eckigen Klammern, um Verwechslungen mit Variablen zu vermeiden. Also $2[m] + 5[m] = 7[m]$. Grössen multiplizieren heisst sowohl die Masszahlen multiplizieren als auch die Einheiten. Also $5[m] \cdot 7[m] = 35[m^2]$. Wir kennen das von der Fläche. Zwei Grössen dividieren heisst sowohl Masszahlen als auch Einheit dividieren, $5[m^2] \div 2[m] = 2.5[m]$.

Anmerkung 9.31. Einheiten können auch zusammengesetzt sein. In der Physik kommt man mit 7 Einheiten aus, aus denen andere abgeleitet werden. Ein Newton [N] ist gleich $1[\frac{kgm}{s^2}]$, oder es gilt $1[J] = 1[Ws] = 1[Nms] = 1[\frac{kgm^2}{s}]$. Aus dem Gesetz $l = v \cdot t$ folgt $[m] = [\frac{m}{s} \cdot s]$.

9.32 Übung In der Physik und Chemie braucht man häufig die Avogadro'sche oder Loschmidt'sche Zahl, sie ist $6.02214076 \cdot 10^{23}$. Sie gibt an, wieviel Teilchen in einem Mol enthalten sind, wobei man die Masse pro Mol tabelliert. Ein Mol Uran 235 wiegt 235.04 g. Wie schwer ist ein Atomteilchen?

$$m_1 = \frac{235.04}{6.02214} \cdot 10^{-23}[g] = 39.029 \cdot 10^{-23}[g]$$

Bei der Spaltung von Uran entsteht ein Massendefekt Δm, d.h. die Masse nach der Spaltung ist geringer als vor der Spaltung. Diese Masse wird zu Energie E gemäss dem Gesetz $E = \Delta m \cdot c^2$ mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \frac{m}{s}$. Der Massendefekt sei anteilsmässig $0.75 \cdot 10^{-3}$ der Ausgangsmasse. Wieviel Energie wird bei der Spaltung eines Urankerns freigesetzt?

$$
\begin{aligned}
E &= 0.75 \cdot 10^{-3} \cdot 39.0 \cdot 10^{-23} \cdot (3.00 \cdot 10^{8})^2 [g \frac{m^2}{s^2}] \\
&= 0.75 \cdot 39.0 \cdot 9.00 \cdot 10^{-3-23+16} [g \frac{m^2}{s^2}] \\
&= 263 \cdot 10^{-10} [g \frac{m^2}{s^2}] \\
&= 2.6 \cdot 10^{-11} [kg \frac{m^2}{s^2}] \\
&= 2.6 \cdot 10^{-11} [J]
\end{aligned}
$$

Der Schweizer Stromverbrauch lag 2020 bei $59.9 \cdot 10^9 kWh$. Wieviel ist das in Joule? Ein Joule ist $W \cdot s$, eine “Wattsekunde”. Somit $[kWh] = [1000W \cdot 3600s] = 3.6 \cdot 10^6 [Ws] = 3.6 \cdot 10^6 [J]$. Der Verbrauch war also $59.9 \cdot 10^9 \cdot 3.6 \cdot 10^6 = 216 \cdot 10^{15} [J]$
Angenommen von der Spaltenergie könne nur 25% in Strom verwandelt werden. Wieviele Atomkerne N müsste man spalten, um die Schweiz ein Jahr lang mit Strom zu versorgen? Und wieviel Kilogramm sind das?

$$
N = \frac{216 \cdot 10^{15} [J]}{0.25 \cdot 2.6 \cdot 10^{-11} [J]} = \frac{216}{0.65} \cdot 10^{26} = 332 \cdot 10^{26}
$$

Die Masse ist Anzahl Teilchen mal Teilchengewicht, also

$$
m = 332 \cdot 10^{26} \cdot 39.03 \cdot 10^{-26} [kg] = 332 \cdot 39.03 [kg] = 13.0 \cdot 10^3 [kg]
$$

◁

Physikalische Grössen**

Gemäss internationalem Standard gibt es sieben Basisgrössen, mit denen sich jede physikalische Grösse einfassen lässt.

Basisgrösse	Grössensymbol	Einheit	Einheitszeichen
Zeit	t	Sekunde	s
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	Iv	Candela	cd

Die Einheit einer physikalischen Grösse ist eine Ausprägung der folgenden Formel:

$$
[Q] = k \cdot s^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot kg^{\gamma} \cdot A^{\delta} \cdot K^{\epsilon} \cdot mol^{\zeta} \cdot cd^{\eta} \tag{9.2}
$$

Es ist k eine dimensionslose Konstante. Eine Formel wie “Arbeit A = Kraft F mal Weg s” wird dann mit “Kraft F = Masse m mal Beschleunigung a” zu, wobei [A] die Einheit der

Grösse A darstellt:

$$[A] = [F] \cdot [s] = [m] \cdot [a] \cdot [s] = [m] \cdot [v] \cdot [t]^{-1} \cdot [s] = [m] \cdot [s] \cdot [t]^{-2} \cdot [s] = kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m$$
$$= \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

mit den Zwischenstationen für die Kraft

$$[F] = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

oder die Beschleunigung

$$[a] = \frac{m}{s^2}.$$

Es gibt sehr viele abgeleitete Grössen mit eigenem Namen, z.B. Newton $N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$, Druck Pascal $Pa = \frac{kg}{m \cdot s^2}$, Volt $V = \frac{kg \cdot m^2}{As^3}$, Ohm $\Omega = \frac{V}{A} = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 s^3}$ usf.
Trotzdem werden immer noch viele nicht Standardmasse verwendet, also Fuss bei der Fliegerei, Pferdestärken bei Motoren, Quecksilbersäule [mm Hg] beim Blutdruckmesser (in Frankreich [cm Hg]) etc. Zudem wird bei der häufig anzutreffenden Einheit kWh die Stunde bemüht, was für das Rechnen sehr lästig ist. Das angloamerikanische Masssystem besitzt nur schon für die Länge viele Masse wie z.B. Mohnsamen, Zoll, Fuss, Schritt, Spanne, Elle, Furchenlänge, Kettenglied, Faden, Kabel, Meile etc. Umrechnungsfehler sind vorprogrammiert. Ein amerikanisches Kuchenrezept ist für einen Europäer ohne Taschenrechner nicht zu backen.
Die Konstante k in der Formel Gl. 9.2 wird auch mit Vorsätzen, vorangestellten Buchstaben für Grössenordnungen, belegt. Diese sind u.a.

Vorsatz	Bedeutung	Zeichen	Faktor
Exa	Trillion	E	10^{18}
Peta	Billiarde	P	10^{15}
Tera	Billion	T	10^{12}
Giga	Milliarde	G	10^{9}
Mega	Million	M	10^{6}
Kilo	Tausend	k	10^{3}
Hekto	Hundert	h	10^{2}
Deka	Zehn	da	10^{1}
Dezi	Zehntel	d	10^{-1}
Zenti	Hundertstel	c	10^{-2}
Milli	Tausendstel	m	10^{-3}
Mikro	Millionstel	μ	10^{-6}
Nano	Milliardstel	n	10^{-9}
Pico	Billionstel	p	10^{-12}
Femto	Billiardstel	f	10^{-15}
Atto	Trillionstel	a	10^{-18}

Somit existiert ein konkurrierendes System, denn man kann Grössenordnungen mit den Zehnerpotenzen plus Vorsätzen darstellen. Das macht nur Sinn, weil einige abgeleitete Einheiten fest eingeprägt sind. Meteorologen bestimmen den Luftdruck immer in hPa, also Hektopascal, was dem älteren Millibar (nicht zu verwechseln mit der Minibar) entspricht.

9.33 Übung Wir stellen 1000[hPa] in [MPa] dar, $5.2 \cdot 10^9 \mu g$ in [kg]. Es ist $1000hPa = 1000 \cdot 100Pa = 100000Pa = 10 \cdot 10^{5-6}MPa = 0.1MPa$.
Anderseits ist $5.2 \cdot 10^9 \mu g = 5.2 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} g = 5.2 \cdot 10^3 g = 5.2kg$. $\triangleleft$

Aufgaben

10.34 Beschreibe die Intervalle
(a) $\{x \mid x \neq \pm 3\}$
(b) $\{x \mid -1 < x \leqslant 3 \text{ oder } x = 5\}$
(c) Mit $A = [-5, 3)$ und $B = (1, \infty)$ bestimme $A \cap B$ und $A \cup B$.

34 **(a)** Man muss die zwei Zahlen 3 und -3 ausschliessen aus der Grundmenge. Die zwei Zahlen teilen die Zahlenstrecke in drei Teile, nämlich $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ und $(3, \infty)$. Damit $\{x \mid x \neq \pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.
(b) Das "oder" impliziert eine Vereinigungsmenge $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
(c) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
(d) $\{x \mid x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

10.35 Vereinfache
(a) $\dfrac{35xy}{20xz}$ **(b)** $\dfrac{2x}{3ed} - \dfrac{x}{3ed}$ **(c)** $a - b - \dfrac{2ab}{a+b}$ **(d)** $\dfrac{7x^2}{3y} + \dfrac{5xy}{2a} - \dfrac{x^3}{ay}$.

35 **(a)** $\dfrac{35\cancel{x}y}{20\cancel{x}z} = \dfrac{7 \cdot \cancel{5}y}{4 \cdot \cancel{5}z} = \dfrac{7y}{4z}$
(b) $\dfrac{2x}{3ed} - \dfrac{x}{3ed} = \dfrac{x}{3ed}$
(c) $a - b - \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{(a-b)(a+b) - 2ab}{a+b} = \dfrac{a^2 - b^2 - 2ab}{a+b}$
(d) Hauptnenner 6ay: $\dfrac{2a \cdot 7x^2}{2a \cdot 3y} + \dfrac{3y \cdot 5xy}{3y \cdot 2a} - \dfrac{6 \cdot x^3}{6 \cdot ay} = \dfrac{14ax^2 + 15xy^2 - 6x^3}{6ay}$

10.36 Entwickle (ausmultiplizieren) folgende Ausdrücke:
(a) $(a^2b)^2$. **(b)** $(-x^3y^2)^3$. **(c)** $(a^9b^2c^4d^2)^4$. **(d)** $(-15c^6dx^2)^2$. **(e)** $(x-y)^2$.
(f) $(x^2y - mn^3)^2$. **(g)** $(1-y^2)^3$. **(h)** $121x^3y^3z \div (-11y^2)z$.

36 **(a)** a^4b^2
(b) $-x^9y^6$
(c) $a^{36}b^8c^{16}d^8$
(d) $225c^{12}d^2x^4$
(e) $x^2 - 2xy + y^2$
(f) $x^4y^2 - 2x^2ymn^3 + m^2n^6$
(g) $(1-y^2)(1-2y^2+y^4) = 1 - 2y^2 + y^4 - y^2 + 2y^4 - y^8 = 1 - 3y^2 + 3y^4 - y^8$
(h) $-\dfrac{121x^3y^3}{11y^2} = -11x^3y$

10.37 Berechne, vereinfache
(a) $\sqrt{16a^2b^6}$.
(b) $\sqrt[5]{243a^5b^{10}}$.
(c) $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}a^5b^{15}}$.
(d) $\sqrt{\frac{1}{9}a^4b^6} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}a^6b^9} - \sqrt[5]{\frac{32}{243}a^{10}b^{15}} + \sqrt[3]{a^6b^9}$.
(e) $\sqrt{144x^4y^4} \div \sqrt[5]{243x^{10}y^5}$.

(f) $-\sqrt{25a^4b^2c^2} \cdot \sqrt[3]{-8a^3b^6c^9}$.

(g) $\sqrt[6]{x^{12}\,(a-b)^6}$.

37 (a) $\sqrt{16a^2b^6} = 4ab^3$

(b) $\sqrt[5]{243a^5b^{10}} = \sqrt[5]{3^5a^5b^5b^2} = 3ab\,\sqrt[5]{b^2}$

(c) 2 Antworten: 1) strikt: ist nicht erlaubt, 2) lasch: wir verstehen $-\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}a^5b^{15}} = -\sqrt[5]{\dfrac{2^5}{3^5}a^5b^{3\cdot 5}} = -\dfrac{2}{3}ab\,\sqrt[5]{b^3}$.

(d) $\underbrace{\sqrt{\frac{1}{9}a^4b^6}}_{\frac{1}{3}a^2b^3} - \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^6b^9}}_{\frac{1}{2}a^2b^3} - \underbrace{\sqrt[5]{\frac{32}{243}a^{10}b^{15}}}_{\frac{2}{3}a^2b^3} + \underbrace{\sqrt[3]{a^6b^9}}_{a^2b^3} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 1\right)a^2b^3 = \frac{1}{6}a^2b^3$

(e) $\sqrt{144x^4y^4} \div \sqrt[5]{243x^{10}y^5} = \dfrac{\sqrt{144x^4y^4}}{\sqrt[5]{243x^{10}y^5}} = \dfrac{12x^2y^2}{3x^2y} = 4y$

(f) Lasche Lösung: $\sqrt{25a^4b^2c^2} \cdot \sqrt[3]{8a^3b^6c^9} = (5a^2bc)\cdot(2ab^2c^3) = 10a^3b^3c^4$

(g) $\sqrt[6]{x^{12}\,(a-b)^6} = x^{12/6}\,(a-b)^{6/6} = x^2(a-b)$

10.38 Schreib als Wurzel oder als Potenz, je nach Ausgangslage

(a) $\sqrt[5]{a^2}$ (b) $\sqrt[7]{x^{22}/y^2}$ (c) $\sqrt{wu^2}$ (d) $a^{\frac{1}{3}}$ (e) $-x^{\frac{2}{9}}$

38 (a) $a^{\frac{2}{5}}$ (b) $x^{22/7}y^{-2/7}$ (c) $w^{1/2}u$ (d) $\sqrt[3]{a}$ (e) $-\sqrt[9]{x^2}$

10.39 Vermischte Aufgaben, berechne

(a) $\dfrac{7a^2b^2c}{18x^2y^2z} \times \dfrac{9xyz^2}{28abc^2}$ (b) $\dfrac{x^4-64x}{3x^2-2x} \times \dfrac{9x^2-4}{x^2-4x}$ (c) $(m + \dfrac{mn}{m-n})(n - \dfrac{mn}{m+n})$

(d) $\dfrac{18a^6b^2c}{35x^3y^3z} \div \dfrac{3a^4b}{5x^2yz}$. (e) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \times \dfrac{x^4-y^4}{(x-y)^3} \div \dfrac{(x+y)^2}{x-y}$. (f) $\left(\dfrac{2x^2}{ab^3}\right)^2$.

(g) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3b^6}{27m^6n^9}}$. (h) $-\sqrt[3]{\dfrac{27x^6(a-b)^9}{64a^6b^{12}}}$. (i) $3ab\left(\dfrac{2x}{ab} + \dfrac{x^2}{2mn} - \dfrac{ax}{3mb}\right)$.

(j) $\left(\dfrac{2y}{c^2} + \dfrac{9}{2d}\right)^2$. (k) Faktorisiere $\dfrac{x^4}{a^2} - \dfrac{b^2}{y^4}$ (l) $\dfrac{y^2}{4} + 2 + \dfrac{4}{y^2}$ (m) $\dfrac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{a-b}$.

(n) $1 - \dfrac{1}{1+\frac{2}{a-2}}$. (o) $\dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{2(1-x)}{x^2-6x+8} - \dfrac{x-1}{x-4}$.

39 (a) $\dfrac{7a^2b^2c}{18x^2y^2z} \times \dfrac{9xyz^2}{28abc^2} = \dfrac{9xyz^2}{18x^2y^2z} \times \dfrac{7a^2b^2c}{28abc^2} = \dfrac{z}{2xy}\dfrac{ab}{4c} = \dfrac{abz}{8cxy}$

(b) $Q = \dfrac{x^4-64x}{3x^2-2x} \times \dfrac{9x^2-4}{x^2-4x} = \dfrac{\cancel{x}(x^3-64)}{\cancel{x}\cancel{(3x-2)}} \times \dfrac{\cancel{(3x-2)}(3x+2)}{x(x-4)} = \dfrac{(x^3-64)(3x+2)}{x(x-4)}$. Nun ist $(x^3-64):(x-4)$ teilbar, d.h. $(x^3-64):(x-4) = x^2+4x+16$, somit $Q = (x^2+4x+16)(3x+2)$.

(c) $(m + \dfrac{mn}{m-n})(n - \dfrac{mn}{m+n}) = \dfrac{m(m-n)+mn}{m-n} \cdot \dfrac{n(m+n)-mn}{m+n} = \dfrac{m^2}{m-n} \cdot \dfrac{n^2}{m+n} = \dfrac{m^2n^2}{m^2-n^2}$

(d) $\dfrac{18a^6b^2c}{35x^3y^3z} \div \dfrac{3a^4b}{5x^2yz} = \dfrac{18a^6b^2c}{35x^3y^3z} \cdot \dfrac{5x^2yz}{3a^4b} = \dfrac{18a^6b^2c \cdot 5x^2yz}{3a^4b \cdot 35x^3y^3z} = \dfrac{6a^2bc}{7xy^2}$.

(e)

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \times \frac{x^4-y^4}{(x-y)^3} \times \frac{x-y}{(x+y)^2}\\
&= \frac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} \times \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x-y^3)} \times \frac{x-y}{(x+y)^2}\\
&= \frac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} \times \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)^3)} \times \frac{x-y}{(x+y)^2}\\
&= \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x^2+y^2}} \times \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x-y)^3)}} \times \frac{\cancel{x-y}}{(x+y)^2}\\
&= \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

(f) $\left(\frac{2x^2}{ab^3}\right)^2 = \frac{4x^4}{a^2b^6}$

(g) $\sqrt[3]{\frac{2^3a^3b^6}{3^3m^6n^9}} = \frac{2ab^2}{3m^2n^3}$

(h) $-\sqrt[3]{\frac{3^3x^6(a-b)^9}{4^3a^6b^{12}}} = -\frac{3x^2(a-b)^3}{4a^2b^4}$

(i) Hauptnenner: $6abmn$ erweitern $3ab\left(\frac{6mn\cdot 2x}{6mn\cdot ab} + \frac{3ab\cdot x^2}{3ab\cdot 2mn} - \frac{2an\cdot ax}{2an\cdot 3mb}\right) = \frac{3ab}{6abmn}[12mnx+ 3abx^2 - 2a^2nx] = \frac{1}{2mn}[x(12mn+3abx-2a^2n)] = \frac{x}{2mn}[12mn+3abx-2a^2n]$

(j) $\left(\frac{2y}{c^2}+\frac{9}{2d}\right)^2 = \left(\frac{2d\cdot 2y}{2d\cdot c^2}+\frac{9\cdot c^2}{2d\cdot c^2}\right)^2 = \left(\frac{4dy+9c^2}{2dc^2}\right)^2 = \frac{16d^2y^2+72dyc^2+49c^4}{4d^2c^4}$

(k) $\frac{x^4}{a^2}-\frac{b^2}{y^4} = \left(\frac{x^2}{a}-\frac{b}{y^2}\right)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{b}{y^2}\right) = \left(\frac{x^2y^2}{ay^2}-\frac{ab}{ay^2}\right)\left(\frac{x^2y^2}{ay^2}+\frac{ab}{ay^2}\right) = \frac{1}{a^2y^4}(x^2y^2-ab)(x^2y^2+ab)$

(l) Hauptnenner $4y^2$: $\frac{y^4}{4y^2}+\frac{8y^2}{4y^2}+\frac{16}{4y^2} = \frac{y^4+8y^2+16}{4y^2} = \frac{(y^2+4)^2}{4y^2}$

(m) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{a-b} = \frac{\frac{a^2}{ab}-\frac{b^2}{ab}}{a-b} = \frac{1}{ab}\frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{1}{ab}\frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = \frac{a+b}{ab}$

(n) $1-\frac{1}{1+\frac{2}{a-2}} = 1-\frac{1}{1+\frac{2}{a-2}}\cdot\frac{a-2}{a-2} = 1-\frac{a-2}{a-2+2} = 1-\frac{a-2}{a} = \frac{a-(a-2)}{a} = \frac{2}{a}$

(o)

$$\begin{aligned}
&\frac{x-3}{x-2}+\frac{2(1-x)}{x^2-6x+8}-\frac{x-1}{x-4}\\
&=\frac{x-3}{x-2}+\frac{2(1-x)}{(x-2)(x-4)}-\frac{x-1}{x-4}\\
&=\frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-4)}+\frac{2(1-x)}{(x-2)(x-4)}-\frac{(x-1)((x-2)}{(x-4)(x-2)}\\
&=\frac{x^2-7x+12}{(x-2)(x-4)}+\frac{2-2x}{(x-2)(x-4)}-\frac{x^2-3x+2}{(x-4)(x-2)}\\
&=\frac{x^2-7x+12+2-2x-x^2+3x-2}{(x-4)(x-2)}\\
&=\frac{-6x+12}{(x-4)(x-2)}=\frac{-6(x-2)}{(x-4)(x-2)}\\
&=\frac{-6}{x-4}=\frac{6}{4-x}
\end{aligned}$$

10.40 Rechne

(a) $\frac{(4-2)(2\cdot 4)+(4)^2}{(4-2)^2}$ **(b)** $12(-5)(-5+3)^{-4}+6(-5)^2(-4)(-5+3)^{-5}$ **(c)** $\frac{\left(\frac{5\cdot 3^{51}}{4^{36}}\right)}{\left(\frac{5\cdot 3^{49}}{4^{34}}\right)}$

(d) $\frac{2\left(\frac{5}{12}\right)^{-1}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^{-2}}$

40 **(a)** zuerst Klammern rechnen: $\frac{(2)(8)+(16)}{(2)^2} = \frac{32}{4} = 8$

(b) $12(-5)(-5+3)^{-4}+6(-5)^2(-4)(-5+3)^{-5} = 12(-5)(-2)^{-4}+6(-5)^2(-4)(-2)^{-5} = \frac{-60}{16} + \frac{-600}{-32} = \frac{-120+600}{32} = \frac{480}{32} = \frac{120}{8} = 15.$

(c) Mit Kehrbruch multiplizieren $\left(\frac{5\cdot 3^{51}}{4^{36}}\right)\cdot\left(\frac{4^{34}}{5\cdot 3^{49}}\right) = \frac{5\cdot 3^2}{4^2\cdot 5} = \frac{9}{16}$

(d) $\dfrac{2\left(\frac{12}{5}\right)}{1-\left(\frac{12}{5}\right)^2} = \dfrac{\frac{24}{5}}{\frac{25}{25}-\frac{144}{25}} = -\dfrac{\frac{24}{5}}{\frac{119}{25}} = -\dfrac{\frac{24}{5}}{\frac{119}{25}}\dfrac{25}{25} = -\dfrac{120}{119}$

10.41 Berechne

(a) $\log_3(81)$ **(b)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ **(c)** $\log_{\sqrt{5}}(25)$ **(d)** $\ln\left(\sqrt[3]{e^2}\right)$ **(e)** $\lg(0.001)$ **(f)** $2^{\log_2(8)}$
(g) $117^{-\log_{117}(6)}$ **(h)** $\log_2\left(3^{-\log_3(2)}\right)$

41 **(a)** $\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4\log_3(3) = 4\cdot 1 = 4$

(b) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2(2^{-3}) = -3\cdot 1 = -3$

(c) $\log_{\sqrt{5}}(25) = \log_{\sqrt{5}}(5\cdot 5) = \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5}^4) = 4\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5}) = 4$

(d) $\ln\left(\sqrt[3]{e^2}\right) = \ln\left(e^{2/3}\right) = \frac{2}{3}\ln(e) = \frac{2}{3}$

(e) $\lg(0.001) = \lg(10^{-3}) = -3\lg(10) = -3$

(f) $2^{\log_2(8)} = \exp_2(\log_2(8)) = 8$

(g) $117^{-\log_{117}(6)} = \exp_{117}(-\log_{117}(6)) = \exp_{117}(\log_{117}(6^{-1})) = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

(h) $\log_2\left(3^{-\log_3(2)}\right) = \log_2\left((3^{\log_3(2)})^{-1}\right) = \log_2\left(2^{-1}\right) = -1$

10.42 Wechsle die Basis

(a) 3^2 zu 10 **(b)** 2^x zu e **(c)** $\log_4(5)$ zu e **(d)** $\ln(x)$ zu 10 **(e)** $3^{35} = 10^x$

42 **(a)** $a^x = b^{x\log_b(a)}$, damit $x\log_b(a)$, konkret $2\log_{10}(3) = 0.954$

(b) $2^x = e^y$, $x\ln(2) = y$ oder $2^x = e^{x\ln(2)}$.

(c) $\log_4(5) = \frac{\ln(5)}{\ln(4)}$ und $\ln(5) = \log_4(5)\ln(4)$

(d) $\ln(x) = \lg(x)/\lg(e)$ und $\lg(x) = \ln(x)\lg(e)$

(e) $35\lg(3) = x = 16.7$

10.43 Entwickle die Logarithmen

(a) $\ln(x^3y^2)$ **(b)** $\log_2\left(\frac{128}{x^2+4}\right)$ **(c)** $\log(1.23\times 10^{37})$ **(d)** $\ln\left(\frac{\sqrt{z}}{xy}\right)$
(e) $\log_{\frac{1}{3}}(9x(y^3-8))$ **(f)** $\log_3\left(\frac{x^2}{81y^4}\right)$ **(g)** $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{xy}{ez}}\right)$ **(h)** $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{10\sqrt{yz}}\right)$

43 **(a)** $3\ln(x) + 2\ln(y)$

(b) $\log_2\left(\frac{2^7}{x^2+4}\right) = 7 - \log_2(x^2+4)$

(c) $\log(1.23) + 37$

(d) $\frac{1}{2}\ln(z) - \ln(x) - \ln(y)$

(e) $-2 + \log_{\frac{1}{3}}(x) + \log_{\frac{1}{3}}(y-2) + \log_{\frac{1}{3}}(y^2+2y+4)$

(f) $2\log_3(x) - 4 - 4\log_3(y)$

(g) $\frac{1}{4}\ln(x) + \frac{1}{4}\ln(y) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln(z)$

(h) $\frac{1}{3}\ln(x) - \ln(10) - \frac{1}{2}\ln(y) - \frac{1}{2}\ln(z)$

10.44 Fasse zu einem Argument zusammen

(a) $4\ln(x)+2\ln(y)$ **(b)** $\frac{1}{2}\log_3(x)-2\log_3(y)-\log_3(z)$ **(c)** $-\frac{1}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\ln(y)+\frac{1}{3}\ln(z)$
(d) $\log_7(x)+\log_7(x-3)-2$ **(e)** $\log_2(x)+\log_4(x-1)$

44 **(a)** $\ln(x^4y^2)$

(b) $\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2z}\right)$

(c) $\ln\left(\sqrt[3]{\frac{z}{xy}}\right)$

(d) $\log_7\left(\frac{x(x-3)}{49}\right)$

(e) $\log_2(x)+\log_4(x-1)=\log_2(x)+\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(4)}=\log_2(x)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)=\log_2\left(x\sqrt{x-1}\right)$

10.45 Berechne zwischen 60er- und 10er-System: Die Koordinaten vom Grossmünster in Zürich (47.3698191, 8.5436416) in Grade, Minuten und Sekunden.

45 47°, Minuten $0.3698191\cdot 60=22.$, $(0.3698191-22/60)\cdot 3600=11.35$, also $47^\circ 22' 11.35''$. 8°, $0.5436416\cdot 60=32..$, $(0.5436416-32/60)\cdot 3600=37.11$, also $8^\circ 32' 37.11''$

10.46 Transformiere die g-adischen Zahlen durch fortlaufende Division: 167_{10} ins 2-adische System, und 343_{10} ins 3-adische System

46

$$
\begin{aligned}
167:2&=83, R=\boxed{1}\\
83:2&=41, R=\boxed{1}\\
41:2&=20, R=\boxed{1}\\
20:2&=10, R=\boxed{0}\\
10:2&=5, R=\boxed{0}\\
5:2&=2, R=\boxed{1}\\
2:2&=1, R=\boxed{0}\\
1:2&=0, R=\boxed{1}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
343:3&=114, R=\boxed{1}\\
114:3&=38, R=\boxed{0}\\
38:3&=12, R=\boxed{2}\\
12:3&=4, R=\boxed{0}\\
4:3&=1, R=\boxed{1}\\
1:3&=0, R=\boxed{1}
\end{aligned}
$$

10100111_2 und 110201_3.

10.47 Letzte Ziffer, Anzahl Ziffern, 3 erste Ziffern
(a) 1234^{2021} **(b)** 4312^{9999} **(c)** 1818^{1298}

47 **(a)** Letzte Ziffer der Basis ist 4, Potenzen von 4 haben 2 verschiedene Endziffern, d.h. 4 und 6. Exponent ungerade, also Rest 1, also letzte Ziffer 4. Anzahl Stellen $n=\lfloor 2021\lg(1234)\rfloor+1=6247+1=6248$. Erste Ziffern $Z=1234^{2021}=10^x$, daraus $2021\lg(1234)=x=6247.548$, somit $Z=10^{0.548}\cdot 10^{6247}$, $10^{0.548}=3.53$.

(b) 2 hat 4 Endziffern $(2,4,8,6)$, Exponent $9999:4$ hat Rest 3, also dritte Endziffer 8. $n=\lfloor 9999\lg(4312)\rfloor+1=36343+1=36344$. $9999\lg(4312)-36343=0.1528$, $10^{0.1528}=1.42$.

(c) 8 hat 4 Endziffern $(8,4,2,6)$. $1298:4=324.5$, Rest $2=0.5\cdot 4$, also Endziffer 4. $n=\lfloor 1298\lg(1818)\rfloor+1=\lfloor 4240.9529\rfloor+1=4241$. $10^{0.9529}=8.97$

10.48 Bestimme die signifikanten Stellen und stelle das Resultat entsprechend dar
(a) $123.3\cdot 15.00$ **(b)** $0.00600\cdot 1234.$ **(c)** $1200\cdot 0.111$ **(d)** $1.25+10.0$
(e) $1999+0.05$

48 **(a)** 4 und 4 signifikante Stellen, 1850

(b) 3 und 4 Stellen, 740

(c) 2 und 3 Stellen, $13\cdot 10^1$

(d) 3 und 3, 2 und 1 nach Dezimalpunkt, 11.3

(e) 4 und 1, 0 und 2 nach Dezimalpunkt, 1999

10.49 Runde

(a) 3.4567 auf 2 Stellen **(b)** 99.99951 auf 3 Stellen **(c)** 5.6198 auf Tausendstel

49 **(a)** 3.45|67 wird 3.46
(b) 99.999|51 wird 100.000
(c) 5.619|8 wird 5.620

10.50 Die Sonne strahlt im Durchschnitt ungefähr $1.4[kW/m^2]$ auf die Erde, je nach Jahreszeit etwas unterschiedlich. Das ist Leistung pro Quadratmeter. Rund 30% werden reflektiert. Die Halbe Erde werde beschienen, eine Scheibe mit Radius 6370 km. Wieviel Leistung trifft die Erde? Wieviel Energie in einem Jahr? (Energie = Leistung mal Zeit). Die Schweiz verbraucht rund $220 \cdot 10^{15}[J]$. Wieviel mal mehr sendet die Sonne?

50 Die bestrahlte Querschnittsfläche ist $\pi r^2 = 3.141 \cdot 6370^2 \cdot 10^6[m^2] = 127.5 \cdot 10^6 \cdot 10^6[m^2] = 127.5 \cdot 10^{12} = 1.27 \cdot 10^{14}$. Totale Leistung P:

$$P = 1.4 \cdot 1.28 \cdot 10^3 \cdot 10^{14}[W] = 1.8 \cdot 10^{17}[W]$$

Ein Jahr hat 365.25 Tage zu 24 Stunden zu 3600 Sekunden. Damit ist die Energiemenge

$$E = 1.8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 10^{17}[Ws] = 5.7 \cdot 10^7 \cdot 10^{17}[Ws] = 5.7 \cdot 10^{24}[J]$$

Das Vielfache ist

$$M = 5.7 \cdot 10^{24} : 2.2 \cdot 10^{17} = 2.6 \cdot 10^{24-17} = 2.6 \cdot 10^7 \approx 26\text{Mio.}$$

Index

$\in$, 7-1
$\notin$, 7-1

abzählbar, 9-0
Additionssystem, 9-19
Additionssysteme, 9-19
All-Aussage, 7-18
Aussageform, 7-18

Basiswechsel, 9-17
Binom
  Teilbarkeit, 9-8
Binomische Formeln, 9-7
Binärsystem, 9-22

chinesischer Restsatz, 9-28

Definition
  Abbildung, 7-11
  Aequivalenz, 7-15
  Aequivalenzrelation, 7-10
  Allquantor, 7-18
  Aussage, 7-13
  Basis, 9-6
  Beweis, 7-21
  bijektiv, 7-12
  Definitionsbereich, 7-11
  dekadische Logarithmus, 9-15
  Differenz, 8-11
  Differenzmenge, 7-4
  disjunkt, 7-3
  Dividend, 8-18
  Divisor, 8-18
  eineindeutig, 7-12
  Elemente, 7-0
  elementfremd, 7-3
  Entweder-Oder-Verknüpfung, 7-14
  Exponent, 9-6
  Exponentialfunktion, 9-13
  Folgebeziehung, 7-19
  Funktion, 7-11
  Ganzen Zahlen, 8-1
  ganzzahliger Quotient, 8-19
  gleich, 7-1
  gleichmächtig, 7-8
  Gleichnamig machen, 8-22
  Grösse, 9-32
  Hauptnenner, 8-22
  Implikation, 7-19
  injektiv, 7-12
  Intervall, 9-3
  Inverse, 7-12
  irrationale Zahl, 9-2
  kleinste gemeinsame Vielfache, 8-7
  Komplement, 7-4
  kongruent, 9-25
  Kontraposition, 7-19
  leere Menge, 7-2
  lineare Kongruenz, 9-28
  Logarithmusfunktion, 9-14
  Mantisse, 9-30
  Massstab, 8-29
  Menge, 7-0
  modulare multiplikative Inverse, 9-26
  Mächtigkeit, 7-9
  natürliche Logarithmus, 9-15
  Natürlichen Zahlen, 8-0
  Negation, 7-13
  Nenner, 8-20
  Oder-Verknüpfung, 7-14
  paarweise disjunkt, 7-3
  Pfeil-Verknüpfung, 7-15
  Plusminuszeichen, 8-1
  Potenz, 9-6
  Potenzmenge, 7-6
  Potenzwert, 9-6
  Primzahl, 8-2
  Produkt, 8-13
  Promill, 8-26
  Proportion, 8-28

Prozent, 8-26
Quotient, 8-18
Radikand, 9-10
rationale Zahl, 9-0
reelle Zahl, 9-2
reflexiv, 7-10
Restmenge, 7-4
Satz, 7-19
Schnittmenge, 7-2
Summe, 8-10
surjektiv, 7-12
symmetrisch, 7-10
Teiler, 8-4
Term, 8-10
transitiv, 7-10
Umkehrfunktion, 7-12
Und-Verknüpfung, 7-14
Variable, 8-10
Vereinigungsmenge, 7-3
Verneinung, 7-13
Vielfaches, 8-4
Wahrheitswerte, 7-13
Wertebereich, 7-11
Wertetabelle, 7-12
wissenschaftlicher Notation, 9-30
Wurzel, 9-10
Zähler, 8-20
Dezimalbruch
gemischtperiodisch, 9-5
reinperiodisch, 9-5
Distributivgesetz, 8-16
Division
schriftlich, 9-4

Exponentialfunktion, 9-12

g-adische Zahlen, 9-21
Ganzteil, 9-25
Gauss-Klammer, 9-25
Grösse, 9-32

Halbaddierer, 9-24
Hilberts Hotel, 9-1

Implikation, 7-15, 7-21
Intervall, 9-3

Kapazitätsprobleme, 8-30

Kongruenz
lineare, 9-28

Logarithmus, 9-14
dekadischer, 9-15
natürlicher, 9-15

Methode von Euklid, 8-5
Modul, 9-25

Operationen dritter Stufe, 9-6
Operationen vierter Stufe, 9-12
Operationsreihenfolge, 9-17

Pascal'sches Dreieck, 9-9
Positionssysteme, 9-20
Potenzieren, 9-6
Potenzregel, 9-6, 9-11, 9-13, 9-15
Produktregel, 9-6, 9-11, 9-13, 9-15
Prozent, 8-20

Quersumme, 8-9
Quotientenregel, 9-6, 9-11, 9-13, 9-15

Rechengenauigkeit, 9-31
Relation, 8-4
Restklasse, 9-25
Runden von Zahlen, 9-32

Satz
Eineindeutigkeit, 9-15
Fundamentalsatz der Arithmetik, 8-2
Kleiner Fermat, 9-26
Lemma von Bézout, 8-6
Modulare Multiplikation, 9-26
Modulare Potenzen, 9-26
Ordnungsrelation, 9-2
Signifikante Ziffern, 9-31

Teilbarkeit, 9-8

Umkehroperation, 8-9

Verschlüsselung, 9-27
Volladdierer, 9-24
Vorsätze, 9-34
Vorzeichenregel, 8-14

Wurzeln, 9-10

Zahl

g-adisch, 9-21
Zahleigenschaft, 7-9
Zahlendarstellung, 9-18