Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Teil I
Geometrie

25. Januar 2023

Vorrede zur Sammlung

Dies ist ein Mathematikbuch, das den Stoff für eine eidgenössische Mathematik-Matura gemäss Richtlinie des Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation umfasst. Es geht vom sogenannten normalen Niveau aus und kennzeichnet den Stoff für das erweiterte Niveau.

Es ist im Stil der "Selbststudium"-Bücher verfasst und auf Effizienz angelegt, d.h. der oder die Studierende soll nicht selber die Mathematik neu "erfinden". Die Didaktik ist äusserst einfach: Theorie erklären, Übungen erläutern, Aufgaben stellen (und Lösungen mitgeben), analog der künstliche Intelligenz von modellieren, trainieren, testen. Das Buch enthält Lösungen zu alten offiziellen Prüfungsaufgaben. Es ist vom Ende her gedacht: was muss man wissen, um die Matura bestehen zu können. Deshalb unterscheidet es sich von den Lehrwerken für die Gymnasien und Mittelschulen in der Gewichtung der Themen.

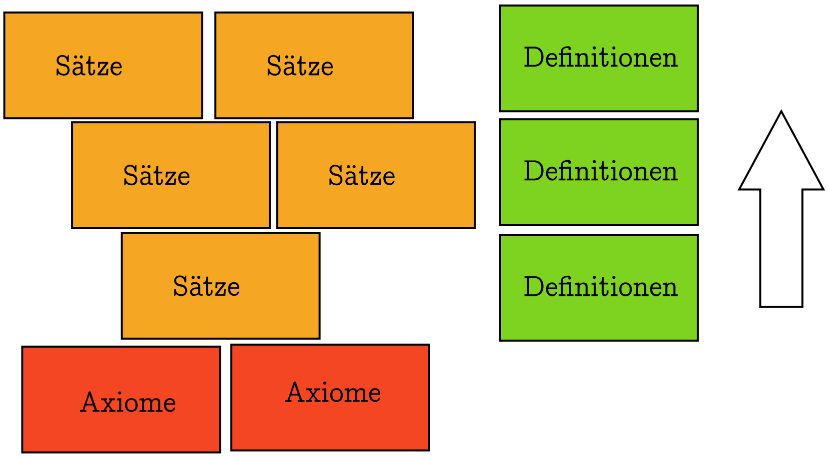
Das Buch ist keine Aufgabensammlung. Es wird impliziert, dass man alle Aufgaben löst.

Das Buch eignet sich auch als Vorbereitung für das Studium als Repetitorium oder als Vorbereitung für universitäre Aufnahmeprüfungen, z.B. ETHZ oder Uni Zürich.

Hier vorliegend ist ein erster Entwurf. Mit Schreibfehlern ist zu rechnen. Sie haben die Möglichkeit, das Werk besser zu machen, indem sie Kommentare abgeben.

Wie ist das Buch gegliedert? Es folgt der klassischen Aufteilung in elementare Geometrie, Mengenlehre und Arithmetik, sodann Algebra und Analysis. Am Schluss dann Stochastik und Statistik. Bis auf die Mengenlehre ist dieser Aufbau auch in groben Zügen der historische.

Die Mathematik kann man sich als universelle Sprache vorstellen. Elemente sind vor allem drei: 1) Axiome oder Forderungen, 2) Sätze oder Folgerungen und 3) Definitionen. *Definitionen* liefern das Vokabular, geben bestimmten Verhalten oder Phänomenen einen Namen. Sie stehen im Zusammenhang mit der Theorie, sind aber vor allem der Vereinfachung und der Präzisierung dienlich. Man muss sie kennen. *Sätze* oder Theoreme bauen auf anderen Sätzen oder Axiomen auf. Sie sind Schlussfolgerungen, die durch Beweise von Behauptungen entstehen. Dabei werden die Forderungen auf schon bewiesen Sätze oder Axiome zurückgeführt. Wir werden solche Beweise herleiten oder plausibilisieren. *Axiome* sind die grundlegenden Forderungen, die sofort einsichtig sein sollen aber nicht bewiesen werden können. Durch zwei Punkte geht eine Gerade, ist ein Beispiel. Somit entsteht ein Aufbau wie in der Abbildung.



In diesem Werk werden wir Sätze und Definition farblich stark hervorheben. Sätze sind orange eingefärbt, Definitionen grün.
Die Frage, ob die Mathematik erfunden oder entdeckt wird, gibt es viele Meinungen. Es ist aber klar, dass Mathematik eine reine Geisteswissenschaft ist und keine Naturwissenschaft. Ein Blick aus dem Fenster in die unbebaute Umgebung lässt keine Zahlen oder ganz wenige regelmässige geometrischen Körper erkennen.
Die Kraft der Mathematik ist die Abstraktion, das Abheben von konkreten Einzelfall zur Verallgemeinerung. Damit lassen sich Modelle, geistige vereinfachte Vorstellungen, bilden für ganz unterschiedliche Lebensbereiche. Mathematik ist auch eine durchgängige Hilfswissenschaft, z.B. für Physik, Chemie, Biologie, Architektur, Verkehr, Bevölkerung, Oekonomie usf. Deshalb lässt sich im Einzelnen die Frage nach der Nützlichkeit von bestimmen Aussagen nicht sogleich beantworten.
Mathematik hat auch einen ästhetischen Aspekt mit dem Spiel der Formen und der Regeln. Es gibt wohl keinen optimalen Zugang zur Mathematik; einjeder muss seinen persönlichen finden. Aber hier gilt mehr denn anderswo: ohne Fleiss kein Preis.
Gute Unterhaltung!

Vorwort

Geometrie heisst wörtlich soviel wie Erdmessung. Auf Deutsch hiesse es früher Raumlehre. Dabei ist der Raum ein Oberbegriff auch für die Ebene, in der die ebene Geometrie, oder vom Lateinischen Planimetrie, angesiedelt ist. Neben der Planimetrie tritt die Stereometrie, die räumliche mit Betrachtungen zu Körpern, Volumen, Oberflächen usw.
Neben dieser elementaren Geometrie wird später als Erweiterung und Ergänzung die Trigonometrie treten, die Lehre von den Winkeln und Kreisfunktionen. Dann wird die Vektorgeometrie folgen, mit der man rechnerisch sehr viele Phänomene abdecken kann. Die letzten beiden Geometrien nennt man je nach Standpunkt auch algebraische Geometrie. Nach diesem Teil wartet also noch einiges auf die Lesenden.
Der Stoffumfang ist eher grosszügig bemessen. Weil aber für die Maturprüfung keine spezifischen Fragen zur elementaren Geometrie gestellt werden, muss man diesen ersten Teil als Vorbereitung und als anschauliche Übung und zur Schulung der Vorstellungskraft zu betrachten. Es geht auch darum, ein gewisses Vokabular zu erlernen.
Viel Erfolg.

Feldmeilen und St.Moritz, 25. Januar 2023 *Claudio Franzetti*

Organisationshilfe

- * (oder blauer Text) bedeutet Stoff für das “erweitertes Niveau” gemäss Reglement
- ** Zusatzstoff für besonders Interessierte

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Geometrie

Kapitel 1

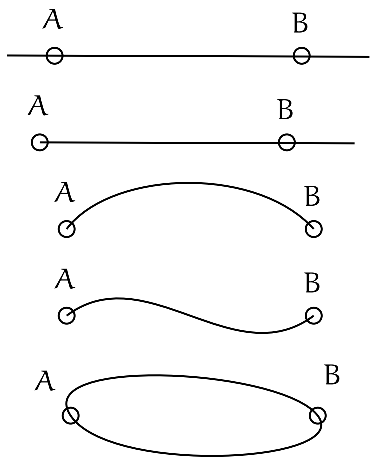
Grundbegriffe

1.1 Grundlagen

Die Geometrie, auf deutsch Raumlehre, befasst sich mit dem dreidimensionalen Raum. Darin sind eindimensionale Gebilde die *Linien*, zweidimensionale *Flächen* und dreidimensionale *Körper*. Körper werden durch Flächen begrenzt, Flächen durch Linien, und Linien bestehen aus Punkten. Punkte sind keine Raumgrössen, weil sie als dimensionslos gedachte werden, also keine Ausdehnung besitzen und somit rein abstrakt sind.

1.1.1 Linien

In der nebenstehenden Abbildung sehen wir ein paar unterschiedliche Linien. Die oberste ist eine Gerade, die sich beidseits ins Unendliche erstreckt. Der Abschnitt von Punkt A zu B heisst *Strecke*. Man bezeichnet sie mit einem Überstrich, $\overline{\mathrm{AB}}$. Beginnt eine Linie, die gerade durch zwei Punkte geht, so heisst sie *Strahl* oder *Halbgerade*. Sodann sehen wir zwei gekrümmte Linien und ein geschlossene Linie.

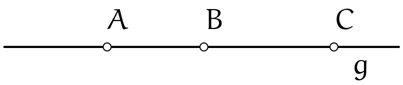


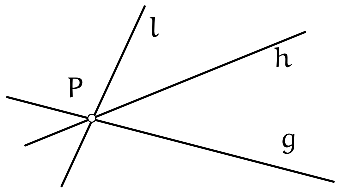
Für Punkte und Linien gelten folgenden, einsichtigen Grundsätze:

Satz 1.1. (1) Durch eine Punkt kann man unendliche viele Geraden legen.
(2) Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig festgelegt.
(3) Durch zwei Punkte kann man unendliche viele Linien legen.
(4) Zwei geraden können sich in höchstens einem Punkt schneiden

Definition 1. Punkte bezeichnet man als *kollinear*, wenn sie auf ein und derselben Geraden liegen. Zwei verschiedene Punkte sind stets kollinear, da sie eindeutig eine Gerade bestimmen.

Definition 2. Als *kopunktal* bezeichnet man zwei oder mehr Geraden, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

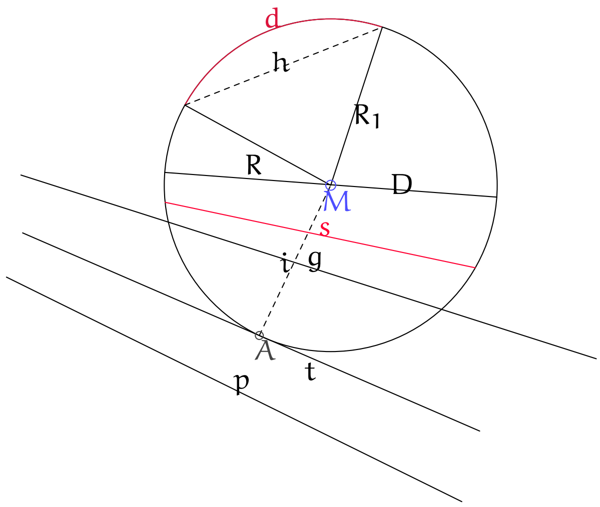




Wenn ein Punkt genau zwischen zwei anderen liegt, dann sind sie kollinear. Bei zwei Geraden sagt man, sie schneiden sich im Punkt P.

Die Abbildung zeigt einen Kreis. Der Kreis entsteht, indem z.B. die Strecke $\overline{MA}$ um den einen Endpunkt M bis zur Rückkehr in die Anfangslage dreht. Der Punkt M wird der Mittelpunkt, die Strecke $\overline{MA}$ *Radius* genannt. Alle Radien eines Kreises sind einander gleich.

Jede Strecke, welche zwei Punkte des Umfangs verbindet, heisst Sehne. Sie zerlegt denselben in zwei Bögen. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so wird sie Durchmesser D genannt. Jeder Durchmesser, teilt den Umfang in zwei Halbkreise. Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.



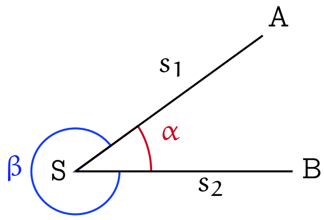
Eine Gerade durch einen Punkt innerhalb des Kreises schneidet den Kreis stets in zwei Punkten. Die Gerade heisst *Sekante*. Geht die Sekante durch das Zentrum, so wird sie zur *Zentrale*. Geraden, die den Kreis nur berühren, heissen *Tangenten*. Eine Passante ist eine Gleichung, die ausserhalb des Kreises liegt.

Ein Punkt liegt entweder auf dem Kreise oder ausserhalb oder innerhalb des Kreises, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkt gleich oder grösser oder kleiner als der Radius ist.

Kreise von gleichen Radien nennt man gleich. Wenn ein Kreis einen anderen schneidet, so erfolgt dies stets in zwei Punkten. Kreise mit demselben Mittelpunkt liegen konzentrisch, mit verschiedenem Mittelpunkt exzentrisch.

1.1.2 Winkel

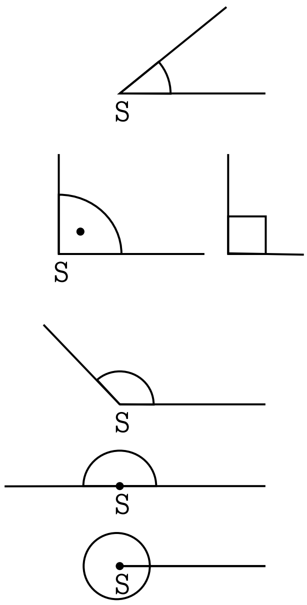
Zwei Strahlen, die von demselben Punkte aus- gehen, bilden einen *Winkel*. Er ist das Mass der Drehung, durch welche der eine Strahl in die Lage des anderen gebracht wird. Die beiden Strahlen werden die *Schenkel*, der Punkt *Spitze* oder *Scheitel* genannt.



Strenggenommen bilden die beiden Strahlen zwei Winkel, nämlich wie in der Abbildung α und β.

Bezeichnet wird der Winkel $\angle ASC$ entweder durch drei große lateinische Buchstaben, von denen derjenige, welcher an mittlerer Stelle genannt wird, am Scheitel, die beiden anderen an beliebigen Punkten der Schenkel stehen oder durch einen kleinen griechischen Buchstaben, der zwischen die Schenkel nahe dem Scheitel gesetzt wird, z. B. α.

Die Grösse des Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig.



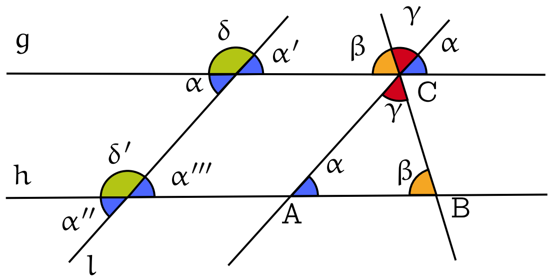
In der Abbildung sehen wir die verschiedenen Typen von Winkeln. Zuoberst der spitze Winkel. Sodann de *rechte Winkel*, dessen eine Schenkel das *Lot* zum anderen bildet. Der rechte Winkel wird speziell durch einen Sektor mit Punkt (oder auch mit einem kleinen Quadrat) gekennzeichnet.
Dreht man weiter auf, so kommt man zum stumpfen Winkel. Weiters gelangt man zum *gestreckten Winkel*. Bei diesem sind die zwei Schenkel parallel und der Winkel ist nur noch durch den Scheitel S erkennbar. Der Gestreckte Winkel entspricht zwei rechten Winkeln.

Zu guter Letzt erreicht man den vollen Winkel, bei welchem die Schenkel übereinander zu liegen kommen.

Definition 3. Der *volle* Winkel besitzt eine Winkelsumme von 360 Grad.Deshalb besitzt der *gestreckte* Winkel 180 Grad und der *rechte* Winkel 90 Grad.

Anmerkung 1.2. Die Gradeinteilung stammt aus Babylonien, wo man das Schziger-System der Zahlen verwendete. Man beachte: 1 Grad besteht aus 60 Winkelminuten “’’, die wiederum aus 60 Winkelsekunden “”” bestehen. Eine Angabe wie 74° 46’ 13” wie die Zeitangaben in Stunden.

In der folgenden Abbildung sehen wir zwei parallel Geraden g und h, die von drei Linien, wobei zwei wiederum parallel sind, geschnitten werden.



Nebenwinkel sind zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, während die beiden anderen Schenkel eine Gerade bilden. In der Abbildung also α und δ oder δ und α'.

Satz 1.3. Die Summe zweier Nebenwinkel ist ein gestreckter Winkel, also 180 Grad.

Scheitelwinkel sind zwei Winkel, wenn die Schenkel des einen die Gegenstrahlen der Schenkel des anderen sind, also $\alpha = \alpha'$. Da gilt: $\delta + \alpha' = 360$ und $\alpha + \delta = 360$ folgt $\alpha = \alpha'$.

Satz 1.4. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Die Winkel α und α'' heissen *Gegenwinkel*. Wenn g und h parallel sind, sind sie gleich. Sind sie gleich, dann sind die Geraden parallel.
Das Winkelpaar α und α''' sind die *Wechselwinkel*.

Satz 1.5. Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei Wechselwinkel einander gleich.

Stufenwikel liegen auf der gleichen Seite der schneidenden Gerade l und auf der gleichen Seite der geschnittenen Parallelen g und h, z.B. α und α''.

Satz 1.6. Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich gross.

Zwei Winkel, deren Summe 90 Grad ausmacht, heissen komplementär, und jeder von ihnen ist das *Komplement* des anderen.
Nach all diesen Definitionen und mit den zwei Sätzen wird auch aus der Abbildung klar, dass die Summe der Winkel im Dreieck 180 Grad ist.

Satz 1.7. Die Summe der Winkel im Dreieck ist stets 180 Grad.

1.1.3 Spezielle Punkte, Örter

Definition 4. Ein *geometrischer Ort* (Plural: geometrische Örter) bezeichnet eine Menge von Punkten, die eine bestimmte, gegebene Eigenschaft haben.

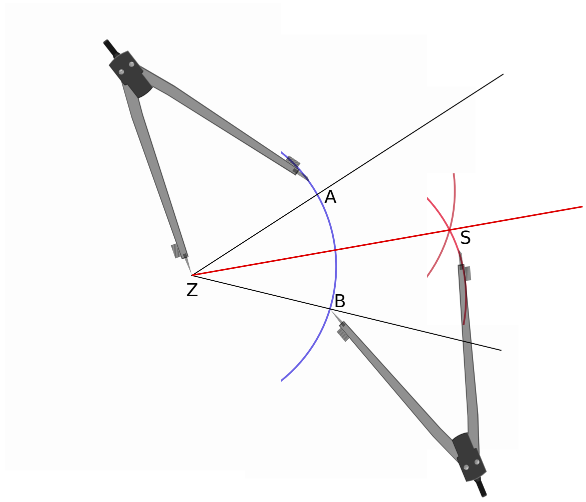
In der ebenen Geometrie ist dies in der Regel eine Kurve, wofür man auch das Wort Ortskurve oder Ortslinie verwendet. Ein Schnittpunkt ist somit ein geometrischer Ort, der z.B. sowohl zur Geraden g als auch zur Geraden h gehörig ist oder zur Geraden g und dem Kreis k.

1.2 Arbeiten mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

Diese drei Werkzeuge sind ausreichend, um die vielen Konstruktionen der ebenen Geometrie zu bewältigen. Da man heute leicht zugängliche Software zur Konstruktion benutzen kann, sind die Grundkonstruktionen eher für das Verständnis als für die Praxis bestimmt.

1.2.1 Winkelhalbierende

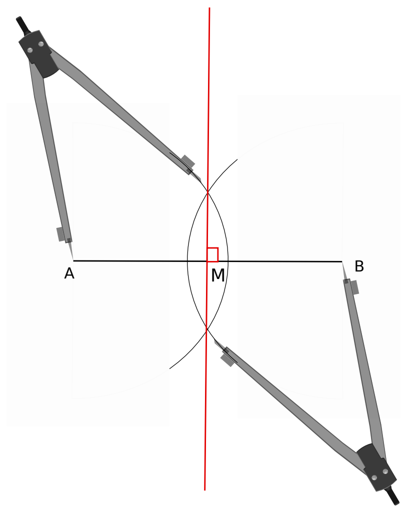
Die Winkelhalbierende wir auch Mediane genannt. Bie zwei sich schneidenden Geraden gibt es zwei Winkelhalbierende, die aufeinander senkrecht stehen.



Winkel lassen sich mit Zirkel und Lineal halbieren (aber nicht dritteln). Ein erster Kreisbogen mit Radius r wird im Scheitel durch die zwei Schenkel geschlagen. Aus jedem der zwei Schnittpunkte wird ein Kreisbogen mit gleichem Radius geschlagen, so dass zwischen den Schenkeln ein Schnittpunkt entsteht. Nun wird dieser mit dem Scheitel verbunden.

1.2.2 Mittelsenkrechte

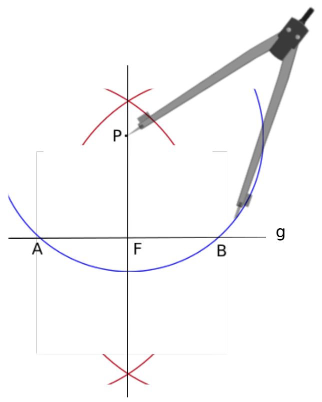
Die Mittelsenkrechte ist diejenige Gerade und damit Menge von Punkten, die von zwei Punkten A und B jeweils denselben Abstand aufweisen. Zur Konstruktion schlägt man mit dem Zirkel zwei gleiche Kreisbögen um die zwei Punkte mit konstanter Einstellung. Dadruch entstehen zwei Schnittpunkte, durch die die Mittelsenkrechte geht.

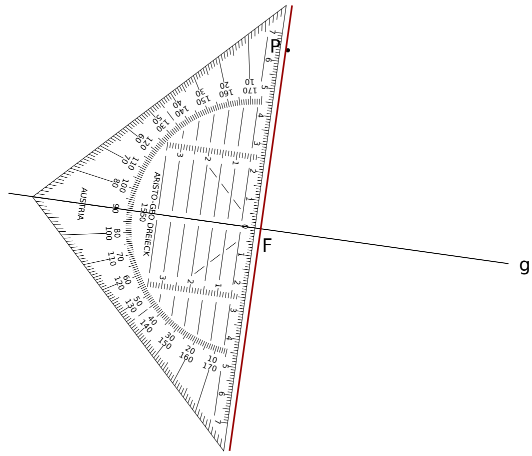


Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ halbiert diese, und steht senkrecht auf ihr. Mit dem Zirkel wird bei gleichem Radius zweimal der Bogen um die Endpunkte zwischen ihnen geschlagen. Sie zwei Schnittpunkte kann man mit dem Lineal verbinden.

1.2.3 Das Lot

Das Lot, oder Senklot, ist eine Maurerwerkzeug, um die Mauern senkrecht zu bauen. Es besteht aus einer Schnur und einem Gewicht, das aufgrund der Schwerkraft zum Erdmittelpunkt zeigt. In der flachen Geometrie fällt man das Lot von einem gegebenen Punkt P auf eine Gerade g.

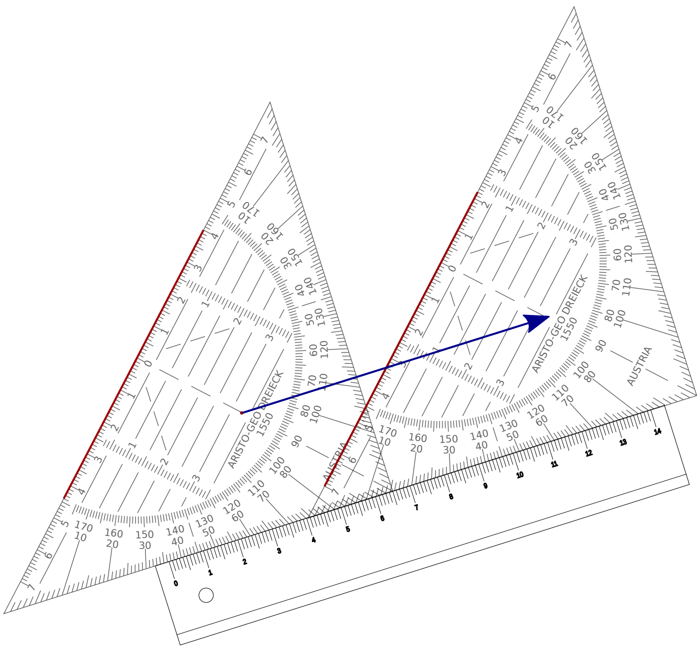




Mit dem Geodreieck ist eine Gerade eingraviert, die senkrecht zur langen Seite des Dreiecks verläuft. Diese richtet man an der Gerade aus und platziert es am Punkt P. Sodann kann man mit dem Stift das Lot als Gerade einzeichnen.
Die etwas aufwendigere Methode verwendet nur den Zirkel und das Lineal. Im Punkt P wird dieser eingesteckt und mit einer Spreizung, die grösser als der Abstand zur Geraden g werden zwei Schnittpunkte A und B konstruiert. Nun bestimmt man die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

1.2.4 Parallelverschiebung

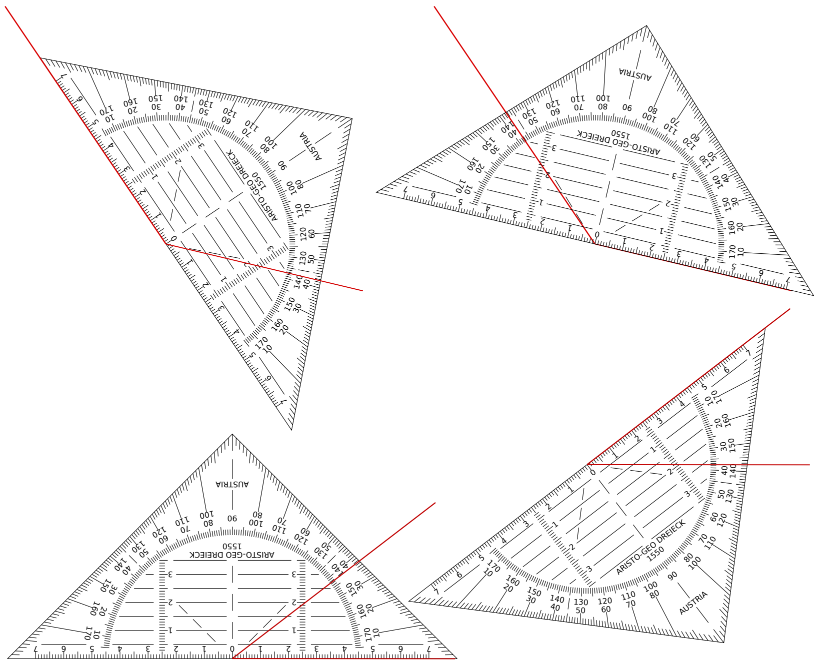
Die Parallelverschiebung einer Strecke benötigt ein Dreieck und ein Lineal. Man legt ein beliebige Seite des Dreiecks an die zu verschiebende Strecke und legt das Lineal in ungefähr der Richtung, nach der man verschieben will. Sieh dir die Abbildung an.

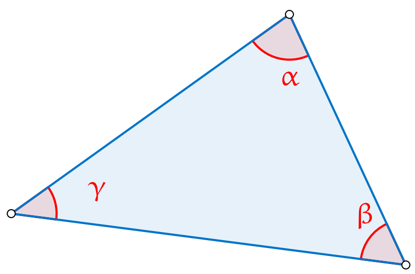


1.2.5 Winkelmessung

Die Winkelmessung benutzt die auf dem Geodreieck eingravierten Skalen. Insgesamt sind vier Skalen vorhanden, nämlich sowohl auf dem inneren Bogen als auch auf den kürzeren Seiten.

Es sind Einteilungen im Uhr- und Gegenuhrzeigersinn vorhanden. Die Messung bedingt, dass man den Nullpunkt auf der langen Seite mit dem Scheitel zur Deckung bringt, wobei das Dreieck über dem Winkel liegen muss. Sodann muss ein Schenkel an der langen Seite des Dreiecks anliegen. Bei Zusammentreffen des anderen Schenkels mit dem Bogen oder der Kante kann der Winkel abgelesen werden.

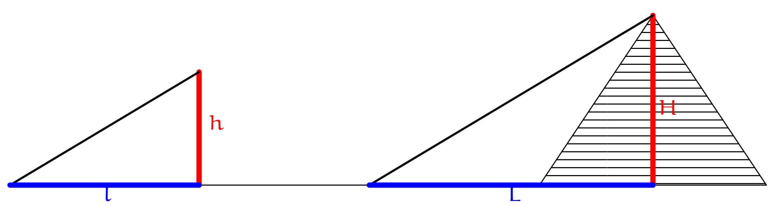




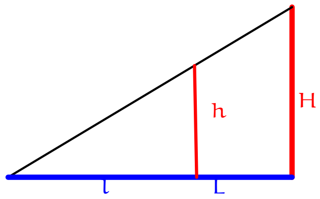
1.1 Übung Man messe die drei Winkel im abgebildeten Dreieck so genau wie möglich. Man kontrolliere, ob die Summe 180° beträgt. Wir haben gemessen $\alpha = 79.2°$, $\beta = 57.7°$ und $\gamma = 43.1°$. Die Summe stimmt. $\lhd$

1.3 Proportionen

Thales von Milet, ein antiker Mathematiker und Geschäftsmann, verblüffte den Pharao, indem er die Höhe der Cheops-Pyramide berechnete. Dazu steckte er eine Stock in den Sand und mass Höhe des Stocks h und Länge des Schattenwurft l. Zudem bestimmte er die Länge des Schattenwurfs der Pyramide L. Er behauptete, die Höhen und Längen würden im selben Verhältnis, der gleichen Proportion, stehen, also H zu L ist wie h zu l. Daraus folgt die unbekannte Höhe H als die Proportion mal die Länge L.



Wenn man die zwei Dreiecke ineinander schiebt, erkennt man, wie ein Zweistrahl von zwei Parallelen geschnitten wird. Die Gesetzmässigkeit ist aber nicht auf rechtwinklige Dreiecke beschränkt. Es gilt die Proportion



$$H : L = h : l \qquad \text{oder} \qquad H : h = L : l$$

Die Höhe der Pyramide H ist somit als

$$H = h\frac{L}{l}$$

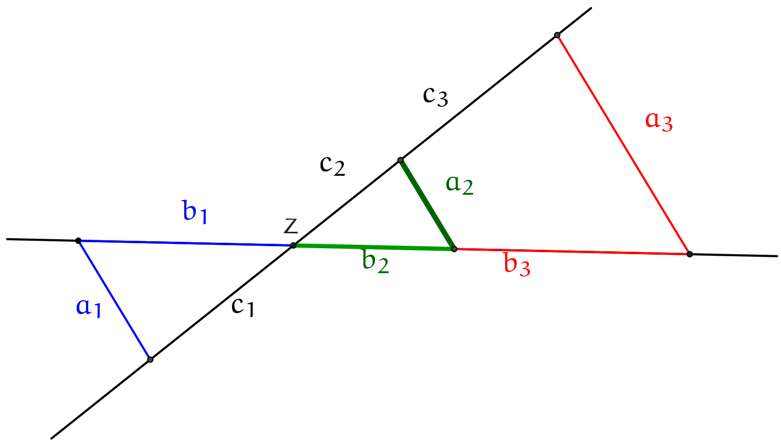
gegeben.

1.3.1 Strahlensätze

Die Strahlensätze sind sehr wichtige Zusammenhänge, die für weiterführende Überlegungen notwendig sind.

Erster Strahlensatz

Zwei sich schneidende Geraden werden von mehreren *parallelen* Geraden geschnitten. Die dadurch entstehenden Strecken weisen regelmässige Verhältnisse auf.



Formel 1.1. 1. Strahlensatz Es ist

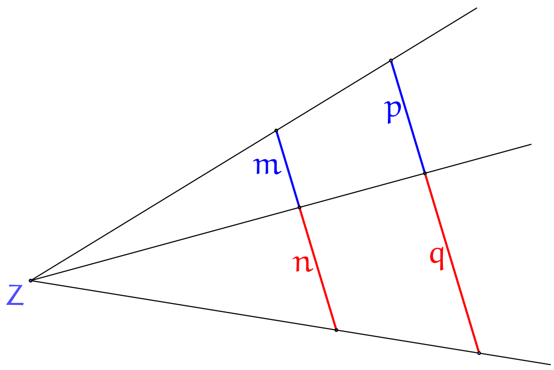
$$a_3 : b_3 = a_2 : b_2 = a_1 : b_1$$

und

$$a_3 : b_c = a_2 : c_2 = a_1 : c_1$$

Zweiter Strahlensatz

Es werden drei kopunktale Geraden mit zwei Parallelen geschnitten.

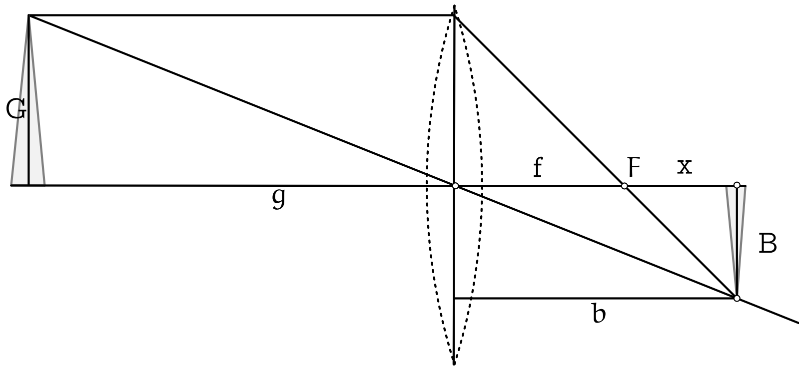


Formel 1.2. 2. Strahlensatz Es gilt

$$m : n = p : q$$

Die Herleitung erfolgt über die Flächenbestimmung des Dreiecks.

1.3 Übung (Gleichungen vorausgesetzt) In der Optik gilt das Linsengesetz, wonach: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$. Man nennt f die Brennweite, b die Bildweite und g die Gegenstandsweite. G ist die Höhe des Gegenstands und B die des Bildes.



Es folgt sofort: $G : B = g : b$. Zudem ist auch $G : B = f : x$. Des weitern gilt $f + x = b$. Daraus folgt $\frac{g}{b} = \frac{f}{b-f}$, ausmultipliziert $gb - gf = fb$. Durch gbf geteilt, folgt:

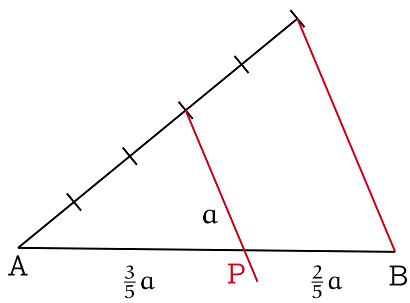
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{b} = \frac{1}{g} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

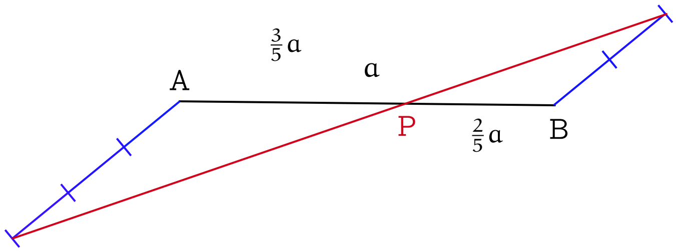
◁

1.3.2 Teilung der Strecke

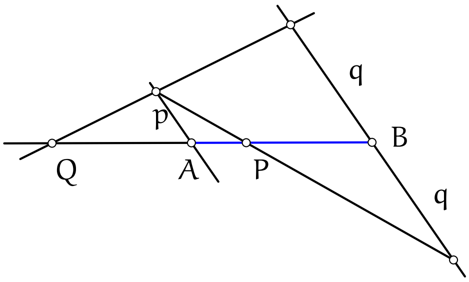
Die Strahlensätze eignen sich umgekehrt, um eine Strecke in bestimmte Teile zu zerlegen.

Eine Strecke $\overline{AB}$ kann mit den Werkzeugen in ganzzahlige Proportionen geteilt werden. Dazu zeichnet man einen Hilfsstrahl und trägt darauf mit dem Zirkel gleichlange Strecke ein. Will man die Strecke im Verhältnis 3 : 2 teilen, trägt man fünf Strecken ab. Dann verbindet man den Endpunkt mit dem PunktB und verschiebt parallel die Gerade durch den Endpunkt der dritten Strecke. Dies Gerade schneidet $\overline{AB}$ in P. Gemäss Strahlensatz ist $\overline{AP} : \overline{AP} = 3 : 5$.





Man kann eine Strecke auch mithilfe des zweiten Strahlensatzes teilen. Dazu zeichnet man an den Enden A und B der im Verhältnis 3 : 2 zu teilenden Strecke parallele Geraden ein. Dann trägt man zum einen 3 und zum anderen 2 gleiche Strecken ab und verbindet diese zwei Endpunkte. Sie schneiden die Strecke $\overline{AB}$ im gewünschten Verhältnis.



1.4 Übung Die Strecke $\overline{AB}$ soll im Verhältnis p/q geteilt werden im Punkt P (innerer Teilpunkt). Zudem soll ein äusserer Teilpunkt Q gefunden werden, so dass $\overline{QA} : \overline{QB} = p/q$ ist.
Die Konstruktion sieht vor, am Punkt B nach oben und unten eine Länge q auf einer Geraden g abzutragen. Damit sind auf g zwei Punkte bestimmt.

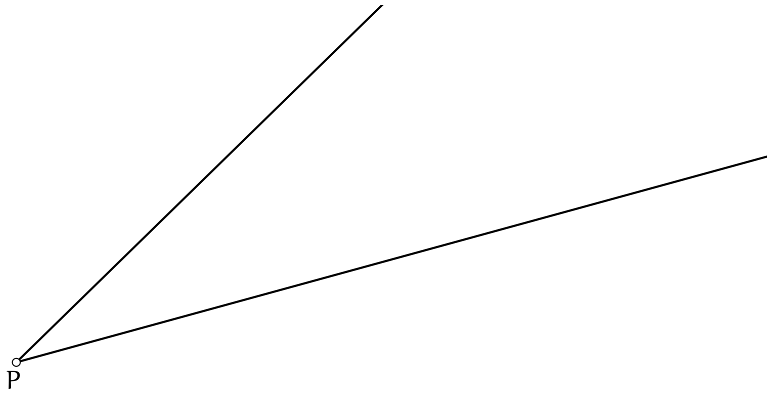
Sodann wird parallel zu g durch A eine Strecke p abgetragen. Durch diesen und beide vorgenannten Punkte werden zwei Geraden gelegt, die $\overline{AB}$ in P und die Verlängerung von $\overline{AB}$ in Q schneiden. Nun erkennt man mit beiden Strahlensätzen, dass gilt:

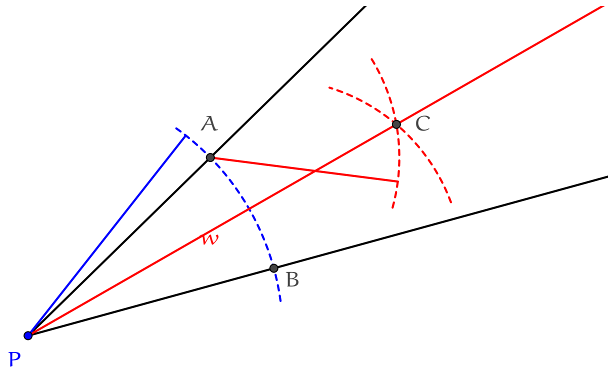
$$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AQ} : \overline{BQ} = p : q$$

Die vier Punkt A, B, P und Q nennt man harmonische Punktgruppe. ◁

Aufgaben

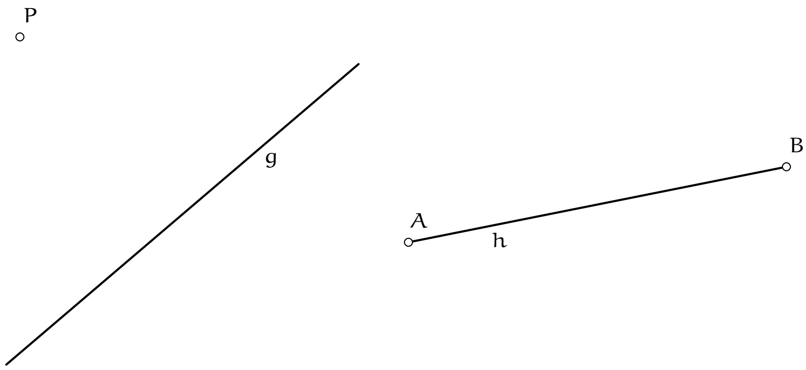
2.5 Teile den spitzen Winkel mit Zirkel und Lineal.

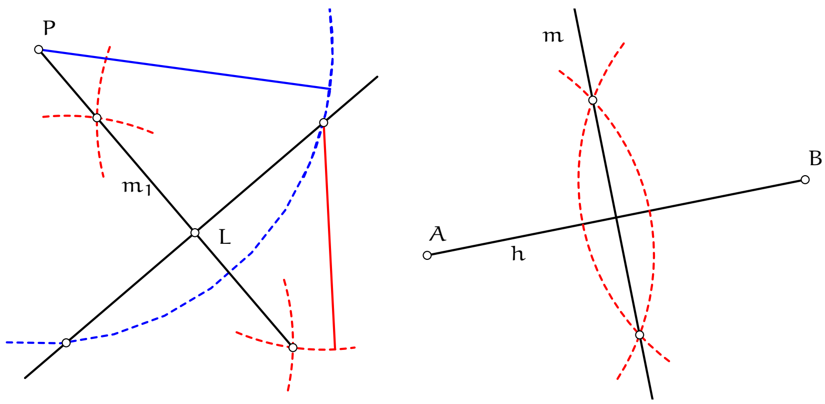




5

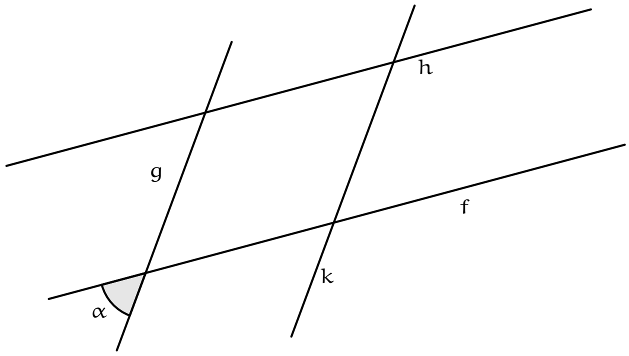
2.6 Finde mit den euklidischen Werkzeugen (Zirkel, Lineal) den Lotfusspunkt L zu P auf g und zeichne die Mittelsenkrechte zwischen den Punkten A und B.

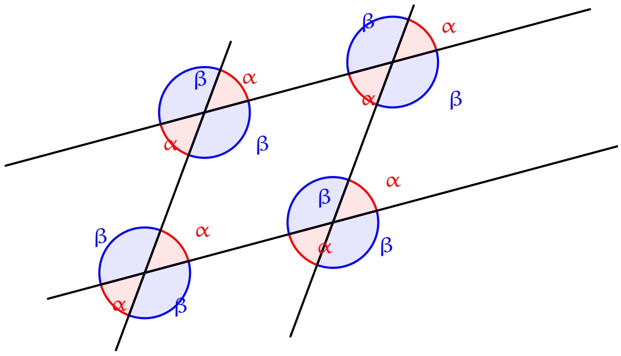




6

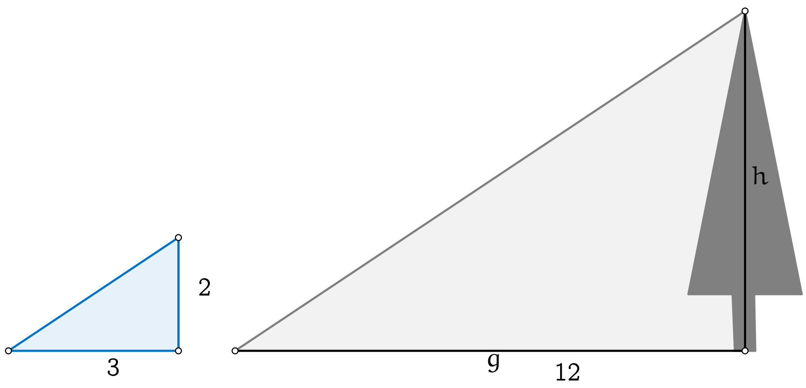
2.7 Bezeichne alle Winkel α und seine Supplementärwinkel β. Die Geraden g und k sowie h und f sind parallel.





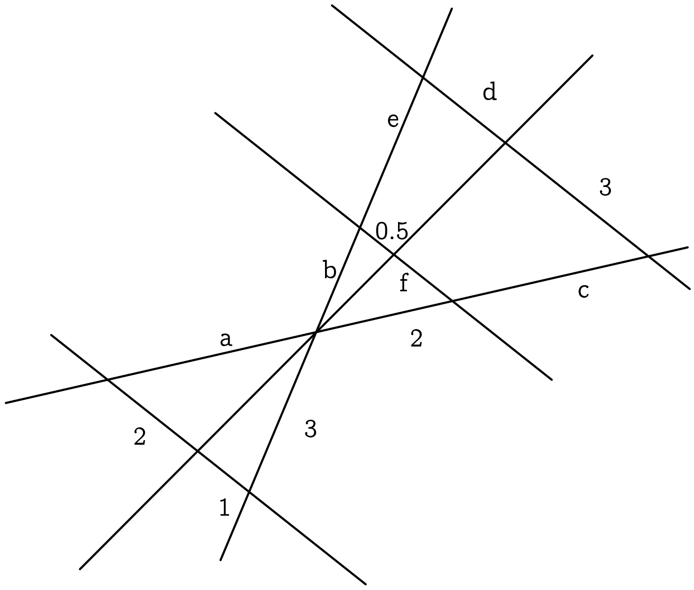
7

2.8 Bestimme die Höhe des Baums, wenn der Schatten 12m beträgt und ein Stab von 2m Länge einen Schatten von 3m wirft.



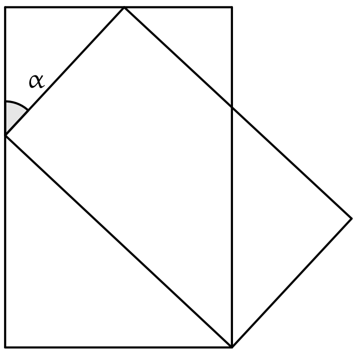
8 Die Sonne wirft den Schatten mit immer gleichem Winkel. Deshalb sind die zwei Dreiecke in ihren entsprechenden Seiten proportional. Das Verhältnis kurzer zu langer Kathete ist $2:3$ und $h:12$. Damit gilt $\frac{2}{3}=\frac{h}{12}$. Daraus folgt $h=8$.

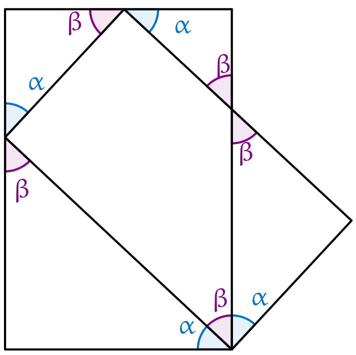
2.9 Bestimme die Längen von a bis e



9 Wir verwenden die drei Strahlensätze. Als erstes bestimmen wir b: es gilt $b : 3 = 0.5 : 1$, womit $b = 1.5$. Sodann d: $d : 3 = 1 : 2$, woraus $d = 1.5$. Es gilt ferner: $b : 0.5 = (b + e) : d$ oder eingesetzt $1.5 : 0.5 = 3 = (1.5 + e) : 1.5$. Daraus $4.5 = 1.5 + e$ oder $e = 3$. Es gilt $f : 3 = 0.5 : d = 0.5 : 1.5$. Somit folgt $f = 1$. Weiter $(2 + c) : 3 = 2 : f$ oder $2 + c = 6 : 1$ und $c = 4$. Für a gilt: $a : (2 + c) = a : 6 = 2 : 3$ oder $3a = 12$ oder $a = 4$. Es gibt jeweils mehrere Alternativen zur Berechnung.

2.10 Gegeben sind zwei Rechtecke. Zeichne überall den Winkel α und seinen Komplementärwinkel β ein.

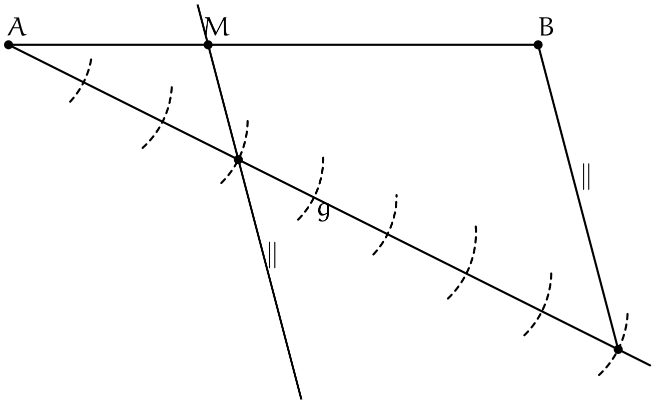




10

2.11 Teile die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt M im Verhältnis 3:5.

11 Wir zeichnen den Strahl g und tragen darauf 8 Mal eine gleiche Länge ab. Dann verbinden wir den letzten Schnittpunkt mit B. Wir veerschieben diese Linie parallel durch den 3. Schnittpunkt und schneiden $\overline{AB}$ in M.



Kapitel 2

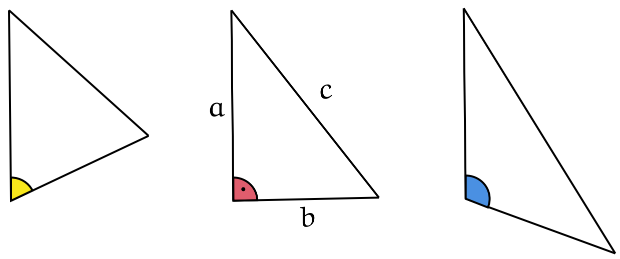
Polygone

Das Wort Polygon stammt aus dem Griechischen und heisst übersetzt Vieleck. Wir betrachte hier Figuren, die mit n Strecken n Ecken bilden, also geschlossene Kurven sind. Spezielle Polygone sind Dreieck, Viereck usw., die Regelmässigkeiten aufweisen können, z.B. aus gleichlangen Strecken bestehen oder gleich Winkel einschliessen.

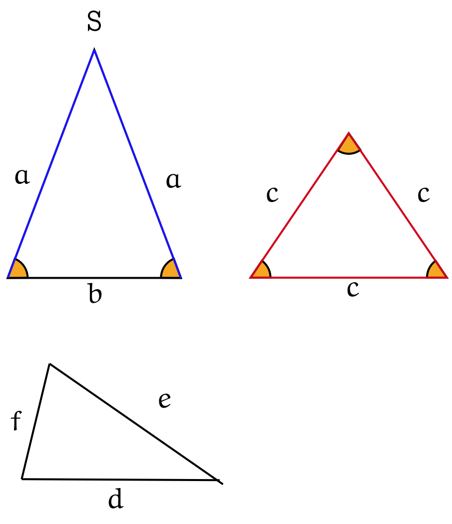
2.1 Dreieck

2.1.1 Typen von Dreiecken

Die Dreiecke werden nach dem Kriterium Winkel und Seite eingeteilt.



Man unterscheidet *spitzwinklige*, *rechte* und *stumpfe* Dreiecke. Im rechtwinkligen Dreieck heissen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, *Katheten* (a und b) und die Seite, welche ihm gegenüberliegt, *Hypotenuse* c.



Hinsichtlich der Seiten sind speziell *gleichseitige* mit drei gleichen Seiten, *gleichschenklige* mit zwei gleichen Seiten und *ungleichseitige*, worin alle drei Seiten unter sich ungleich sind.
Die beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks werden Schenkel, die dritte Seite b Grundseite, *Basis* genannt. Zwei seiner Winkel liegen an der Basis, der dritte an der Spitze.

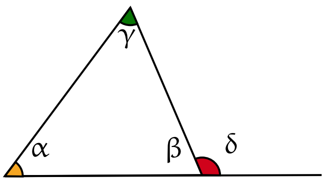
Anmerkung 2.1. Ein rechtwinkliges Dreieck kann auch gleichschenklig sein.

Satz 2.2. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich. Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist es gleichschenklig.

Anmerkung 2.3. Der Satz besagt, dass die Folgerung in beide Richtungen stimmt. Wenn gleichschenklig, dann zwei gleich Winkel, und umgekehrt, zwei gleiche Winkel, dann gleichschenklig. Als anderes Beispiel: Wenn Quadrat, dann Rechteck, aber nichg allgemein: wenn Rechteck, dann Quadrat.

2.1.2 Winkelbeziehungen

Wir habe weiter oben schon festgehalten, dass die Summe der Winkel in einem Dreieck 180 Grad, oder zwei rechte Winkel beträgt.

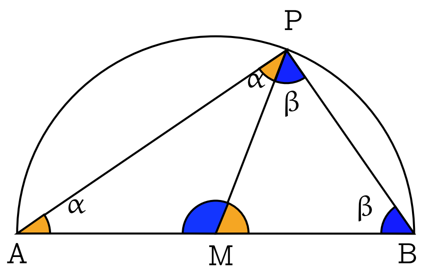


Satz 2.4. Jeder Aussenwinkel eines Dreiecks (δ) ist gleich der Summe der beiden von ihm getrennt liegenden Dreieckswinkel ($\alpha + \gamma$).

2.1.3 Thales- und Fasskreis

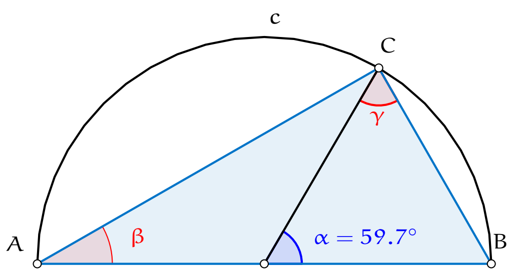
Wie aus dem Namen Thales zu schliessen ist, sind wir wieder bei den Griechen und ihrem Wissen.

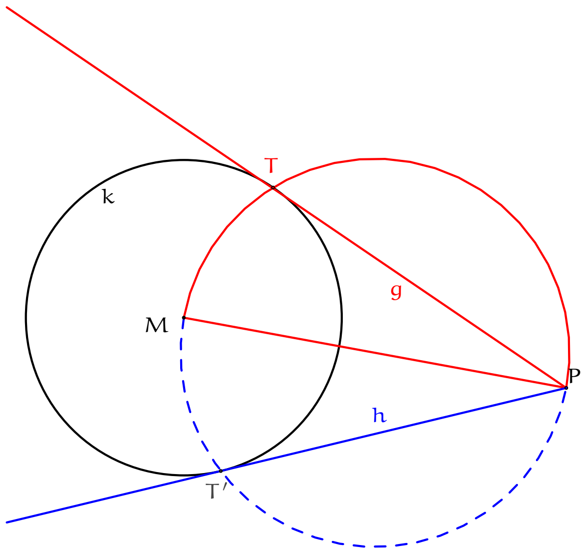
Satz 2.5. Thaleskreis Jeder Punkt P auf dem Halbkreisbogen über einer Strecke $\overline{AB}$ bildet mit den Punkten A und B einen rechten Winkel $\angle APB = 90°$.



Aus der Abbildung erkennt man, dass $\alpha + \beta$ für jeden Punkt P 90 Grad beträgt. Weil man zwei gleichschenkliche Dreiecke ausmachen kann, sind die Basiswinkel zweimal α und β. Aufgrund des Aussenwinkelsatzes von oben ist der gestreckte Winkel bei M $2\alpha + 2\beta = 180$. Damit folgt $\alpha + \beta = 180 : 2 = 90$.
Dieses Gesetz lässt sich verallgemeinern, sodass man Konstrukte für beliebige Winkel, sogenannte Rand- oder *Peripheriewinkel*, bilden kann. Diese Kreise nennt man *Fasskreise*.

2.6 Übung Man bestimme die zwei Winkel β und γ aus der Abbildung.
Der Winkel γ ist ein Basiswinkel des gleichschenkligen Dreieicks $\triangle MCB$. Somit beträgt er $\gamma = (180 - \alpha)/2 = 120.3/2 = 60.15°$. β ist auch Basiswinkel des anderen gleichschenkligen Dreiecks $\triangle MAC$. Zudem ist der Winkel bei C ein rechter. Somit ist $\beta = 90 - \gamma = 29.85°$. $\triangleleft$

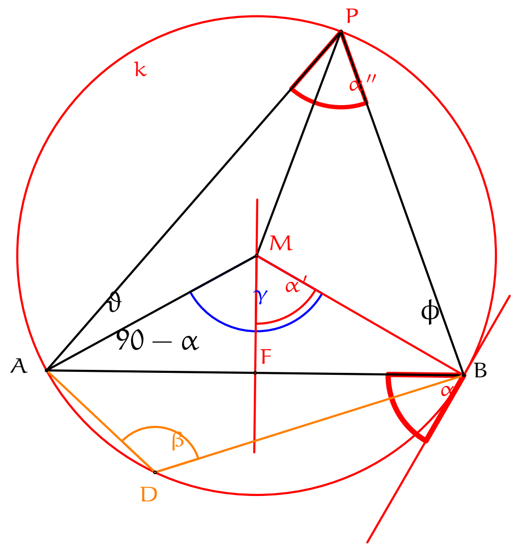




2.7 Übung Den Thaleskreis braucht man häufig, um die Tangent an einen Kreis k von einem Punkt P aus zu legen. Die Tangente steht senkrecht auf dem Radius, der Verbindung zwischen Tangentialpunkt T und Mittelpunkt M des Kreises. Man halbiert die Strecke $\overline{MP}$ und konstruiert den Halbkreis. Dieser schneidet den Kreis in T. ◁

Der Fasskreis wird nicht über einer Zentralen sonder eine beliebigen Sekante geschlagen. Somit ist der Mittelpunkt des Kreises auf einer Mittelsenkrechten der Sekante und nicht auf dieser selber.

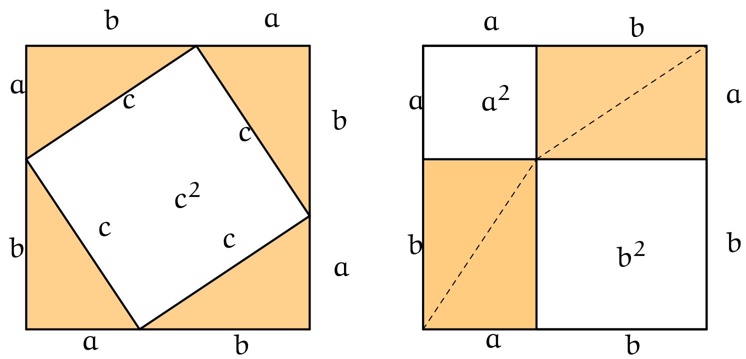
An der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt B wird der gewünschte Winkel α und seine Linie angetragen. Dann schneidet man eine Senkrechte auf dieser Linie in B mit der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$. Dies ist der Mittelpunkt des Fasskreises, der durch A und B geht. Der Fasskreis enthält den sogenannten Zentriwinkel γ der genau 2α entspricht. Auf der unteren Seite befindet sich der Fasskreis für den Winkel β. Somit bildet die Sekante AB zwei Fasskreise mit Peripheriewinkelsn α und $\beta = 180 - \alpha$. Im Falle von $\alpha = 90$ hat man zwei Thaleskreise, die einen ganzen Kreis bilden.



2.8 Übung Die Herleitung ist nicht schwierig.
In der Abbildung findet man drei gleichschenklige Dreiecke, $\triangle AMB$, $\triangle AMP$ und $\triangle BMP$. Die Basiswinkel von $\triangle AMB$ sind $90 - \alpha$, die von $\triangle AMP$ seien ϕ und von $\triangle BMP$ ϑ. Gesucht wird $\phi + \vartheta$. Die Summe im Dreieck ist 180, also $180 = 2(90 - \alpha) + 2\phi + 2\vartheta$ oder $90 = (90 - \alpha) + (\phi + \vartheta)$ oder $\alpha = \phi + \vartheta$. Somit ist die Eingeschaft geklärt. ◁

2.1.4 Die Sätze von Pythagoras

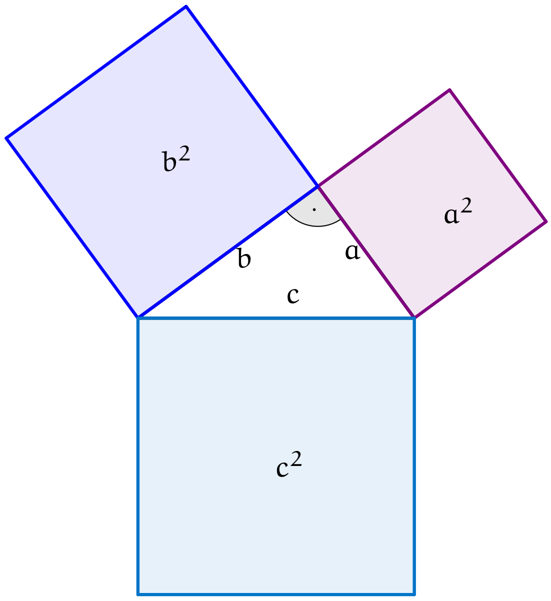
Die Sätze von Pythagoras stammen aus älterer Zeit und sind von den Griechen beschrieben worden.



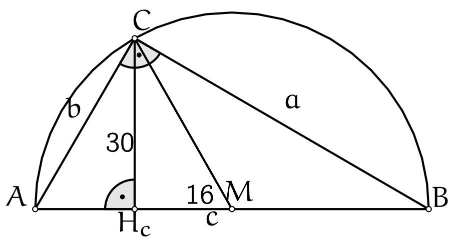
Wir machen zwei Zeichnungen, die wir vergleichen. Zuerst zeichnen wir das grosse Quadrat. Jede Seite unterteilen wir durch einen Punkt, der im Uhrzeigersinn von der nächsten Ecke entfernt ist Diese Strecke sein b und der Rest heisse a. Die so entstandenen Punkte verbinden wir zum eingeschriebenen Quadrat, dessen Seiten c sein sollen. Sodann machen wir wieder ein grosses Quadrat wie vorher und setzten unten rechts das Quadrat mit Seitenlänge b und oben links das Quadrat mit Seitenlänge a. Wenn man vom ersten Quadrat die vier Dreiecksflächen in Abzug bringt, also $2ab$ bleibt c^2 übrig. Wenn man vom zweiten grossen Quadrat die zwei Rechtecke abzählt, also $2ab$, so bleibt a^2+b^2 übrig. Diese zwei Restgrössen sind gleich, also gilt $c^2 = a^2 + b^2$. Ein Dreieck mit den Seiten a, b und c ist rechtwinklig.

Satz 2.9. Satz des Pythagoras In einem rechtwinkligen Dreieck addieren sich die Quadrate der Katheten zum Quadrat der Hypothenuse.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Anmerkung 2.10. Das schon den Babylonier bekannteste Zahlenbeispiel ist $5^2 = 4^2 + 3^2$, somit $25 = 16 + 9$.



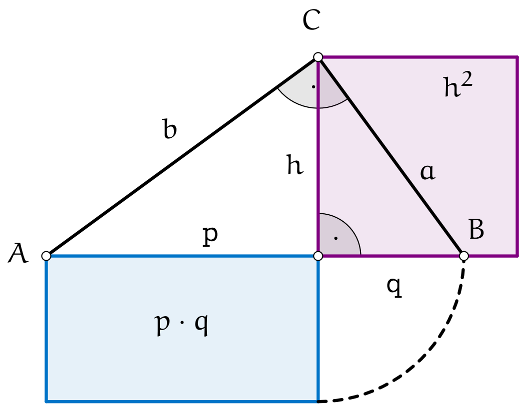
2.11 Übung In der Abbildung sind die Länge der Seiten a, b und c gesucht.
Wir wenden den Satz des Pythagoras auf das Dreieck $\angle MCH_c$ an. Die Länge $\overline{CM}$, der Radius r, ist $r^2 = 30^2 + 16^2 = 900 + 256 = 1156$, woraus $r = 34$. Damit folgt $\overline{AH_c} = 34 - 16 = 18$. Damit folgt $b^2 = 30^2 + 18^2 = 900 + 324 = 1224$ und $b = \sqrt{1224} = 34.99$.
c ist der doppelte Radius, also $c = 68$. Damit folgt für a: $a^2 = c^2 - b^2 = 4624 - 1224 = 3400$ und $a = 58.31$. ◁

Höhensatz

Satz 2.12. Höhensatz In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse.

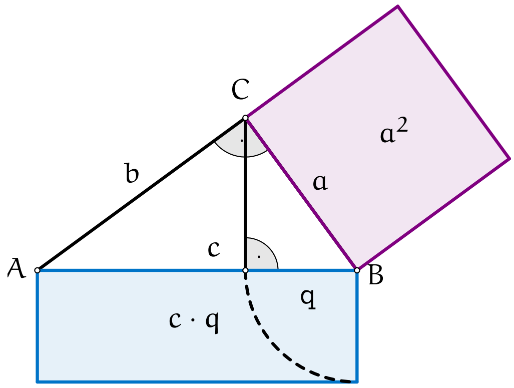
$$h^2 = p \cdot q.$$

Die Höhenlinie h ist das Lot von C auf die Hypothenuse c, das diese in die zwei Teile p und q teilt. Mit diesem Lot wird das rechtwinklige Dreieck in zwei weiter rechtwinklige Dreiecke unterteilt. Für alle gilt der Satz des Pythagorals, z.B. $h^2 = a^2 - q^2$ und $h^2 = b^2 - p^2$. Wenn man diese zwei Gleichungen addiert, resultiert $2h^2 = a^2 - q^2 + b^2 - p^2$. Mit $c^2 = a^2 + b^2$ kann man ersetzen und erhält: $2h^2 = c^2 - p^2 - q^2$. Aus der Abbildung sehen wir, dass diese rechte Seite $2pq$ entspricht. Also folgt $2h^2 = 2pq$ und damit $h^2 = pq$. QED



Kathetensatz

Der Kathetensatz ergibt sich auch aus Proportionalitäten. Das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten, nach Länge geordnet a, b und c weist den Winkel β auf. Das kleine Dreieck mit den Seiten q, h und a ist zum grossen Dreieck ähnlich, hat dieselben Winkel.



Deshalb gilt die Proportion $a : c = q : a$ und daraus folgt $a^2 = c \cdot q$. Analog mit dem dritten Dreieck mit den Seiten h, p und b folgt $b : c = p : b$ und so $b^2 = c \cdot p$.

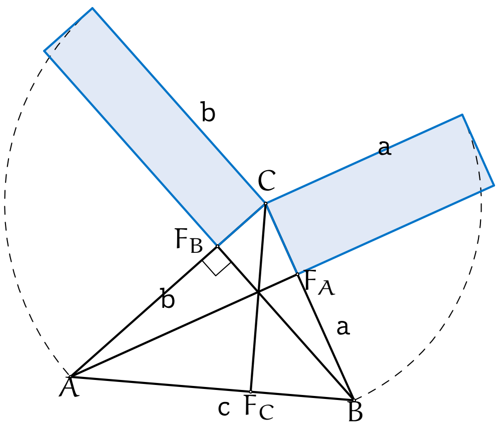
Satz 2.13. Kathetensatz In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleichgross wie das Rechteck, welches sich aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt ergibt.

$$a^2 = q \cdot c \quad \text{und} \quad b^2 = p \cdot c.$$

Projektionssatz

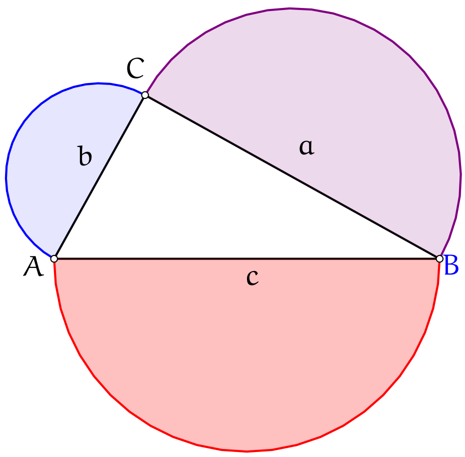
Satz 2.14. Projektionssatz Für zwei Seiten in einem beliebigen Dreieck sind diejenigen Rechtecke flächeninhaltsgleich, die aus einer Seite und der senkrechten Projektion der anderen auf sie gebildet werden.

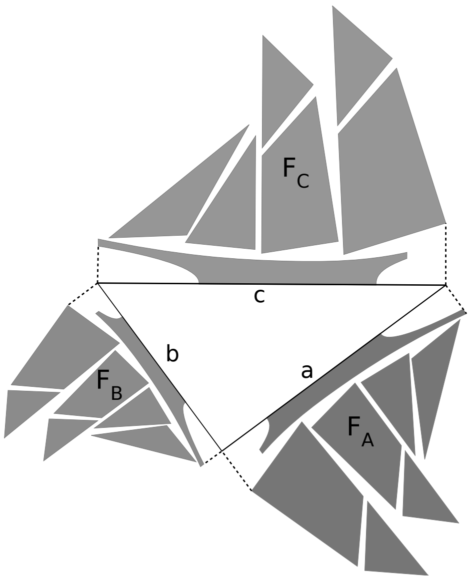
In der Abbildung ist die Konstruktion ersichtlich. Im beliebigen Dreieck werden die Höhen eingetragen. Die an der gleichen Ecke anliegenden Abschnitte werden mit der entsprechenden Seite mal genommen und bilden die Vierecke. Diese sind flächengleich. Da das Dreieck nicht rechtwinklig zu sein braucht, handelt es sich hier um eine Verallgemeinerung des Höhensatztes. Mit den Bezeichnungen: $b \cdot \overline{CF_B} = a \cdot \overline{CF_A}$ und so fort.



Verallgemeinerung Pythagoras

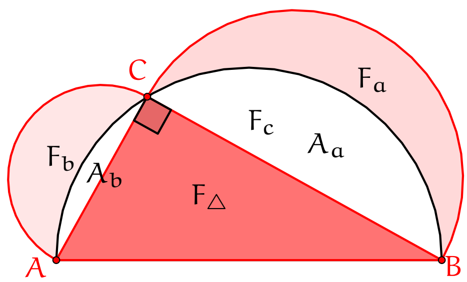
Der Satz des Pythagoras kann auf verschiedene Arten verallgemeinert werden. Zum einen gilt er für *ähnliche* Figuren, deren eine Dimension proportional zu den Seitenlängen ist.



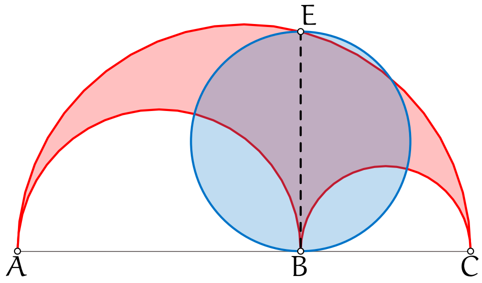


Damit sind beispielsweise Halbkreise oder Vielecke gemeint, die durch Strecken und Stauchen ineinander übergeführt werden können. Hier ist eine Schiffssilhouette gezeigt, die jeweils proportional zum Quadrat der Seiten ist.

2.15 Übung (Möndchen des Hyppokrates) Die Fläche des Dreiecks $F_\triangle$ ist gleich der Fläche der zwei Möndchen. Mit dem Pythagoras für die Halbkreise gilt: $F_c = F_a + F_b$. Zudem gilt $F_c = F_\triangle + A_a + A_b$, wobei die Flächen A_a und A_b die zwei Kreissegmente bezeichnen. Somit kann man schreiben: $F_c = F_\triangle + A_a + A_b = F_a + F_b$ oder $F_\triangle = F_a - Aa + F_b - A_b$. Das ist die Aussage.



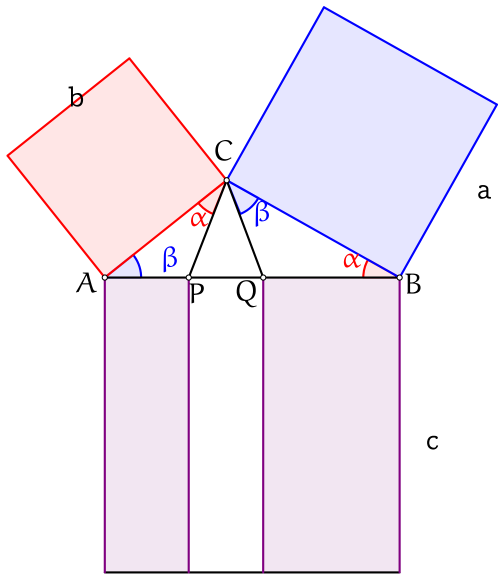
◁



2.16 Übung (Sichel des Archimedes) In der Abbildung sieht man das sogenannte Schustermesser, auch Arbelos oder Sichel des Archimedes. Es wird aus dem Schnitt von Halbkreisen erzeugt. Es gilt: die rote Fläche ist gleich der Fläche des blauen Kreises. Die Herleitung ist nicht schwer, sie erfolgt über die mehrfache Verwendung des Satzes des Pythagoras mit den Halbkreisen über den Dreiecksseiten. $\triangleleft$

Eine andere Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras ist der *Satz von Ibn Qurra*. Wir geben ihn wieder ohne Beweis.

Wir betrachten das spitze Dreieck $\triangle ABC$. Darin werden die ähnlichen, hier gleiche Winkel, Dreiecke $\triangle APC$ und $\triangle BCQ$ eingetragen. Nun wird behauptet, dass die Summe der Quadratflächen über den Katheten der Fläche $c(\overline{AP} + \overline{QB})$ gleich ist. Wenn wir uns vorstellen, dass wir die Punkte P und Q aufeinander zuschieben, dann muss C in die Höhe gehen, damit die Dreiecke ähnlich bleiben. Wenn P und Q zusammenfallen, dann ist das Dreieck rechtwinklig und es gilt der bisherige Pythagoras. Zur Herleitung dieses Satzes benötigt man ein andere Verallgemeinerung des Pythagoras, den Kosinussatz, den wir später noch kennenlernen werden.



2.1.5 Transversale des Dreiecks

Transversalen im Dreieck, also spezielle Geraden im Dreieck, bilden die folgenden vier ausgezeichneten Punkten:

(1) den *Höhenschnittpunkt* H als Schnittpunkt der Höhen,

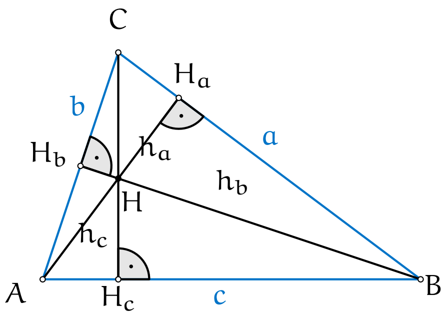
(2) den *Umkreismittelpunkt* U, Schnittpunkt der Mittelsenkrechten,

(3) den *Schwerpunkt* S als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden oder Schwerlinien und

(4) den *Inkreismittelpunkt* I als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

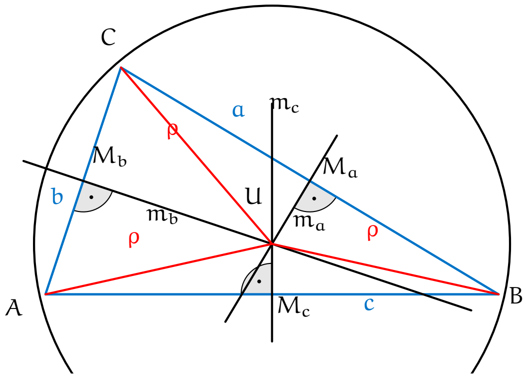
Wir werden sehen, dass man in einem Dreieck einen Kreis einpassen kann, der alle drei Seiten berührt. Einfacher einsichtig ist der Fall des Kreises, der durch die drei Ecken des Dreiecks geht. Denn ein Kreis ist durch genau drei Punkte festgelegt.

Höhenlinie



Die Höhenlinie ist der kürzeste Abstand von einem Dreieckspunkt zu seiner gegenüberliegenden Seite. Deshalb ist die Höhenlinie senkrecht (lotrecht) zur Seite. Die Drei Höhenlinien schneiden sich in einem Punkt H. Bei einem überstumpfen Dreieck liegt der Höhenpunkt ausserhalb der Dreiecksfläche.

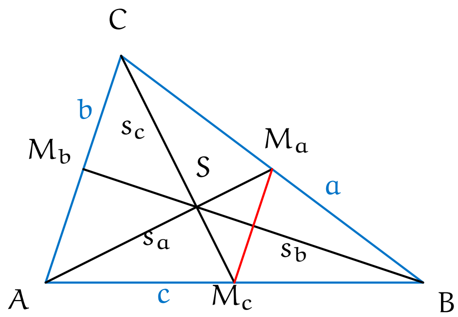
Mittelsenkrechte



Fällt man die Lote in den Seitenmittelpunkte der Dreiecksseiten, so schneiden sich diese in einem Punkt, dem Mittelpunkt oder *Umkreismittelpunkt* U. Da ein Kreis durch drei Punkte festgelegt ist, gibt es genau einen Kreis durch die drei Ecken eines Dreiecks. Es folgt, dass U von allen Ecken denselben Abstand, Radius ρ, aufweist. Es gilt also

$$\overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC} = \rho.$$

Seitenhalbierende, Schwerpunkt



Die Schwerelinien (oder Seitenahabierenden) verbinden eine Ecke mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die drei Schwerelinien des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem *Schwerpunkt* S.
Gemäss 1. Strahlensatz (siehe Seite 1-8) gilt:

$$\overline{AC} : \overline{M_aM_c} = 2 : 1$$

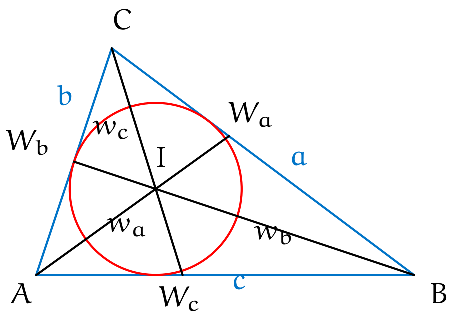
und mit dem 2. Strahlensatz dann:

$$\overline{AS} : \overline{SM_a} = \overline{CS} : \overline{SM_c} = 2 : 1$$

und durch Vertauschen von c mit b auch $\overline{BS} : \overline{SM_b} = 2 : 1$.

Satz 2.17. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden s im Verhältnis 2 : 1.

Winkelhalbierende



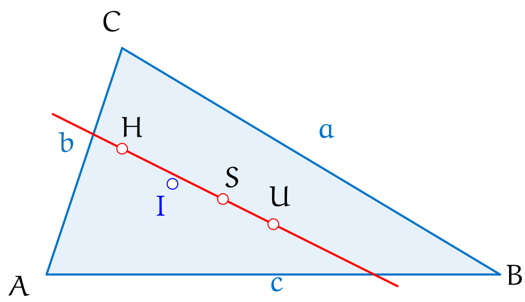
Die Winkelhalbierende ist der Ort aller Punkte, die von den entsprechenden Seiten dieselben Abstände haben. Diese kann man sich als Radien eingeschlossener Kreise vorstellen. Der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender hat von allen drei Seiten denselben Abstand. Somit müssen sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden. Die Seiten sind die Tangenten an den Inkreis.

Euler'sche Gerade

Es gibt einen Zusammenhang zwischen den Schnittpunkten der Transversalen.

Satz 2.18. Euler-Gerade In einem Dreieck liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt U auf einer gemeinsamen Geraden, der Euler-Geraden.

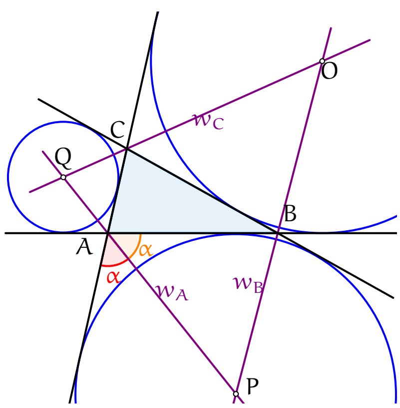
In der Abbildung erkennt man, dass der Inkreismittelpunkt nicht auf der Euler-Geraden liegt. Speziell beim gleichschenkligen Dreieck ist auch I auf der Euler-Geraden. Bei einem gleichseitigen Dreieck fallen die Punkte S, U, I und H in einem zusammen.
Mit dem Strahlensatz und der Tatsache, dass die Seitenhalbierende in S im Verhältnis $2:1$ geteilt wird, folgt, dass $\overline{HS} : \overline{SU} = 2:1$.

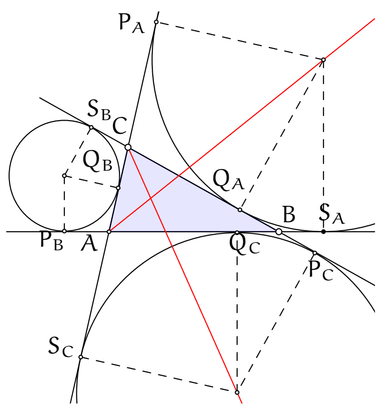


Die Ankreise

Definition 5. Die *Ankreise* sind die Kreise, die jeweils von einer Dreiecksseite von aussen und von den Verlängerungen der beiden anderen Seiten tangential berührt werden. Jedes beliebige Dreieck besitzt drei Ankreise.

Die Mittelpunkte der Ankreise sind die Schnittpunkte der Aussen- und der Innenwinkelhalbierenden.





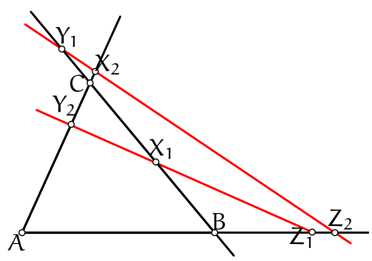
Wir bezeichnen den halben Umfang des Dreiecks mit $s = (a + b + c)/2$.
Aus der Abbildung erkennen wir, dass die jeweiligen Abschnitte gleich sind, also z.B. $\overline{BQ_A} = \overline{BS_A}$ oder $\overline{CP_A} = \overline{CQ_A}$ etc. Aber auch z.B. $\overline{AP_A} = \overline{AS_A}$ oder $\overline{BS_B} = \overline{BP_B}$. Sodann ist z.B. $\overline{AS_A} + \overline{AP_A} = \overline{CS_C} + \overline{CP_C} = 2s$.Daraus kann man folgern, dass $\overline{AP_A} = \overline{AS_A} = \overline{BS_B} = \overline{BP_B} = \overline{CS_C} = \overline{CP_C} = s$.

2.1.6 Drei weitere Sätze**

Transversalensatz

Satz 2.19 (**Satz des Menelaos**). Schneidet eine Gerade die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen, so sind die Produkte aus den Längen von je drei nicht aneinanderstossenden Abschnitten der Seiten gleich, d.h., es gilt:

$$\overline{AZ_j} \cdot \overline{BX_j} \cdot \overline{CY_j} = \overline{AY_j} \cdot \overline{BZ_j} \cdot \overline{CX_j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{AZ_j}}{\overline{BZ_j}} \cdot \frac{\overline{BX_j}}{\overline{CX_j}} \cdot \frac{\overline{CY_j}}{\overline{AY_j}} = 1$$



Der Beweis dieses Satzes gelingt mit dem Strahlensatz ziemlich einfach. Dazu fällt man die Lote von den drei Punkten auf die Gerade. Diese Lotabschnitte sind zu betrachten.

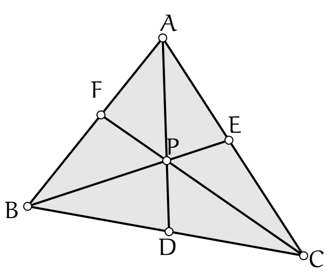
Satz von Ceva

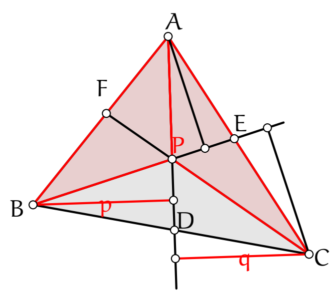
Vorbemerkt sei der Ausdruck Ecktransversale im Dreieck als die Verbindungsstrecke einer Dreiecksecke mit einem Punkt auf der gegenüber liegenden Dreiecksseite.

Satz 2.20 (**Satz von Ceva**). Genau dann, wenn sich drei nicht parallele Ecktransversale im Dreieck in einem Punkt schneiden, ist das Produkt der durch die Schnittpunkte mit den Seiten erzeugten Streckenverhältnisse gleich 1. Formal

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CD}$$

Anmerkung 2.21. Mit den Worten “genau dann” ist gemeint, dass auch die umgekehrte Beziehung gilt. Wenn das Verhältnis stimmt, dann liegen die Punkte auf eine Geraden





Der Beweis erfolgt über die Lote auf die Transversalen. Beispielsweise fällen wir die Lote auf die Gerade durch A und D. Sie haben die Längen p und q. Der Strahlensetz besagt $p : q = BD : DC$. Es sind zudem p und q die Höhen der Dreiecke $\triangle APB$ und $\triangle APC$ mit der Basis AP. Somit folgt das Verhältnis $p : q = BD : DC = F_{APB} : F_{APC}$. Analog gilt $AE : EC = F_{BPA} : F_{BPC}$ und $FA : BF = F_{CPA} : F_{CPB}$. Nun multiplizieren wir die drei Verhältnisse

$$\frac{BD}{DC}\frac{EC}{AE}\frac{FA}{BF} = \frac{F_{APB}}{F_{APC}}\frac{F_{BPC}}{F_{BPA}}\frac{F_{CPA}}{F_{CPB}} = 1$$

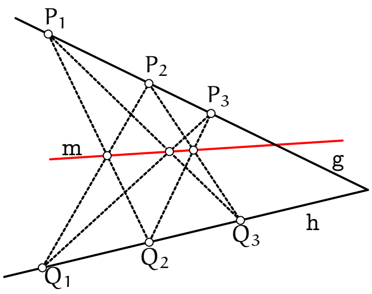
Damit folgt dann wiederum

$$BD \cdot EC \cdot FA = DC \cdot AE \cdot BF.$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Satz von Pappos

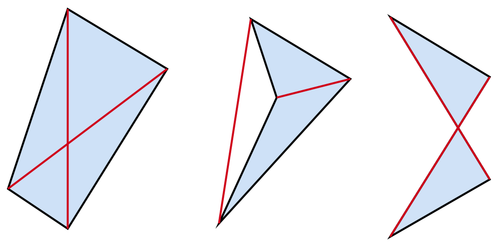
Satz 2.22. Gegeben sind zwei Geraden, auf denen die Punkte P_1, P_2, P_3 bzw. Q_1, Q_2 und Q_3 liegen. Dann liegen die drei Schnittpunkte von $\overline{P_1Q_2}$ mit $\overline{P_2Q_1}$, $\overline{P_1Q_3}$ mit $\overline{P_3Q_1}$, $\overline{P_2Q_3}$ mit $\overline{P_3Q_2}$ auf einer Geraden.

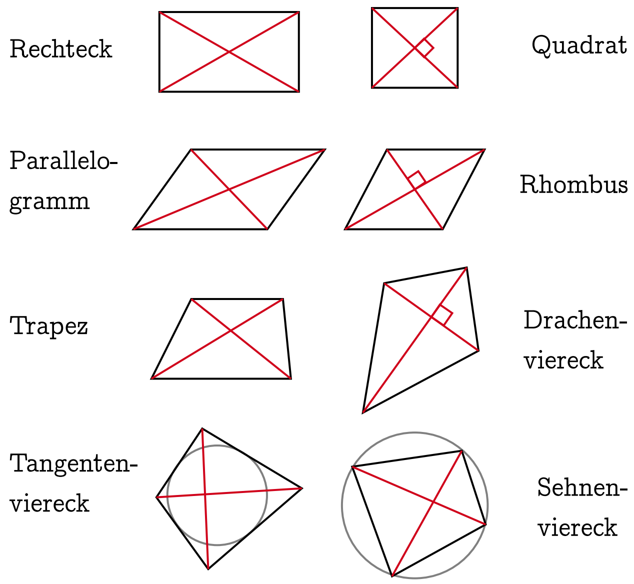


Präzise muss es heissen, dass keiner der sechs Punkte der Schnittpunkt von g und h sein darf.
Der Beweis dieses Satzes ist aufwendig; er setzt die fünfmalige Anwendung des Satzes von Menelaos voraus, aus deren Verhältnisse sich die sogenannte Kollinearität, das Liegen auf derselben Gerade, ergibt.

2.2 Viereck

Ein *Viereck*, auch *Tetragon* oder *Quadrilateral*, ist Vieleck mit vier Ecken und vier Seiten. Es besitzt zwei Diagonalen, die innerhalb, auf dem Rand oder gar ausserhalb der Figur liegen. Liegt eine ausserhalb, so spricht man von einem *konvexen* Viereck. Im dritten Fall nennt man es ein *überschlagenes* Viereck.





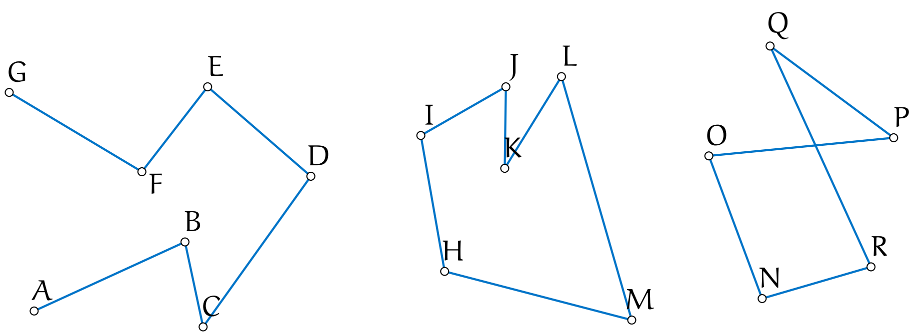
In der folgenden Abbildung sehen wir die häufigsten Formen der Vierecke, die auch einen eigenen Namen tragen. Die Vierecke kann man auf vielfältige Weise charakterisieren. (1) Anhand der Symmetrie, genauer Punktsymmetrie und Achsensymmetrie. (2) Oder der Richtung der Seiten, nämlich parallel oder nicht. (3) Schnittwinkel der Diagonalen, rechtwinklig oder nicht.
Bei den Tangenten- und Sehnenvierecken besteht ein Bezug zum Kreis. Im ersten Fall ist dem Viereck ein Kreis einbeschrieben, im zweiten Fall ist dem Viereck ein Kreis umschrieben.
Wie man leicht erkennt, kann man das Viereck (und auch das Vieleck) in Dreiecke zerlegen, indem man ein Diagonale auswählt. Aus dem Viereck entstehen zwei Dreiecke.

2.3 Vieleck, Polygon

2.3.1 Polygonzug

Definition 6. Ein *Polygonzug* oder *Streckenzug* ist die Vereinigung der Verbindungsstrecken einer Folge von Punkten.

In der folgenden Abbildung sieht man drei Polygonzüge, die *offen*, *geschlossen* und *überschlagen* sind. Beim letzten kreuzen sich also zwei Strecken.



Definition 7. Ein Vieleck oder Polygon ist eine ebene geometrische Figur, die durch einen geschlossenen Polygonzug gebildet wird.

Anmerkung 2.1. Polygone werden typischerweise nach der Zahl der Ecken benannt, also Fünfeck, Sechseck, n-Eck.

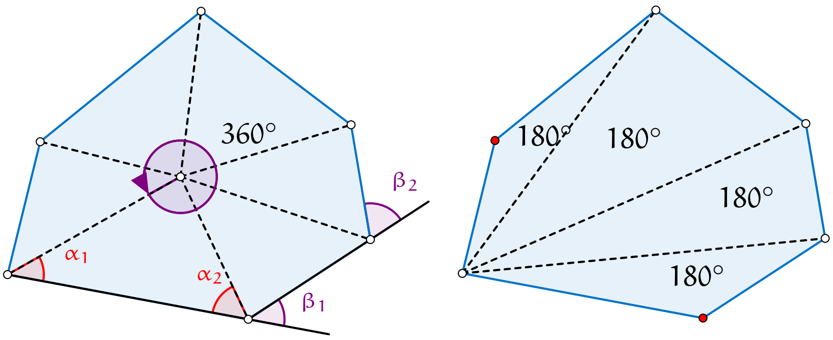
Definition 8. Hat ein Polygon sowohl gleiche Seiten als auch gleiche Innenwinkel, dann wird es als *regelmässiges Polygon* oder *reguläres Polygon* bezeichnet.

2.3.2 Winkelsummen

Satz 2.2. In einem nicht überschlagenen, ebenen n-Eck ist die Summe der Innenwinkel

$$(n-2)\cdot 180°.$$

Wir kontrollieren diese Aussage am Dreieck. Die Summe sollte also $(3-2)\cdot 180° = 180°$ sein. Das stimmt. Ebenso für das Viereck, $(n-2)\cdot 180° = 360°$. An der Abbildung plausibilisieren wir den Satz.



Es gibt zwei Arten, diesesn Sachverhalt darzustellen. Erstens stellen wir uns einen Punkt im n-Eck vor, der mit den n Ecken dann n Dreiecke bildet. Im Dreieick ist die Winkelsumme bekanntlich 180°. Somit ergibt sich die Summe $n\cdot 180$. Davon müssen wir allerdings die 360° um den Punkt im Innern in Abzug bringen, also $s = n\cdot 180 - 360$. Anderseits zeichnen wir von einem Eckpunkt aus Strecken zu den anderen $n-2$ Punkten. Die unmittelbaren zwei Nachbaren fallen aus. Somit ist also $s = (n-2)\cdot 180$.
Die Aussenwinkelsumme, Summe der violetten Winkel in der Abbildung, ist einfach 360°.

Satz 2.3. In einem nicht überschlagenen, ebenen n-Eck ist die Summe der Aussenwinkel 360°.

2.3.3 Regelmässige Vielecke

Bekannt sind uns schon das gleichseitige Dreieck und das Quadrat. Das sind regelmässige Vielecke mit drei, respektive vier Ecken.

Definition 9. Ein regelmässiges Vieleck, ist ein ebenes Vieleck, das sowohl gleichseitig ist als auch gleiche Innenwinkel aufweist.

2.4 Kongruenz

Definition 10. Zwei Figuren sind *kongruent* wenn sie zur Deckung gebracht, vollständig in eine zusammenfallen. Diejenigen Stücke, die bei der Deckung aufeinander zu liegen kommen, heissen *homolog* oder *entsprechend*.

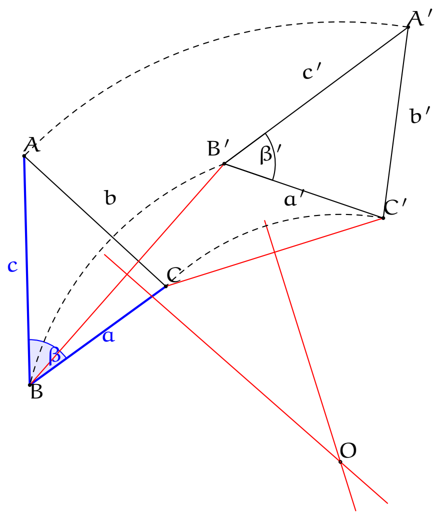
Satz 2.1. Homologe Stücke sind einander gleich.

Anmerkung 2.2. Die Deckung zweier kongruenter Figuren kann durch Umklappung, Parallelverschiebung und Drehung bewerkstelligt werden, und zwar kann eine dieser Bewegungen ausreichen, oder es müssen zwei nacheinander ausgeführt werden.

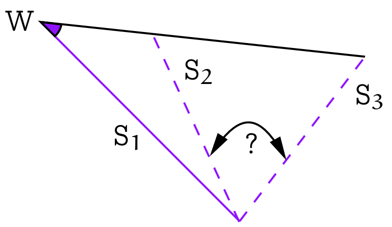
2.4.1 Kongruenzssätze des Dreiecks

Satz 2.3. (1. Kongruenzsatz) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (**SWS**).

Die Kernfrage lautet: Ist es möglich zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ übereinander zu legen und festzustellen, ob sie deckungsgleich sind. Das Übereinander-Legen bedeutet ein Abfolge von Operationen, die die Form der Figur nicht ändern, also Klappung, Schiebung oder Drehung.



Für den ersten Kongruenzsatz ist es notwendig und hinreichend, wenn die drei Punkte A', B' und C' mit derselben Operation in A, B und C überführt werden können. Aus der Abbildung ist erkennbar, dass eine Drehung um den gemeinsamen Drehpunkt O die zwei Dreiecke ineinander überführt.

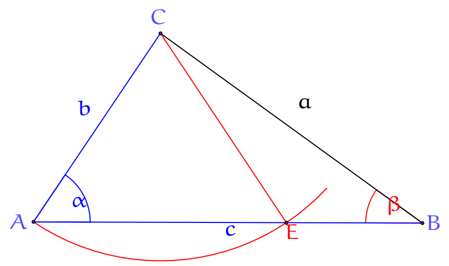


In der Abbildung wird klar, dass z.B. WSS nicht gelten kann, denn es sind zwei Dreiecke möglich, die die entsprechenden Bedingungen erfülle. Ist der Winkel eingeschlossen, ist nur eine Konstruktion möglich.

Satz 2.4. (2. Kongruenzsatz) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln von der gleichen Lage übereinstimmen (**WSW**).

Satz 2.5. (3. Kongruenzsatz) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (**SSS**).

Satz 2.6. (4. Kongruenzsatz) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (**SsW**).



Wie man der Abbildung entnehmen kann, ist der grössere Winkel zwingend, weil sonst zwei Möglichkeiten gegeben wären, nämlich die Dreiecke mit den alternative Punkten A oder E.

2.4.2 Kongruenz Vieleck

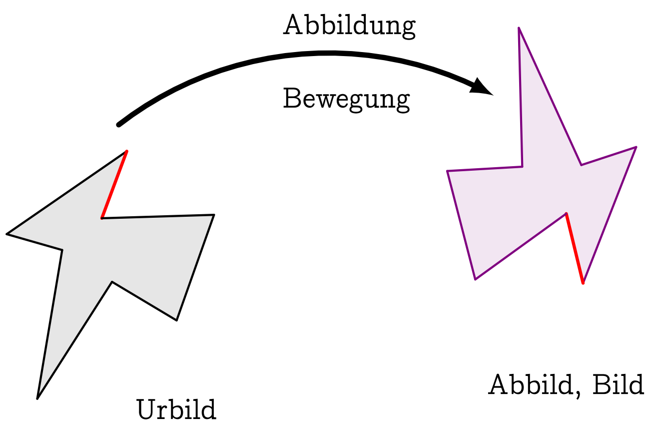
Satz 2.7. Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten und Winkel in gleicher Abfolge wechselseitig gleich haben.

2.4.3 Kongruenzabbildung, Bewegung

Zwei Figuren sind kongruent zueinander wenn sie so aufeinander plazieren kann, dass “es genau passt”. Die Idee ist intuitiv klar. Man stellt sich eine Figur aus Karton vor, die man beliebig auf der Zeichenebene umherschiebt und mit dem Stift umrandet. Nun kann man die Figur aus der Ebene herausnehmen und umklappen. Dasselbe Resultat erzielt man, wenn man einen Taschenspiegel an die Figur hinhält. Für eine formal Definition der Kongruenz beliebiger Figuren schärft man den Begriff mit einem anderen, nämlich der Bewegung.

Definition 11. Eine *Bewegung* ist eine abstandserhaltende Abbildung zweier Figuren in der Ebene.

Anmerkung 2.8. Abstanderhaltend meint, dass der Abstand zweier Punkte A und B gleich dem Abstand der abgebildeten Punkte A' und B' ist. Man schreibt $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$. Da ein Dreieck aus drei Punkten besteht, deren Abstände in der Abbildung gleich sind wie im Urbild, ist das abgebildete Dreieck zum Urbild kongruent.



Satz 2.9. Kongruenzabbildungen sind geraden-, längen- und winkeltreu.

Anmerkung 2.10. Geradentreu meint, dass eine Gerade im Urbild wieder eine Gerade im Abbild wird; längentreu und winkeltreu, meinen analog, dass ein Winkel und eine Streckenlänge bei der Abbidlung erhalten bleiben. Abstandserhalten schliesst alle drei Kriterien ein.

Die elementaren Bewegungen sind:

(1) die Parallelverschiebung (Translation),

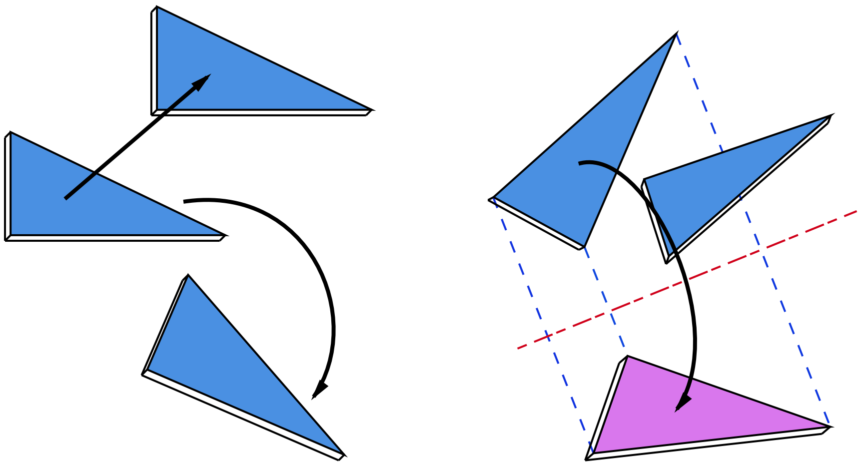
(2) die Drehung (Rotation) um einen Punkt der Ebene und speziell

- die Punktspiegelung als Drehung um 180°

(3) die Achsenspiegelung und

- die Gleitspiegelung bestehend aus einer Achsenspiegelung gefolgt von einer Translation längs der Achse.

Translation und Rotation sind "eigentliche" Bewegungen und die Achsenspiegelung "uneigentlich", weil sie als Bewegung der Klappung die Zeichenebene gedanklich verlässt.



Die Abbildungen zeigen die Verhältnisse anhand einer Schablone, die man auf der Ebene bewegt oder klappt.

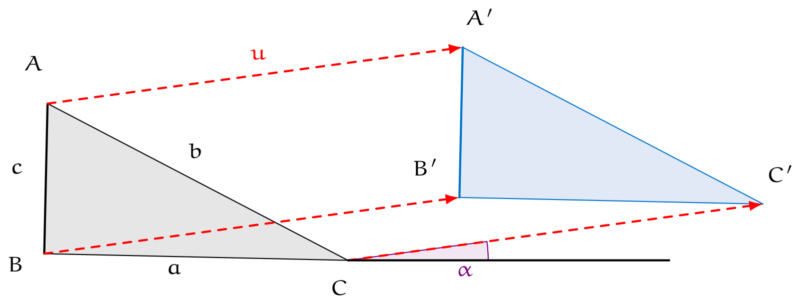
Satz 2.11. Die Hintereinanderausführung zweier Bewegungen ergibt wieder eine Bewegung.

Satz 2.12. Eine Kongruenzabbildung ist eindeutig durch ein nicht-kollineares Punktetripel (A, B, C) und sein Bild (A', B', C') festgelegt.

Anmerkung 2.13. Eine Abbildung eines Dreiecks genügt; jeden weiteren Punktes P kann man aufgrund der Geradentreue und Längentreue der Abbildung eindeutig zu konstruieren.

Translation, Parallelverschiebung

Definition 12. Die *Parallelverschiebung* oder *Translation* ist eine Bewegung, die jeden Punkt der Zeichenebene in dieselbe Richtung um dieselbe Strecke verschiebt.



Jeder Punkt der Figur wird gleichartig verschoben. Man sieht, dass die Längen und die Winkel gleich bleiben. Das ist mit abstandserhaltend in der Definition gemeint, d.h. beliebige zwei Punkte und deren entsprechende Punkte behalten den Abstand bei.

Drehung, Rotation

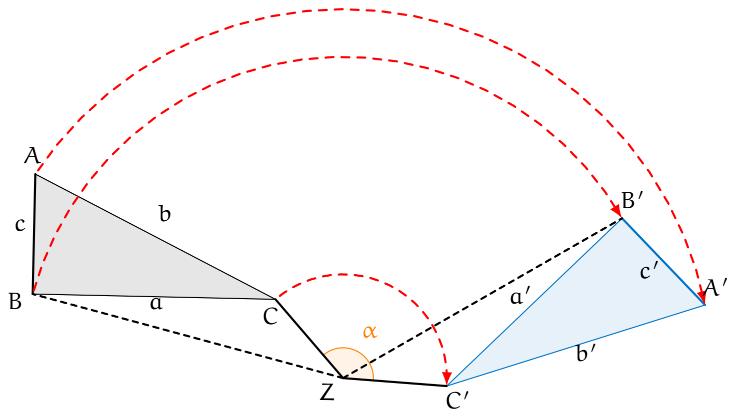
Die Drehung erfolgt um ein Rotationszentrum Z mit einem bestimmen Winkel und Drehsinn. Meist setzt man positive Winkel mit dem Gegenuhrzeigersinn gleich. Die Strecken vom Zentrum zu den Eckpunkten stellen die Radien dar. Der Umlaufsinn des Dreiecks ändert sich nicht.

Definition 13. Eine *Drehung* um den Punkt Z mit dem Drehwinkel α ist eine Abbildung, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zuordnet gemäss:

(1) das Rotationszentrum Z bleibt fix ($Z = Z'$),

(2) für alle anderen Punkte P: Winkel $\angle PMP' = \alpha$ und Abstand $|MP| = |MP'|$.

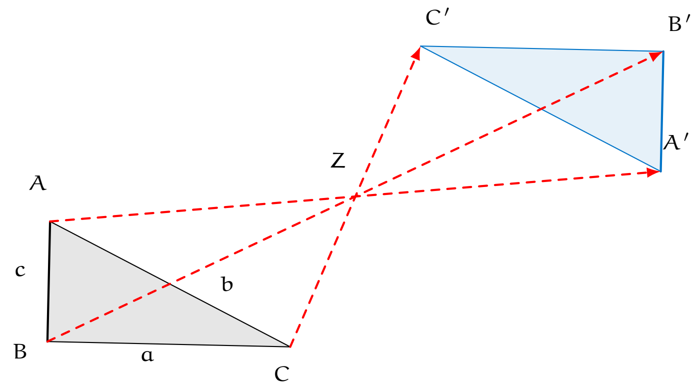
.



Punktspiegelung

Die Punktspiegelung am Punkt Z ist identisch mit einer Rotation der Figur um den Winkel 180°. Die Strecken von Eckpunkt zu Zentrum werden verlängert und dieselben Abstände auf der anderen Seite abgetragen.

Definition 14. Die *Punktspiegelung* ist eine Abbildung, die durch einen Punkt Z (Spiegelpunkt, Zentrum) gegeben ist, der jede Verbindungsstrecke $\overline{PP'}$ zwischen dem Punkt P und seinem Abbild P' halbiert.

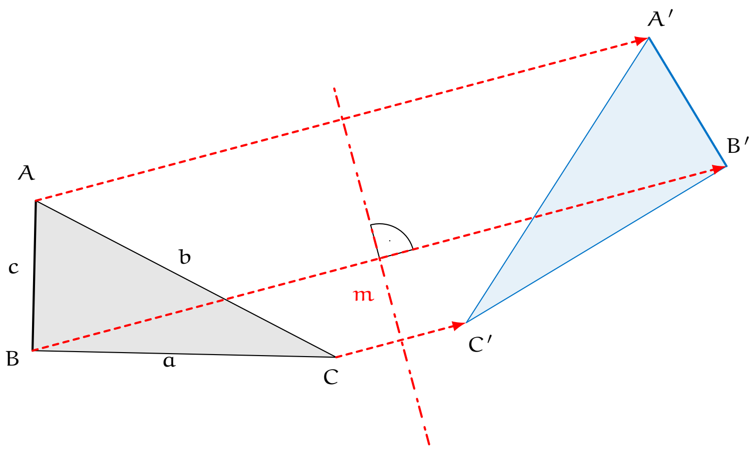


Bei der Punktspiegelung bleibt einzig der Punkt Z von der Abbildung unverändert. Er ist ein sogenannter *Fixpunkt*. Geraden durch den Punkt Z sind *Fixgeraden*, weil sie auf sich selber abgebildet werden. Eine beliebige Gerade g wird auf eine *parallele* Gerade g' abgebildet. Dies kann man alles aus der Abbildung ersehen.

Achsen- oder Geradenspiegelung

Definition 15. Eine *Achsenspiegelung* oder *Geradenspiegelung* ist durch eine Spiegelachse m gegeben. Sie ordnet jedem Punkt A einen Bildpunkt A' zu, der dadurch bestimmt ist, dass die Verbindungsstrecke $\overline{AA'}$ von der Achse m rechtwinklig halbiert wird.

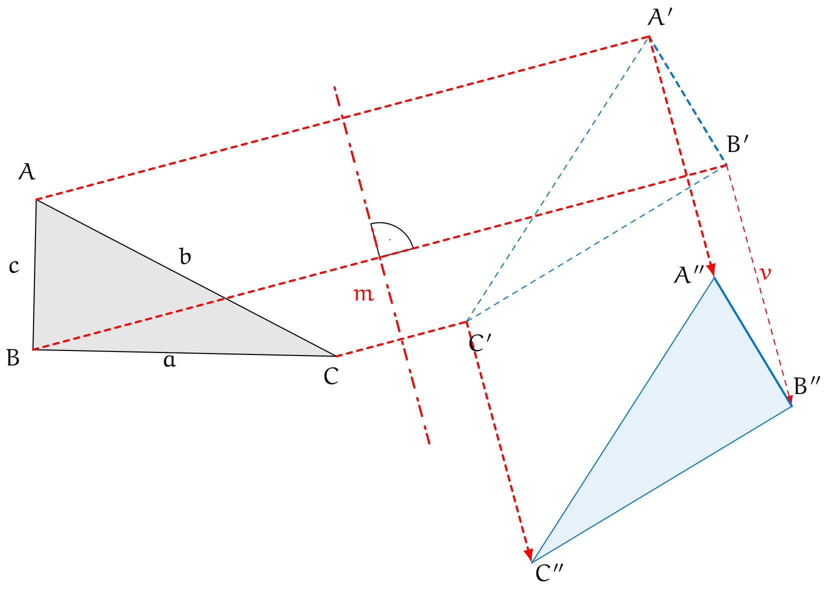
An einer Geraden m wird die Figur senkrecht gespiegelt, indem man



Wichtig 1. Die einmalige Achsenspiegelung ändert den Umlaufsinn der Figur. ⊣

Gleit- oder Schubspiegelung

Die Gleitspiegelung ist eine zusammengesetzte Bewegung. Mit $T_{(v,m)}$ einer Translation der Länge v und paralle zu m und A_m einer Spiegelung an der Geraden m kannt man die Verkettung schreiben als $T_{(v,m)} \circ A_m$.



Aus der Abbildung kann man unschwer erahnen, dass auch die andere Reihenfolgt gilt, also zuerst verschieben und dann spiegeln. Symbolisch

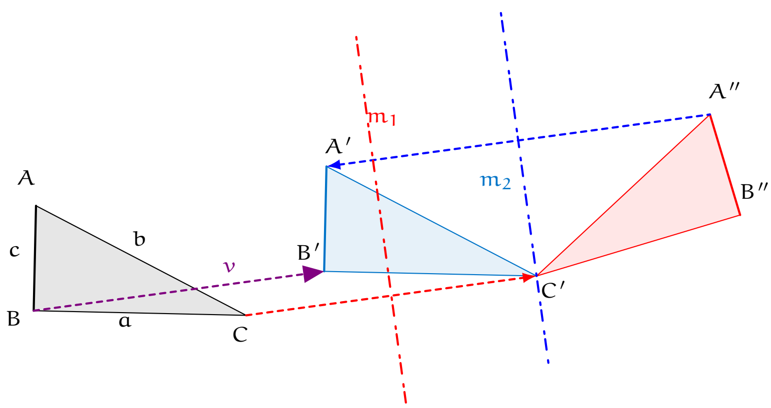
$$T_{(v,m)} \circ A_m = A_m \circ T_{(v,m)}.$$

Reduktionssatz

Satz 2.14. Reduktionssatz Jede Bewegung lässt sich durch nicht mehr als drei Achsspiegelungen darstellen.

Anmerkung 2.15. Es braucht drei Spiegelungen, wenn der Umlaufsinn von Urbild und Bild unterschiedlich sind.

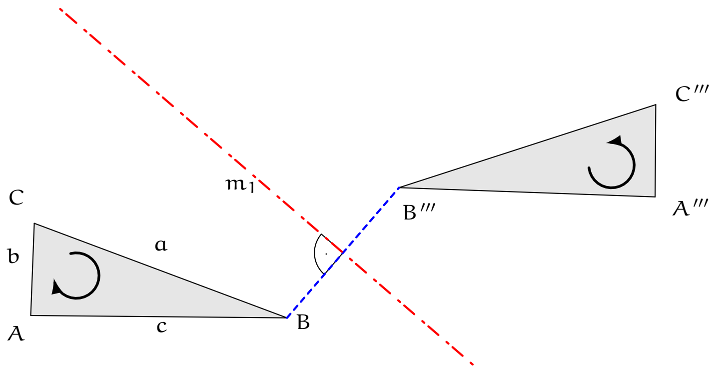
2.16 Übung Das schwarze Dreieck ist mittels Translation ins blau übergeführt worden. Nun spiegeln wir das schwarze an der Mittelsenkrechten m_1 und erhalten das rote mit geändertem Umlaufsinn. Nun spiegeln wir das rote Dreieck an m_2 und erhalten wieder das blaue.



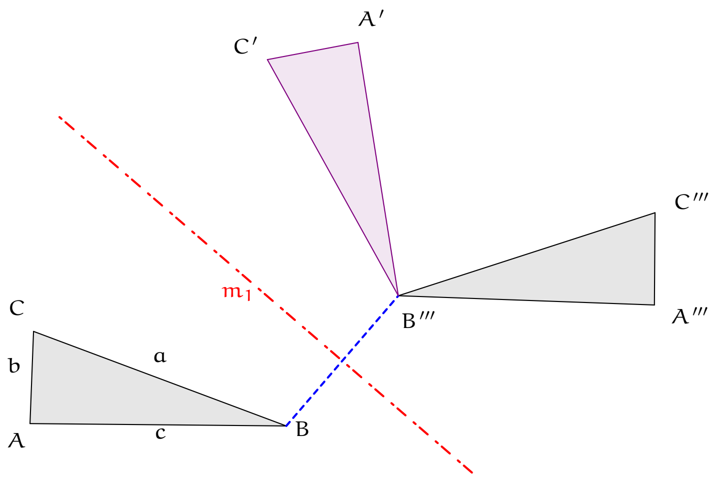
Das Beispiel zeigt, dass man die Translation durch zwei senkrechte Achsspiegelungen ersetzen kann. ◁

Anmerkung 2.17. Der Abstand der Spiegelachsen ist die Hälfte der Länge der Translation.

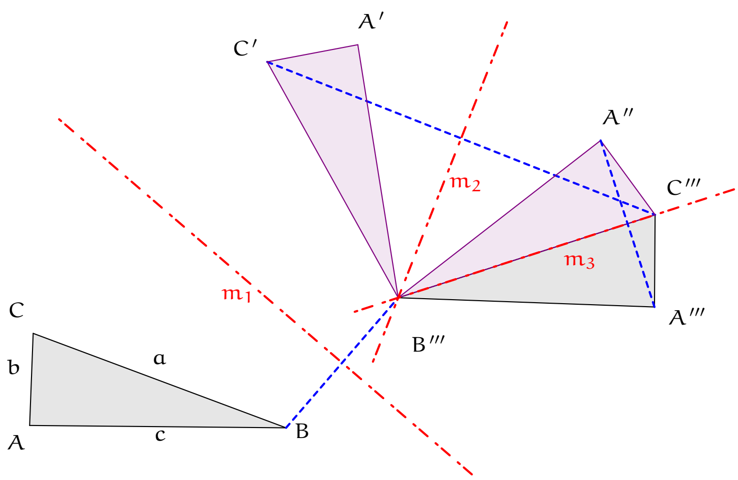
2.18 Übung Wir betrachten zwei Dreiecke, wobei das zweite aus dem ersten hervorgegangen ist, indem es verschoben und geklappt wurde. Durch die Klappung hat die Bildfigur einen anderen Drehsinn als das Urbild.
Wir verbinden zwei entsprechende Punkte, hier B und B''' und zeichnen die Mittelsenkrechte daraus.



Wir spiegeln die Figur und erhalten das Dreieck $\triangle A'B'C'$.

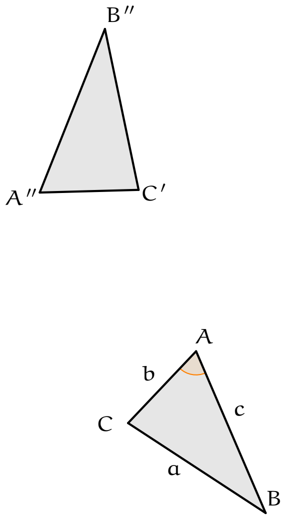


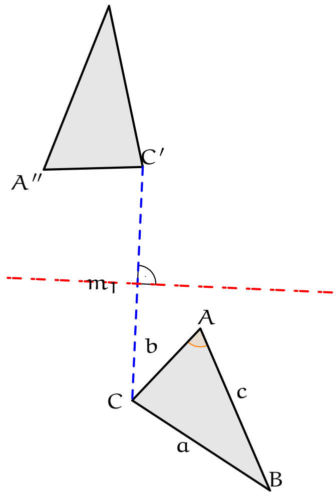
Wir wiederholen die Prozedur, indem wir die Strecke $\overline{C'C'''}$ zeichnen und darauf die Mittelsenkrechte m_2. Wir spiegeln die Figur, so dass C' auf C''' zu liegen kommt. Nun ist $B' = B'' = B'''$ und $C'' = C'''$.



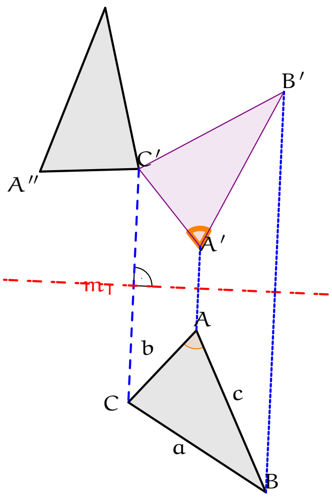
Nun bringen wir auch A'' mit A''' zu Deckung, indem wir an der Mittelsenkrechten m_3 spiegeln. Damit ist die Abbildung überdeckt. Zwei deckungsgleiche Dreiecke lassen sich durch drei Spiegelungen ineinander überführen. ◁

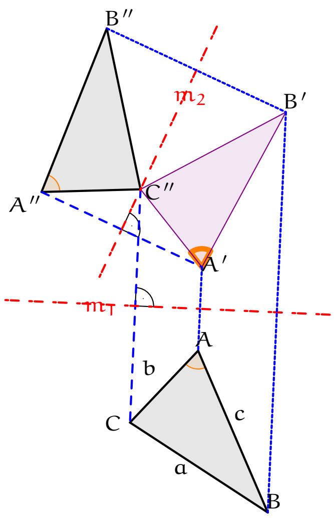
2.19 Übung Wir betrachten zwei Dreiecke mit demselben Umlaufsinn. Da jede Spiegelung den Drehsinn wechselt, braucht es eine gerade Anzahl Spiegelungen zwischen Urbild und Abbild. Wir gehen vor wie bisher und bestimmen eine Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte des Dreiecks.





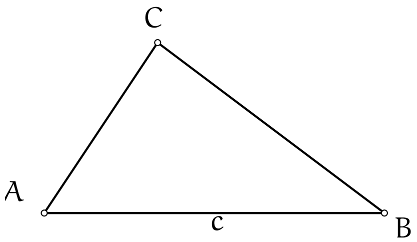
Wir spiegeln das Urbild und erhalten das violette Dreieck, bei dem nun C und C'' zusammenfallen.



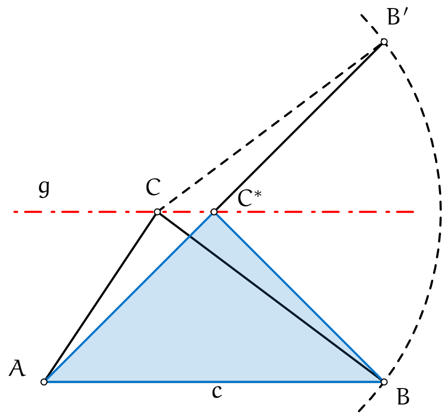


Eine zweite Spiegelung an der Achse m_2 beendet die Übung. Es reichen also zwei Achsspiegelungen aus, um zwei kongruente Dreiecke mit gleichem Drehsinn aufeinander abzubilden. ◁

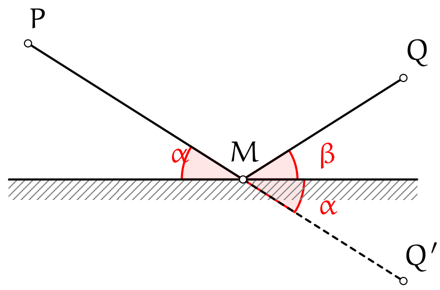
2.4.4 Ein paar Optimierungsaufgaben



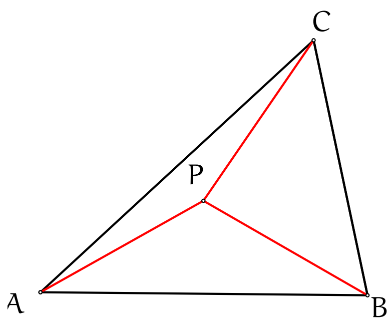
Als erstes Beispiel betrachten wir ein Dreieck. Die Frage lautet, wie sieht das Dreieck aus, das dieselbe Fläche wie das gezeigte hat, die Seite c fest bleibt und den kleinsten Umfang besitzt.
Das Problem kann anders formuliert werden, wenn man die Technik der Scherung erinnert. Bewegt sich der Punkt C auf einer Parallelen zu cm dann bleibt die Fläche gleich, denn nur die Höhe ist massgebend. Wo muss C liegen, damit die Länge $\overline{AC} + \overline{BC}$ am kleinsten wird.



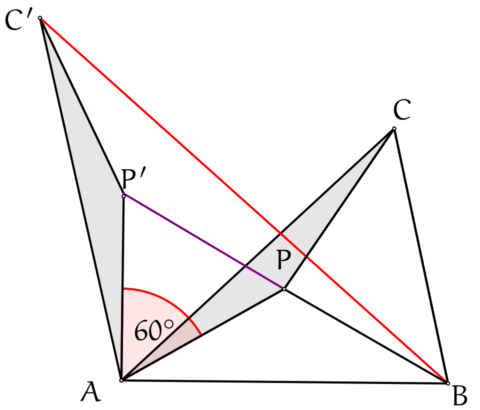
Wir zeichnen die Parallel g zu c durch C. Nun spiegeln wir den Punkt B an g und erhalten den Punkt B'. B und B' besitzen den gleichen Abstand zu C. Somit bildet der Streckenzug ACB' die Summe der beiden Dreiecksseiten ab. Nun sieht man sofort, dass die Strecke $\overline{AB'}$ kürzer ist als der Streckenzug, ja sie ist die kürzeste Verbindung überhaupt. Deshalb ist der Schnittpunkt von $\overline{AB'}$ mit g, also C^* der gesuchte Punkt. Wie man erkennt, ist das gesuchte Dreieck ein gleichschenkliges.



Hinter dieser Betrachtung steckt der *Satz von Heron*, der aus der Optik stammt. Danach nimmt das Licht von einem Punkt P zu Q immer den kürzesten Weg, und über Spiegel folgt, dass der Einfallswinkel α eines einfallenden Lichtstrahls auf eine Oberfläche genau so gross ist wie der Ausfallswinkel β, oder umgekehrt.
Wir betrachten ein zweites Beispiel. In einem spitzen Dreieck befindet sich ein Punkt P. Er soll so gewählt werden, dass die Summe seiner Abstände zu den Ecken möglichst klein ist. Das ist ein Minimierungsproblem.



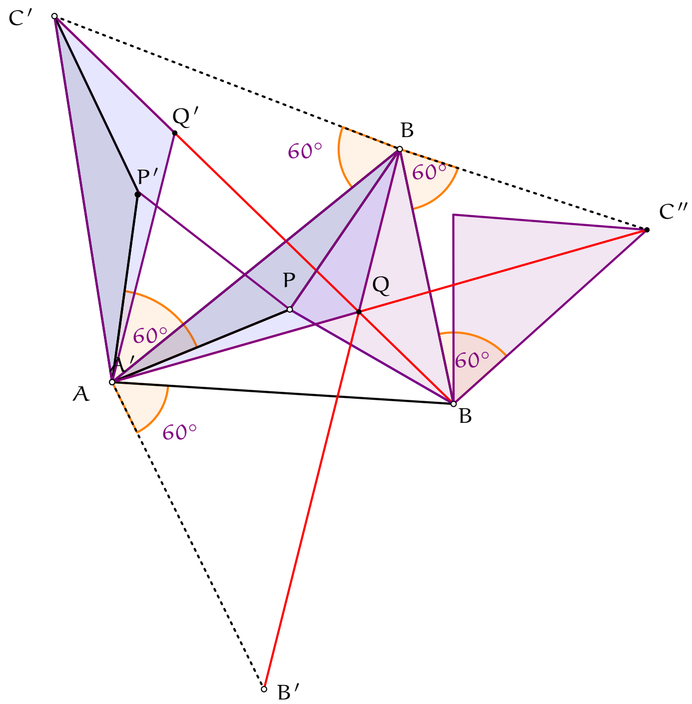
Durch den Punkt P mit seinen Verbindungslinien zu den Ecken entstehen drei Teildreiecke, wobei immer zwei Verbindungslinien zu einem Teildreieck gehören. Wenn wir nun ein Teildreieck um 60° nach aussen drehen, dann entsteht ein gleichseitiges Dreieck $\triangle APP'$. Der Streckenzug $BPP'C'$ besteht aus den drei Verbindungslinien $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$. Der Streckenzug ist länger als die Strecke $\overline{BC'}$. Wenn P auf dieser Linie läge, dann wäre das Minimum erreicht.



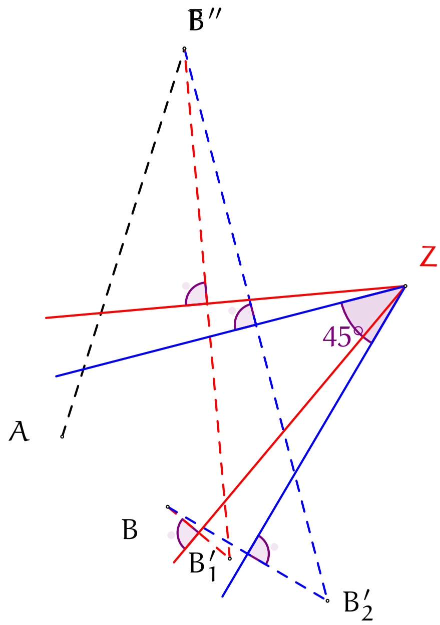
Nun wenden wir dies Methode auf das Dreieck △PBC an und rotieren es um 60° im Uhrzeigersinn. Wieder erhalten wir den Streckenzug mit der Länge der drei Verbindungsstrecken sowie die kürzeste Verbindung.

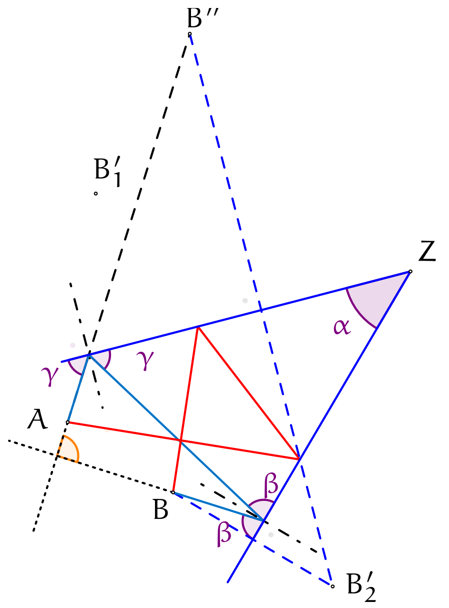
Die zwei kürzesten Verbindungen schneiden sich im Punkt Q. Das ist der gesuchte Punkt. Wir sehen, dass die Verbindungslinie $\overline{B'C}$ ebenfalls durch den Punkt Q geht.

Wenn wir nun wiederum das Dreieck △ABQ nach aussen rotieren, dann kommt das Abbild Q′ auf der kürzesten Verbindungslinie zu stehen.



Wir zeigen hier noch die Eigenschaften des sogenannte Doppelspiegels. Wir sehen in der linken Abbildung, dass von A aus B gleich gesehen wird, unabhängig davon, ob der Winkelspiegel sich um Z gedreht hat. In beiden Stellungen (blau und rot) sieht man von A den Punkt B″ gleich.



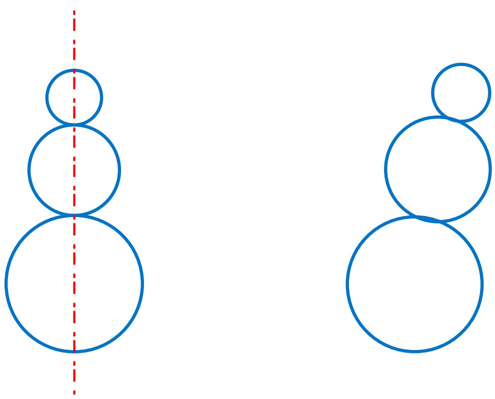


Aus dem Satz des Heron wissen wir, dass das der Lichtgang von A nach B der kürzeste Weg ist. In der rechten Abbildung sieht man die zwei möglichen Wege: einmal wird B nach unten gespiegelt und das Abbild dann nach oben. Daraus folgt der hellblaue Weg. Dann B zuerst nach oben gespiegelt und dann das Abbild nach unten am unteren Spiegel. Daraus folgt der rote Weg. Der blaue Weg ist kürzer. Denn der erste Reflexionspunkt oben liegt zusammen mit dem Zentrum auf derselben Seiten von $\overline{AB}$. Überlege.

2.5 Symmetrien

Definition 16. Mit dem Begriff *Symmetrie* bezeichnet man die Eigenschaft, dass ein geometrische Figur durch Bewegungen (Spiegelungen) auf sich selbst abgebildet werden kann, also unverändert erscheint.

Visuell erkennt man schnell die symmetrische Eigenschaft einer Figur. Beim stilisierten Schneemann der Abbildung ist die linke Figur symmetrisch und die rechte nicht. Man nennt die fehlende Symmetrie dann “asymmetrisch”. Symmetrische Figuren und Objekte werden oft symmetrisch entworfen, man denke an Bauwerke oder speziell an Ornamente. Symmetrie wird als ästhetisch angenehm empfunden. Oft gibt es einen praktischen Nutzen der Symmetrie, weil man ein Objekt einfacher handhaben kann.



achsensymmetrisch asymmetrisch

Man nennt die verschiedenen Arten von Symmetrie nach der Art von Kongruenzabbildung (Bewegung) und unterscheidet:

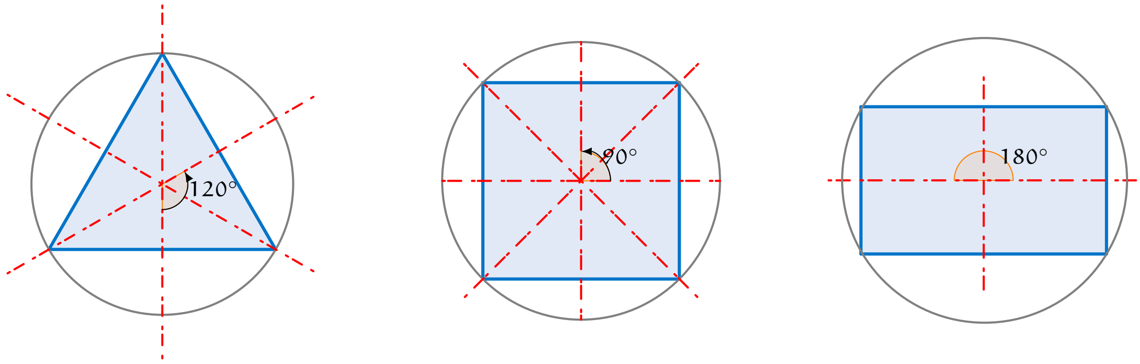
- Achsensymmetrie oder axiale Symmetrie,

- Punktsymmetrie oder zentrische Symmetrie und
- Rotationssymmetrie (auch Drehsymmetrie).

2.5.1 Axiale Symmetrie

Definition 17. Eine Figur heisst *achsensymmetrisch*, wenn sie durch die senkrechte Achsenspiegelung an ihrer Symmetrieachse auf sich selbst abgebildet wird.

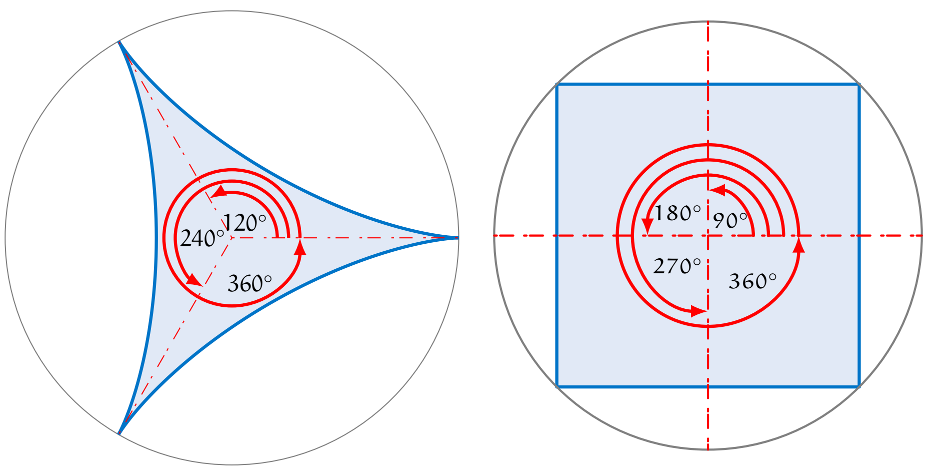
Anmerkung 2.1. Vor und nach der Spiegelung bleibt die Figur als solche “gleich”.



2.5.2 Rotationssymmetrie

Definition 18. Eine ebene Figur ist *rotationssymmetrisch*, wenn sie einen zentralen Punkt besitzt, und die Figur auf sich selbst abgebildet wird, wenn man sie um diesen Punkt dreht.

In der nachfolgenden Abbildung sieht man zwei rotations- oder drehsymmetrische Figuren. Die sternförmige Figur hat drei Drehsymmetrien, nämlich die Rotationen um die Winkel 120°, 240° und 360°. Das Quadrat hat deren vier, nämlich Vielfache von 90°. Wir halten fest, dass Figuren sowohl rotationssymmetrisch als auch achsensymmetrisch sein können. Das Quadrat hat vier Achsensymmetrien und vier Rotationssymmetrien.

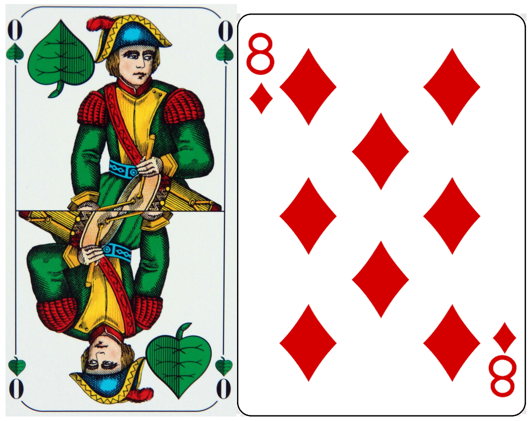


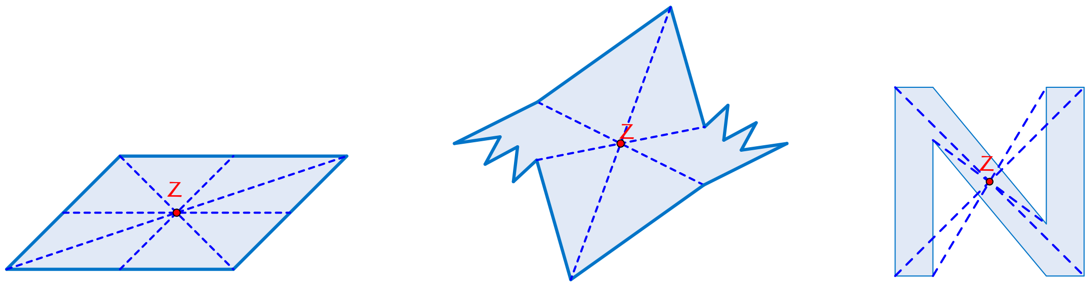
Satz 2.2. Regelmässige n-Ecke (mit $n > 2$) haben n Achsensymmetrien und n Rotationssymmetrien. Ist n gerade, dann ist das n-Eck auch punktsymmetrisch.

2.5.3 Zentrische Symmetrie, Punktsymmetrie

Definition 19. Eine Figur heisst *punktsymmetrisch*, wenn sie bei einer Rotation um 180° um ein Symmetriezentrum Z wieder in sich selbst übergeht.

Das bekannteste Beispiel von punktsymmetrischen Figuren sind die Spielkarten. Durch diese Eigenschaft sehen zwei Spieler, die sich gegenübersitzen, dieselbe Figur. Einzig die Asse von nicht punktsymmetrischen "Farben", z.B. Herz, Schaufel/Pik und Kreuz, bei französischen Karten sind nicht ganz punktsymmetrisch.
Der typische Vertreter einer punktsymmetrischen Figur ist das Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt als Zentrum. Es gibt einige Gross-Buchstaben, die punktsymmetrisch sind, etwa N, Z, S und O.





2.6 Ähnlichkeitsabbildung

Die Ähnlichkeit ist eine Verallgemeinerung der Kongruenz. Alle kongruenten Figuren sind ähnlich, aber nicht alle ähnlichen Figuren sind kongruent.

Definition 20. Zwei Figuren sind genau dann zueinander *ähnlich*, wenn sie durch eine Ähnlichkeitsabbildung ineinander überführt werden können.

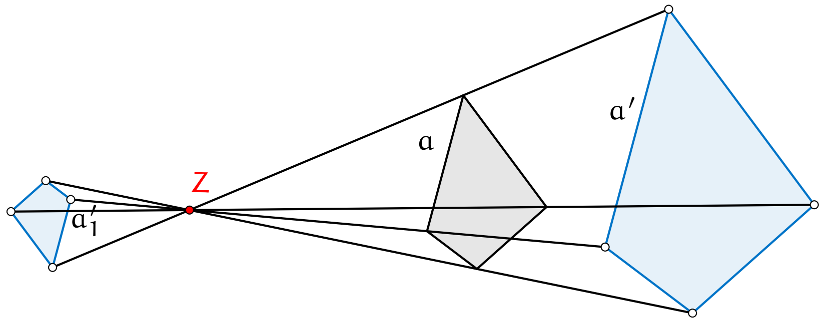
2.6.1 Zentrische Streckung

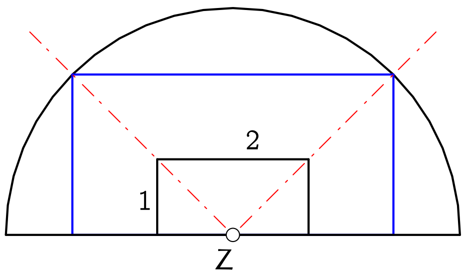
Definition 21. Eine *zentrische Streckung* ist eine Abbildung mit einem ausgezeichneten Punkt Z, dem Zentrum, die einem Punkt $P \neq Z$ einen Punkt X' so zuordnet, dass

(1) X' auf der Gerade $\overline{ZX}$ liegt und

(2) der Abstand $|X'Z| = k|XZ|$ für eine feste Zahl $k \neq 0$ ist.

In der folgenden Abbildung sehen wir die zentrische Streckung mit $k = 1.5$, einer Vergrösserung der Figur nach rechts und die Streckung mit $k = -0.5$. Wegen des negativen Vorzeichens wird die Figur nach rückwärts verlegt und wegen $k < 1$ verkleinert. Aufgrund der Strahlensätze ist $\frac{a'_1}{a} = 0.5$ und $\frac{a'}{a} = 1.5$.

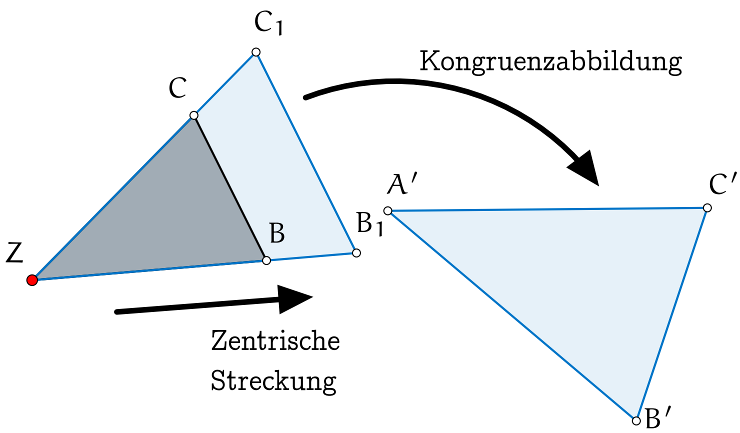




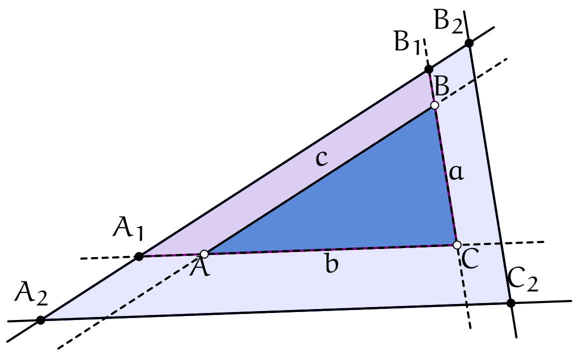
2.1 Übung Wir schreiben einem Halbkreisbogen ein Rechteck ein, dessen Seiten im Verhältnis 2:1 zueinander stehen.
Wir platzieren ein Rechteck mit dem richtigen Seitenverhältnis symmetrisch zum Mittelpunkt Z und strecken es dann zentrisch, bis es den Kreisbogen berührt. Die zentrische Streckung lässt das Seitenverhältnis der Abbildung gleich. ◁

Satz 2.2. Jede Ähnlichkeitsabbildung kann man als Verkettung einer Kongruenzabbildung mit einer zentrischen Streckung darstellen.

Das heisst, es gibt eine geometrische Abbildung, die sich aus zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen (also Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen) zusammensetzen lässt und die eine Figur auf die andere abbildet. Ähnlichkeit erweitert somit die Kongruenz (Deckungsgleichheit) von Figuren um die Möglichkeit der Streckung.



In der folgenden Abbildung sieht man Dreiecke, die in drei (und damit auch zwei) Winkeln übereinstimmen und ähnlich sind. Die entsprechenden Seiten vom Dreieck $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ sind alle mit derselben Proportionalität gestreckt.



Satz 2.3. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in

(1) dem Verhältnis der Längen der drei Seiten,

(2) dem Verhältnis der Längen zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel,

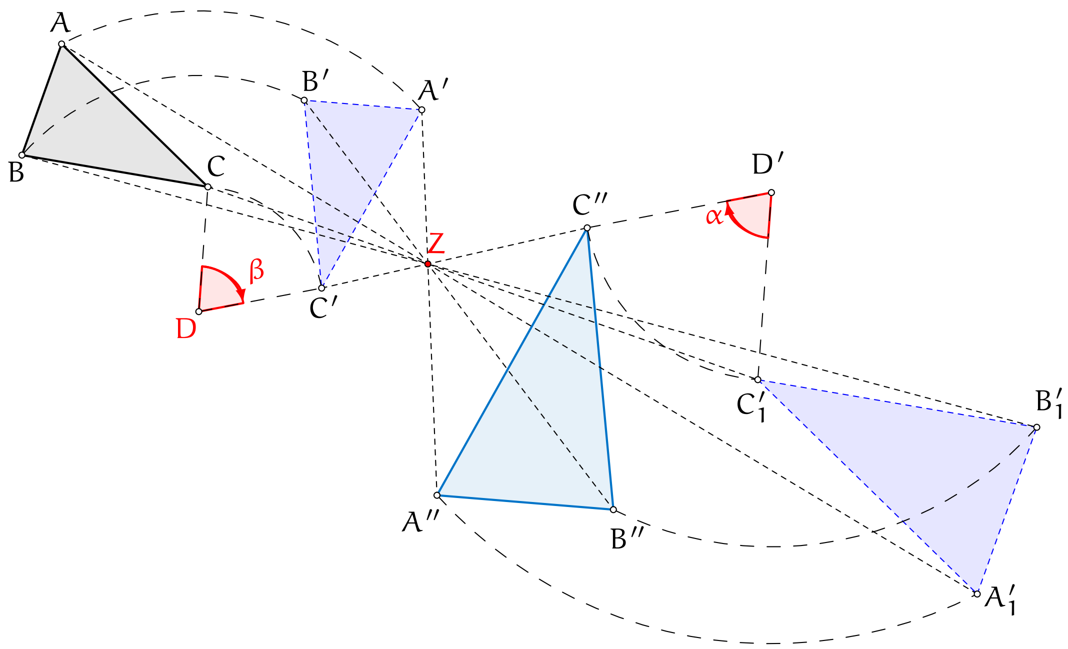
(3) dem Verhältnis der Längen zweier Seiten und dem der größeren dieser Seite gegenüberliegenden Winkel,

(4) zwei gleichliegenden Winkeln.

2.6.2 Ein paar verkettete Abbildungen

Die Ähnlichkeitsabbildung ist die Kongruenzabbildung erweitert um die zentrale Streckung. Deshalb ist eine der verketteten Abbildung hier eine Streckung. (Streckung beinhaltet immer auch die Stauchung, je nach dem. ob der Streckungsfaktor k grösser oder kleiner als 1 ist.)

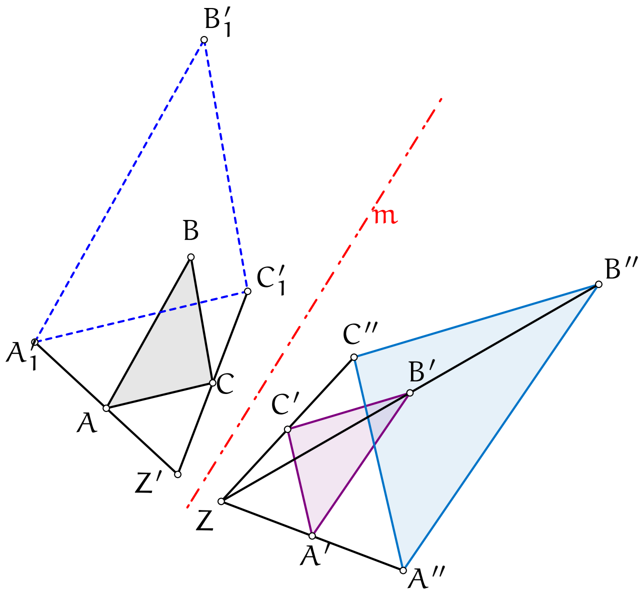
Drehstreckung



Wie man aus der Figur ersehen kann, ist die Drehstreckung mit der Streckdrehung identisch. Dabei darf man allerdings nicht vernachlässigen, dass alle Punkte abgebildet werden. Insbesondere geht D in D' über $\alpha = -\beta$, der Drehsinn der Rotation wechselt.

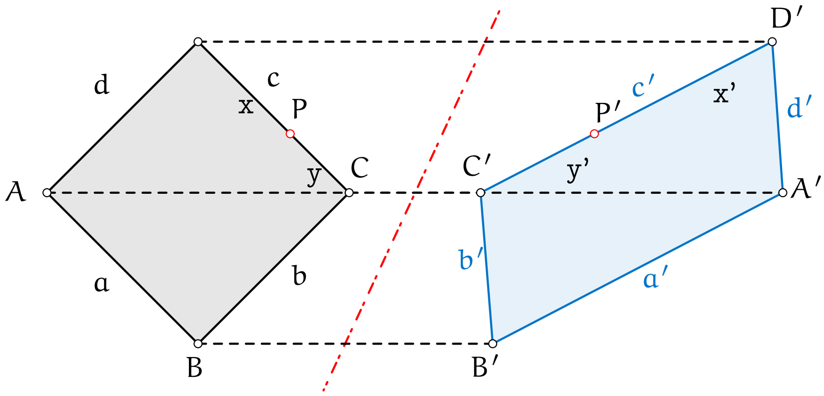
Klappstreckung

Wie der Name schon verrät, wird hier eine Klappung, also Achsenspiegelung, mit einer zentrischen Streckung kombiniert. Die zwei Abbildungen kann man in der Reihenfolge vertauschen, wobei das Streckungszentrum Z ebenfalls mittransformiert werden muss.



2.7 Affine Abbildung

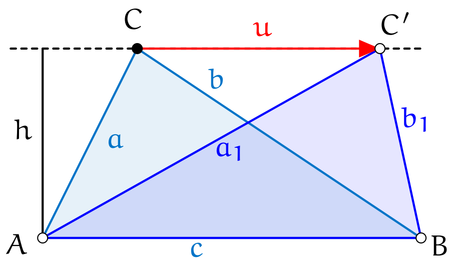
Wir betrachten eine nicht-gerade Achsenspiegelung, d.h. eine, bei der die Strahlen von Urbild zu Abbild nicht senkrecht auf der Spiegelachse liegen. Man nennt diese Abbildung eine Schrägspiegelung. Damit ist diese Abbildung keine Kongruenzabbildung. Aber es gilt erstaunlicherweise: Die Schrägspieglungen sind *geraden- und flächentreue* affine Abbildungen und somit spezielle affine Abbildungen.

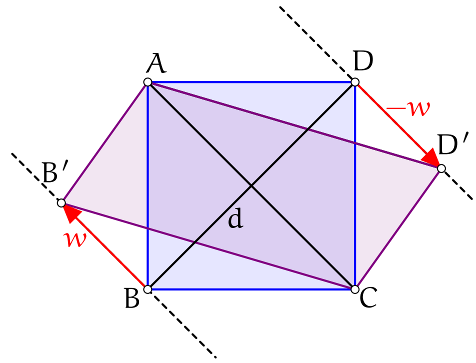


Es werden wiederum die entsprechenden Abstände zur Achse übertragen. Das Abbild erscheint verzerrt. Wir betrachten den Punkt P und sein Abbild P'. Ersterer liegt auf der Strecke c, letzterer auf c'. Nun teilen die beiden Punkte die entsprechenden Strecken im gleichen Verhältnis. Es gilt

$$x : y = x' : y'.$$

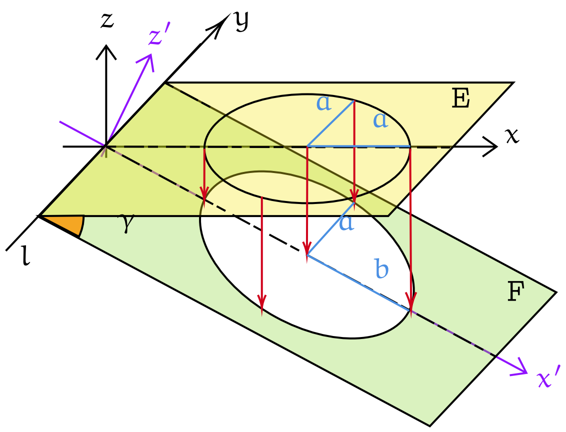
Als weiterer Spezialfall entpuppt sich die Scherung. Unter einer *Scherung* versteht man eine affine Abbildungen der Ebene auf sich selbst, bei denen der Flächeninhalt erhalten bleibt. Bei einer Scherung bleibt eine Gerade der Ebene (die Fixpunktgerade oder Achse der Scherung) fix, das heißt, jeder Punkt dieser Geraden wird auf sich abgebildet.

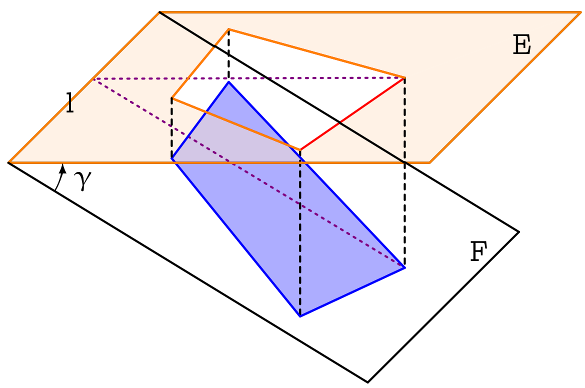




Alle Punkte, die nicht auf Scherachse liegen, werden parallel zur Achse verschoben, dabei ist die Länge des Verschiebungsvektors eines Punktes proportional zum Abstand dieses Punktes von der Achse.

Eine allgemeine affine Abbildung erreicht man mit einer Parallelprojektion auf eine gedrehte Ebene. Man stelle sich eine Schablone vor, die von weit her beschienen wird und ein Bild auf eine untenliegende Ebene F wirft.





Wichtig 2. Bei der affinen Abbildung werden Kreise zu Ellipsen und Rechtecke zu Parallelogramme. ⊣

Satz 2.1. Jede affine Abbildung ist:

(1) geradentreu,

(2) parallelentreu (Parallelen bleiben parallel) und

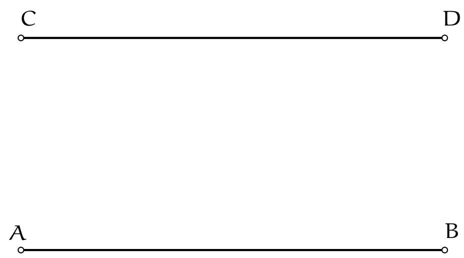
(3) teilverhältnistreu.

Zusammenfassen kann man folgende Tabelle zusammenstellen. Die Eigenschaften nennt man *Invarianten* der Abbildung.

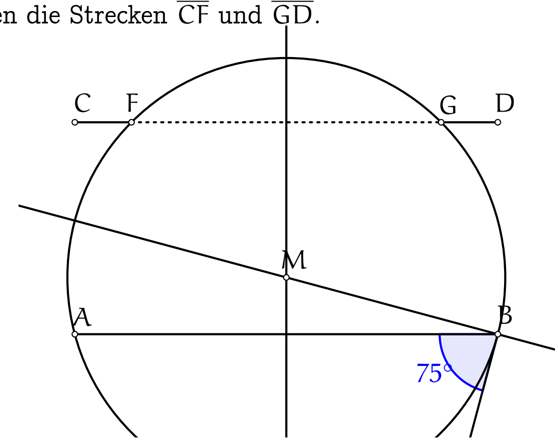
Kongruenzabbildung	Ähnlichkeitsabbildung	Affine Abbildung
geradentreu	geradentreu	geradentreu
parallelentreu	parallelentreu	parallelentreu
teilverhältnistreu	teilverhältnistreu	teilverhältnistreu
winkeltreu	winkeltreu	–
flächentreu	–	(flächentreu)
abstandstreu	–	–
Bewegungen	+Streckung	+Streckung+Scherung

Aufgaben

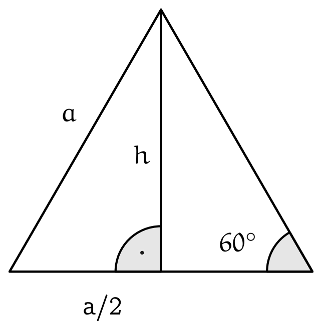
0.2 An einer Mauer $\overline{CD}$ soll eine Kamera montiert werden, welche die Wand $\overline{AB}$ vollständig erfasst. Die Kamera hat einen Öffnungswinkel von 75°. Bestimme die Stellen, die für die Kamera geeignet sind.



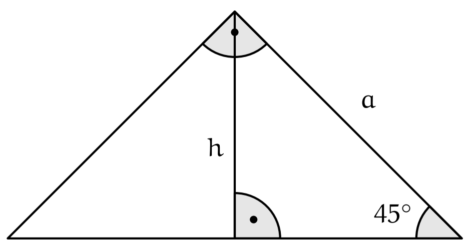
2 Wir müssen einen Fasskreis über $\overline{AB}$ zeichnen, der den Peripheriewinkel von 75° aufweist. Die Kamera darf nicht im Kreis liegen, denn dort ist der Winkel grösser als der Peripheriewinkel. Somit sind die geeigneten Stellen die Strecken $\overline{CF}$ und $\overline{GD}$.



0.3 Bestimme die Höhe von gleichseitigem und von gleichschenklig-rechwinkligem Dreieck.



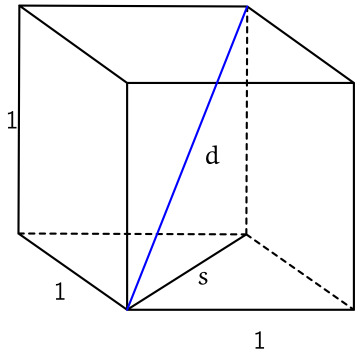
3 **(a)** Mit dem Pythagoras folgt: $h^2 = a^2 - (a/2)^2 = 3/4a^2$ und



somit $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. **(b)** Mit dem Satz des Pythagoras folgt $h^2 + h^2 = a^2$ und $h^2 = a/2$ womit $h = \frac{a}{\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

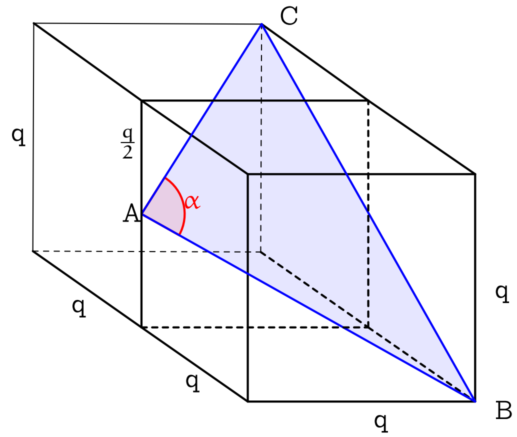
0.4 Bestimme die Länge der Diagonale des Einheitswürfels.

4 Sie Diagonale s ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras als $s^2 = 1{+}1 = 2$ und $s = \sqrt{2}$. Dia Diagonale d ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras mit den Katheten $s = \sqrt{2}$ und 1, also $d^2 = 2 + 1 = 3$ und



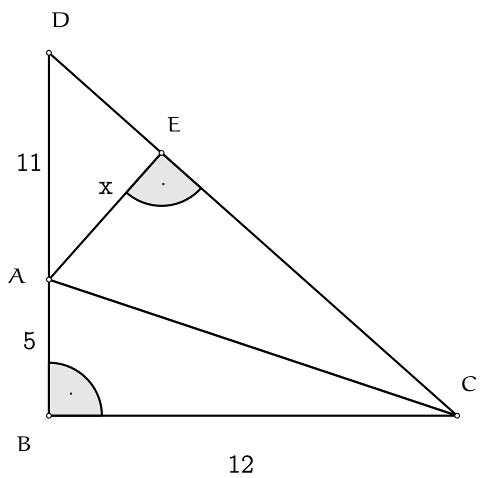
damit $d = \sqrt{3}$.

0.5 Ist der Winkel α der Figur ein rechter?



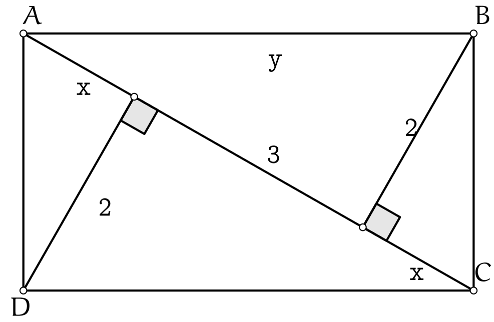
5 Falls die Seitenlängen den Satz des Pythagoras erfüllen, ist der Winkel ein rechter. Die Seiten c und b sind gleich lang. Die Hypothenuse a ist $a^2 = (2q)^2 + q^2 = 5q^2$. Die Seite c ist bei zweimaligem Pythagoras $c^2 = b^2 = q^2 + q^2 + (\frac{q}{2})^2 = 2.25q^2$. Damit also $c^2 + b^2 = 2 \cdot 2.25q^2 = 5q^2$. Somit ist also $a^2 = c^2 + b^2$ und α ein rechter Winkel.

0.6 Bestimme die Länge x. (Zeichnung nicht massstäblich.) Voraussetzung: Gleichungen lösen können.



6 Wir berechnen mit dem Satz des Pythagoras die Längen $\overline{AC} = b$ und $\overline{CD} = d$. Es ist $b^2 = 25 + 144 = 169$ und somit $b = 13$. Analog $d^2 = (5+11)^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$ und $d = 20$. Es sei $\overline{DE} = y$. Damit folgen mit Pythagoras die zwei Gleichungen: $x^2 + (20-y)^2 = 13^2$ und $x^2 + y^2 = 121$. Subtrahiert man die zwei Gleichungen, folgt $(20^2 - 40y) = 13^2 - 121 = 169 - 121 = 48$ oder $400 - 48 = 40y$, woraus $10y = 100 - 12 = 88$ und $y = 8.8$. Damit $x^2 = 121 - 8.8^2 = 43.56$ und $x = 6.6$.

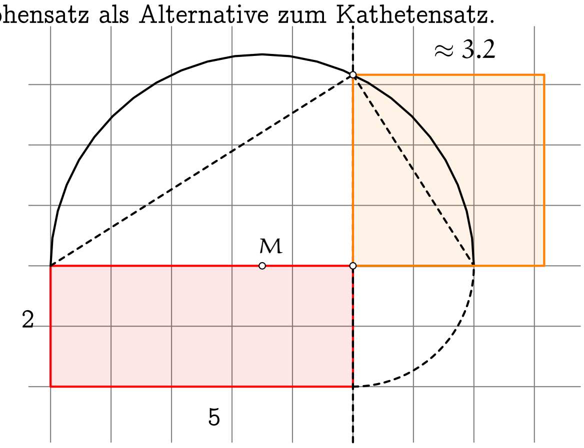
0.7 Berechne die Länge x und y. (Quadratische Gleichung!)



7 Die vier Teildreiecke sind alle ähnlich, haben also dieselben Seitenverhältnisse. Somit gilt z.B. $x : 2 = 2 : (x+3)$. Daraus folgt $x(x+3) = 4$ und quadratisch ergänzt $(x+1.5)^2 - 2.25 = 4$ und $(x+1.5)^2 = 6.25$. Damit $x + 1.5 = \pm\sqrt{6.25} = \pm 2.5$, woraus $x = 1$ als einzige zulässige Lösung. Mit dem Pythagoras folgt $y^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ und $y = \sqrt{20} \approx 4.472$.

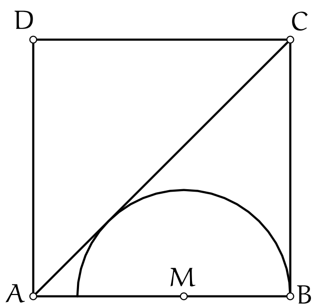
0.8 Ein Rechteck mit den Seiten $a = 5$ und $b = 2$ soll zeichnerisch in ein Quadrat gleicher Fläche transformiert werden. Wie gross ist die Quadratseite rechnerisch?

8 Wir verwenden den Höhensatz als Alternative zum Kathetensatz.

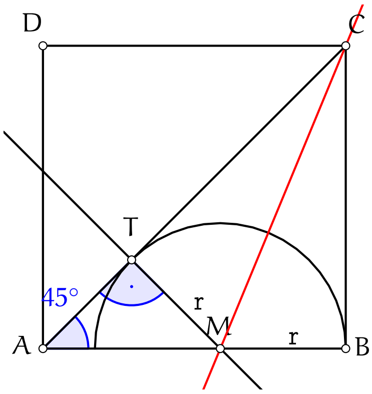


Mit dem Taschenrechner folgt $\sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10} \approx 3.162$.

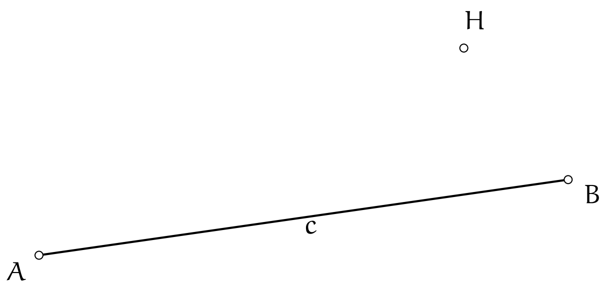
0.9 Konstruiere den Halbkreismittelpunkt und berechne die Länge $\overline{AM}$, wenn die Seite des Quadrats 6 beträgt.



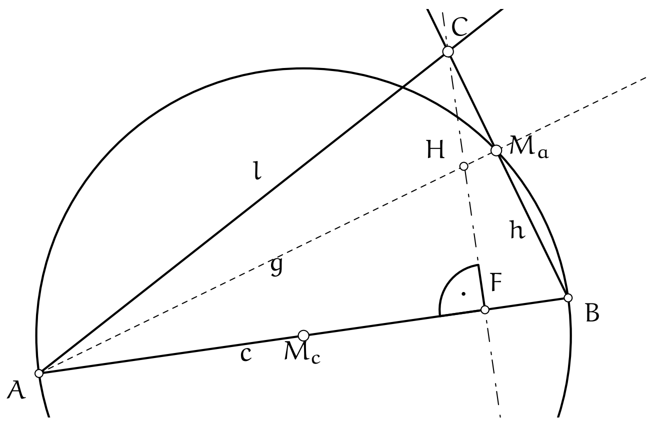
9 Der Halbkreis ist der halbe Inkreis des halben Dreiecks $\triangle ABC$. Deshalb liegt der Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden w_c (rot). Das Dreieck $\triangle AMT$ ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges. Die Hypothenuse ist $\sqrt{2}r$. Somit gilt $6 = \sqrt{2}r + r$ oder $r = \frac{6}{1+\sqrt{2}} = 2.485$.



0.10 Von einem Dreieck sind die Ecken A und B sowie der Höhenschnittpunkt H gegeben. Konstruiere das Dreieck.

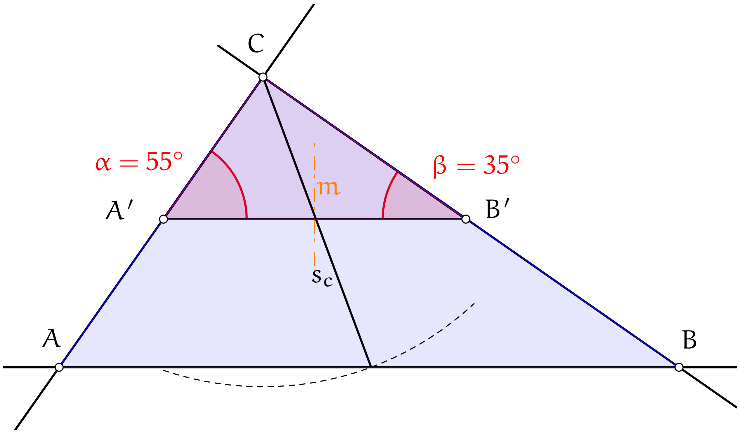


10 Die Höhenlinien stehen senkrecht auf den Seiten. Deshalb zeichnet man den Thaleskreis über c. Den Kreis schneidet man mit dem Strahl von A durch H im Punkt M_a. Die Seite a liegt auf dem Strahl h von B durch M_a. Nun fällt man von H das Lot auf c und schneidet dieses mit h in C. Damit ist das Dreieck gefunden.

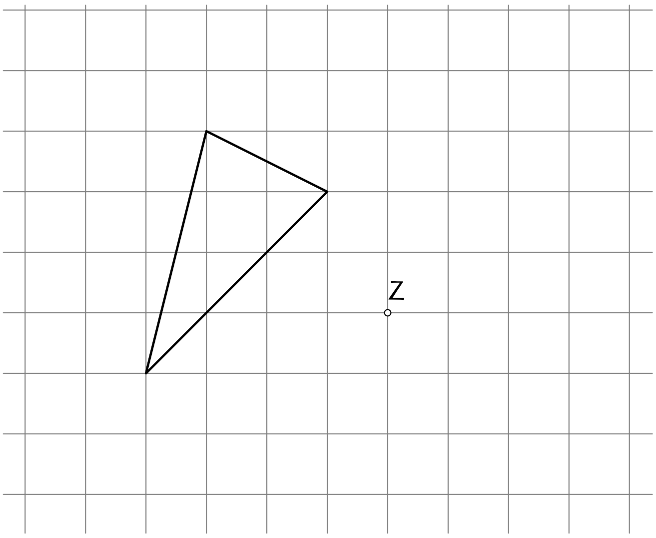


0.11 Konstruiere das Dreieck, von dem bekannt sind: $\alpha = 55°$, $\beta = 35°$ und $s_c = 5cm$. s_c ist die Schwerelinie oder Seitenhalbierende.

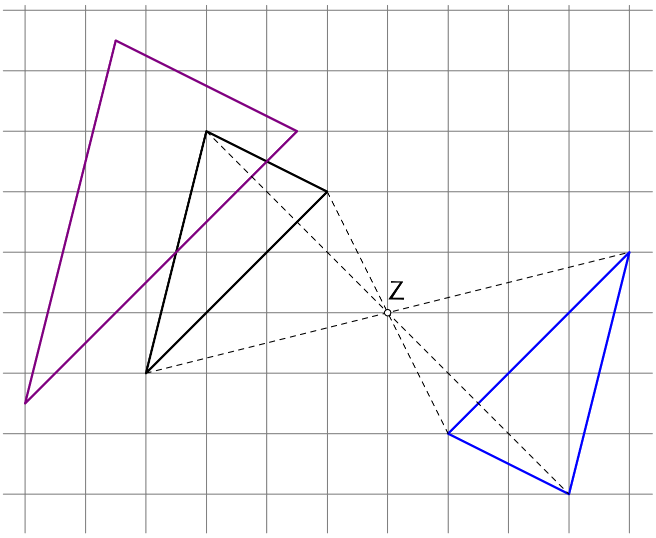
11 Wir zeichnen ein beliebiges Dreieck mit den vorgegebenen Winkeln und strecken dann das Dreieck, so dass s_c dann die geforderte Länge aufweist.



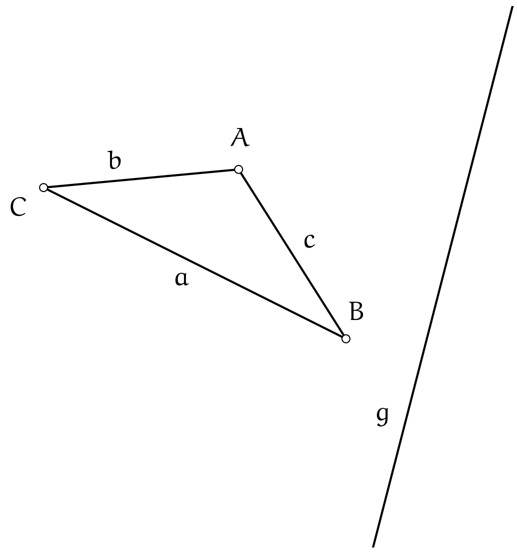
0.12 Spiegle das Dreieck am Punkt Z mit einem Faktor $k_1 = 1$ und $k_2 = -1.5$.



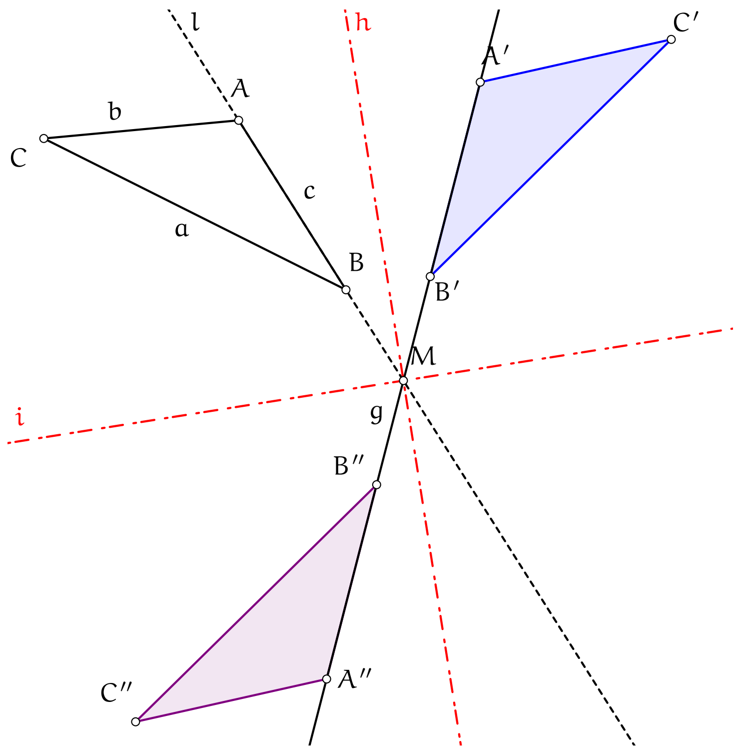
12 Das Resultat sieht wie folgt aus, blau $k = 1$ und violett $k = -1.5$:



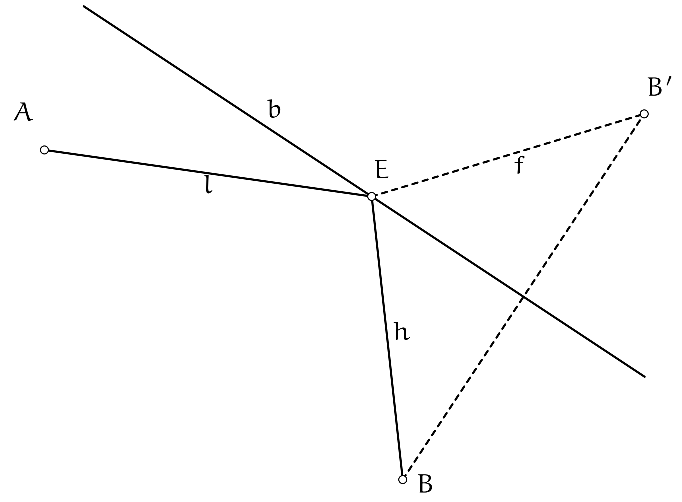
0.13 Spiegle das Dreieck ABC so, dass die Seite c auf die Gerade g zu liegen kommt.



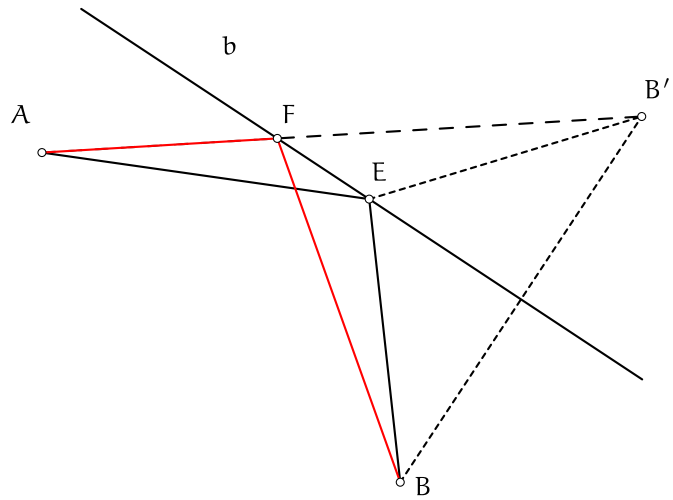
13 Wir verlängern die Seite c, bis sie mit der Geraden g sich in M trifft. Dann zeichnen wir die zwei Winkelhalbierenden h und i ein. Dies sind die zwei Spiegelachsen.



0.14 Eine Reiter mit Pferd möchte von A nach B gelangen, wobei er am Bach b das Tier tränken möchte. Welches ist der kürzeste Weg, den er reiten kann? Beachte, dass h und f jeweils gleichlang sind.



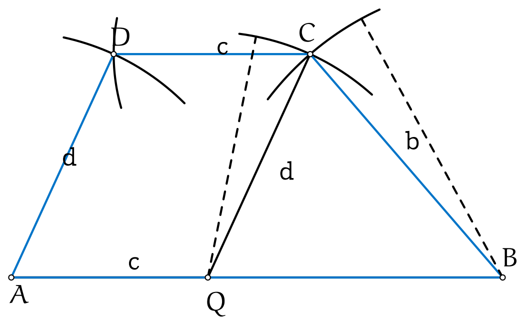
14 Man kann das Problem umformen: Wo muss der Punkt E liegen, damit die Strecke am kürzesten ist? Da B (über E) und B' von A gleich weite entfernt sind, kann man direkt die kürzeste Strecke nach B' suchen. Das ist die Gerade $\overline{AB'}$. Da die Hypothenuse stets kleiner ist als die Summe der Katheten, siehe



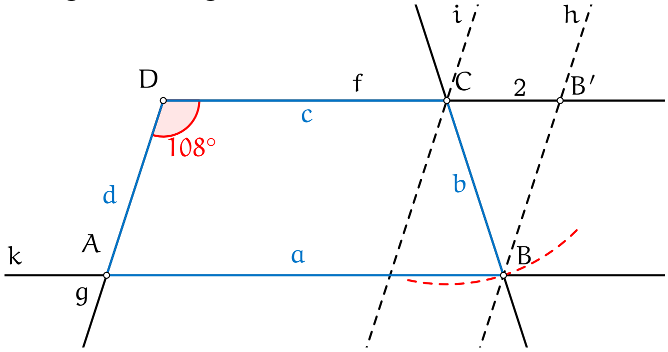
Dreieck $\triangle AEB'$, ist die Strecke über F gefunden.

0.15 Konstruiere ein Trapez ($a \parallel c$) aus:
(a) den Seiten $a = 10$, $b = 6$, $c = 4$ und $d = 5$ und $\angle ADC = 108°$.
(b) aus $a = 7$, $b = d$, $c = 5$ und

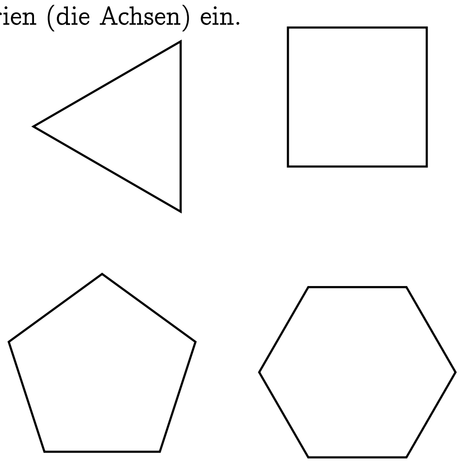
15 **(a)** Wir zeichnen die Seite a und tragen darauf die Seitenlänge c ab und erhalten den Punkt Q. Wir schneiden den Bogen der Länge d um Q mit dem Bogen um B der Länge b und erhalten den Punkt C. Wir schneiden in D den Bogen um C der Länge c mit demjenigen um A der Länge d.



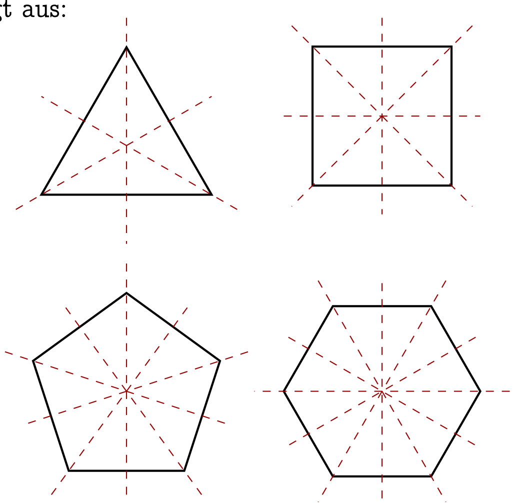
(b) Wir zeichnen die zwei Seiten c und d im Winkel von $108°$. Wir verlängern die Seite c um die Differenz $a - c = 2$ und erhalten den Punkt B'. Wir zeichnen eine Parallele h zur Seite d durch B'. In C schlagen wir den Bogen der Länge b und schneiden die Gerade h in B.



0.16 Zeichne die Axialsymmetrien (die Achsen) ein.

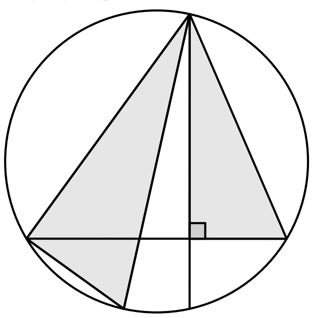


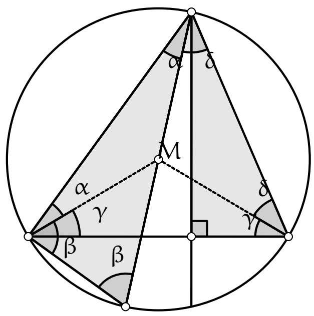
16 Die Lösung sieht wie folgt aus:



Es gibt 3, 4, 5 und 6 Symmetrieachsen.

0.17 Zeige, dass die zwei Dreiecke ähnlich sind.





17

Das grössere Dreieck hat einen rechten Winkel aufgrund des Thaleskreises. Somit stimmen sie in einem Winkel schon mal überein. Ein zweiter gleicher Winkel würde die Frage beantworten. Es ist mit den Bezeichnungen der Zeichnung $90 = \alpha + \beta$. Aufgrund der Gleichschenkligkeit folgt für den Vollkreis um M: $360 = (180 - 2\alpha) + (180 - 2\gamma) + (180 - 2\delta)$ oder $\alpha + \gamma + \delta = 90$. Daraus $\gamma + \delta = 90 - \alpha = 90 - (90 - \beta) = \beta$. Nun ist $\gamma + \delta$ ein Winkel im kleinen Dreieck. Somit stimmen zwei Winkel überein und die Dreiecke sind ähnlich.

Kapitel 3

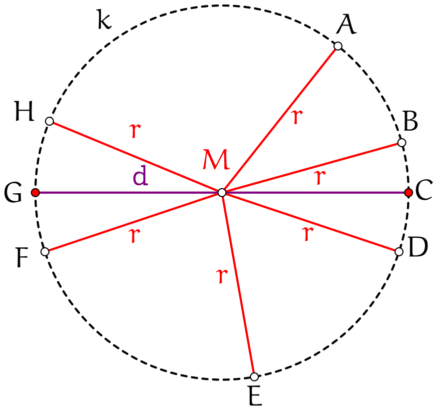
Krummlinige Figuren

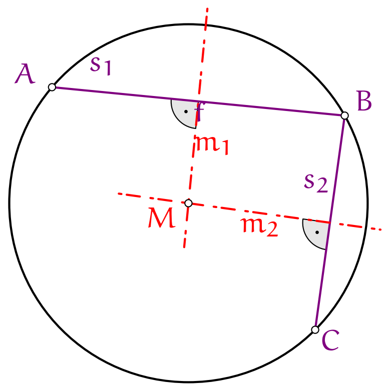
3.1 Kreis

3.1.1 Begriff

Definition 22. Ein *Kreis* ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die einen konstanten Abstand zu einem vorgegebenen Punkt dieser Ebene, dem Mittelpunkt, haben.

Definition 23. Der Abstand der Kreispunkte zum Mittelpunkt ist der *Radius* oder *Halbmesser* des Kreises, er ist eine positive reelle Zahl.



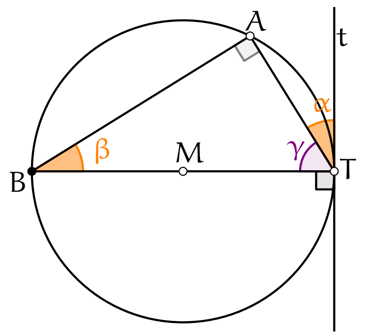


Zwei nicht identische Sekanten (“Schneidende”) s_1 und s_2, und damit drei Punkte (A, B, C), legen mit dem Schnittpunkt ihrer Mittelsenkrechten m_1 und m_2 den Kreis eindeutig fest (Abbildung rechts). Wenn man sich die Strecke $\overline{AC}$ nohc hinzudenkt, dann sieht man den Kreis als Umkreis des Dreiecks.

3.1.2 Sätz am Kreis

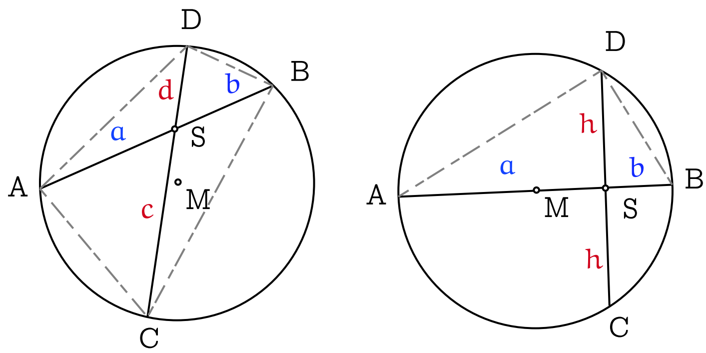
Wir wollen hier die drei wichtigsten Sätze am Kreis diskutieren, die von Geraden erzeugt werden.

Tangentenwinkelsatz



Eine Sehne an einer Tangente bildet denselben Winkel als das Dreieck aus Sehne und Zentralen über der Sehne. Der Winkel bei A ist ein rechter, denn wir erkennen den Thaleskreis. Die Winkel α und γ addieren sich zu einem rechten, genauso wie γ und β. Deshalb ist $\alpha = \beta$. β nennt man *Peripheriewinkel*. Der gezeichnete Kreis ist der Fasskreis über der Sehne.

Sehnensatz



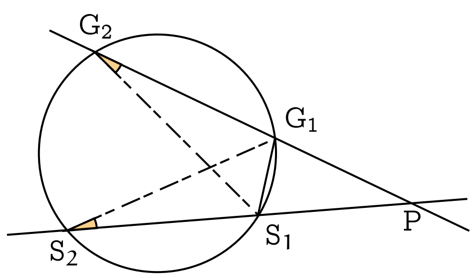
In der Abbildung sieht man zwei sich schneidende Sekanten. Es wird behauptet, dass $a \cdot b = c \cdot d$ oder $a : c = b : d$ ist. Wir erkennen den Kreis als Fasskreis über den Sehnen, z.B. $\overline{CB}$, so dass gilt: $\angle CAB = \angle CDB$. Zudem gilt $\angle ASC = \angle DSB$. Somit sind die Dreiecke $\triangle ACS$ und $\triangle DSB$ ähnlich, und deshalb sind deren Seiten proportional. Wenn sich die Sekanten senkrecht schneiden, dann geht eine Sekante durch den Mittelpunkt (Zentrale) und die andere wird halbiert. Diese Halbstrecken seien h. Dann folgt der Höhensatz zu $h^2 = a \cdot b$.

Satz 3.1. Sehnensatz Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb der Kreislinie, so ist das Produkt der Abschnittslängen vom Sehnenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sehne auf beiden Sehnne gleich gross,

$$a \cdot b = c \cdot d.$$

Sekantensatz

Wir betrachen zwei Sekanten eines Kreises, die sich ausserhalb des Kreises schneiden. Wir erkennen sofort die Peripheriwinkel über der Sehne $\overline{G_1S_1}$, die gleich sind. Damit sind die Dreiecke $\triangle PS_1G_2$ und $\triangle PG_1S_2$ ähnlich. Für die Seiten bedeutet dies, dass die Verhältnisse $|PG_2| : |PS_1| = |PS_2| : |PG_1|$. Das lässt sich als Produkte schreiben, z.B. $|PS_1| \cdot |PS_2| = |PG_1| \cdot |PG_2|$.

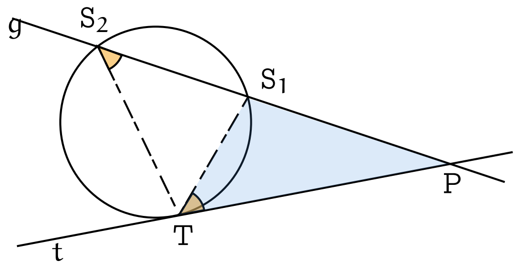


Satz 3.2. Sekantensatz Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises ausserhalb der Kreislinie in P, so ist das Produkt der Abschnittslängen vom Sekantenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich gross,

$$|PS_1| \cdot |PS_2| = |PG_1| \cdot |PG_2|.$$

Sekanten-Tangenten-Satz

Wir betrachten einen Kreis mit Tangente t und einer den Kreis in zwei Punkten schneidende Gerade g. Mit dem *Sehnentangentenwinkelsatz* (siehe Satz **??** auf Seite **??**) wird einsichtig, dass die Winkel $\angle TS_1S_2$ und $\angle S_1TP$ gleich sind und dass deshalb die Dreiecke $\triangle PTS_1$ und $\angle PTS_2$ ähnlich sind. Die entsprechenden Seite sind also proportional. Damit folgt



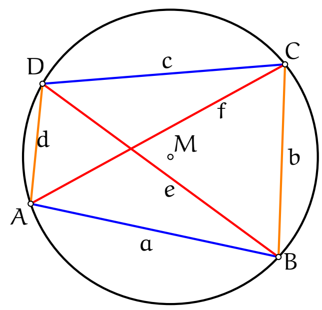
Satz 3.3. Sekanten-Tangenten-Satz An einem Kreis betrachte man eine Sekante g mit den Schnittpunkten S_1 und S_2, und eine Tangente t ,mit Berührungspunkt T. Die Geraden g und t schneiden sich in P. Dann gilt

$$|S_1P| \cdot |S_2P| = |TP|^2$$

Satz des Ptolemäus

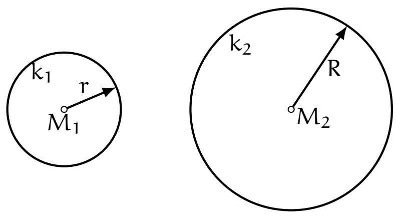
Ein weiterer Lehrsatz mit dem Sehnenviereck. Es gibt einen Zusammenhang zwischen den Diagonalen und den Seiten dieses speziellen Vierecks. (Es gibt nicht zu jedem Viereck einen Kreis, auf dem alle Ecken liegen.) Es gilt mit den Vierecksseiten a, b, c und d sowie den Diagonalen e und f:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d.$$

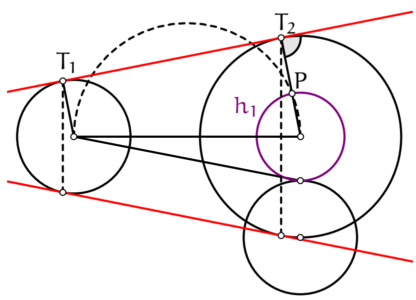


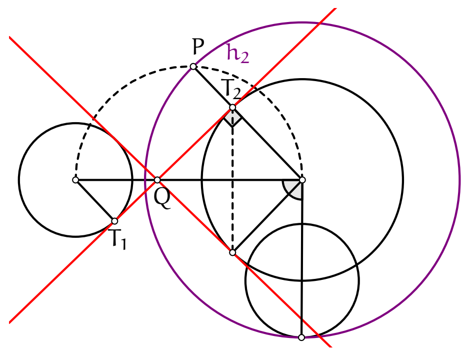
Satz 3.4 (Satz des Ptolemäus). In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten.

3.1.3 Tangente an zwei Kreisen



Die Bestimmung der Tangenten an zwei Kreise ist eine oft benötigte Kenntnis. Für die Berührende am Kreis durch einen Punkt ist der Thaleskreis die Gedächtnisstütze. Die Ausgangslage ist wie folgt in der Abbildung erkennbar. Man kann sich leicht vorstellen, dass es zwei Tangentenpaare gibt, ein äusseres und ein inneres, deren Tangenten sich zwischen den beiden Kreise schneiden (ausser die Kreise schneiden sich). Somit sind zwei Konstruktionen zu beachten.





Der besondere Kniff hier ist das Verwenden des kleineren der beide Kreise ma grossen Kreis, um neu einen inneren h_1 und einen äusseren Hilfskreis h_2, in der Abbildung violett, zu konstruieren. Diese beiden Hilfskreise werden dann mit dem Thaleskreis über der Verbindung der Mittelpunkte in P geschnitten. Der Strahl aus dem Mittelpunkt durch P schneidet den Kreis im Punkt T_2, dem Tangentialpunkt. Hat der kleine Kreis den Radius r und der grosse R, dann besitzen die Hilfskreise die Radien $R - r$ und $R + r$. Konstruktiv kann man diese Erzeugen, indem man den kleinen Kreis auf einem Punkt des grossen als Mittelpunkt errichtet.

3.1.4 Spiegelung am Kreis, Involution**

Wir beginnen mit einer Definition. Zwei Kreise werden *senkrecht* oder orthogonal genannt, wenn ihre Schnittpunkte auf dem Thaleskreis über der Verbindung ihrer Mittelpunkte liegen. Wir werden diese Setzung später brauchen.

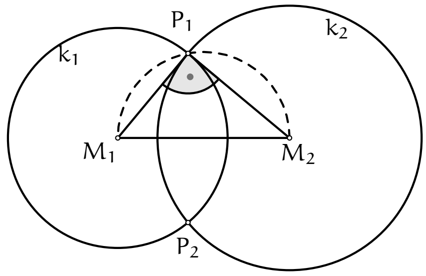
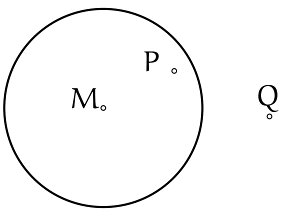
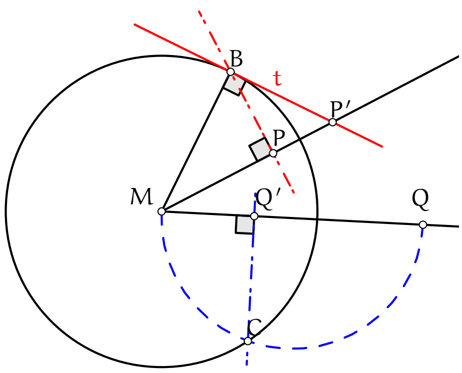


Abbildung 3.1



Die Ausgangslage zeigt einen Punkt im Kreis P und einen ausserhalb des Kreises Q. Daran zeigen wir die Definition der *Involution* oder Spiegelung am Kreis. Dabei ist der Kreis nicht als Spiegel zu verstehen, für den das Reflexionsgesetz von Heron gilt.

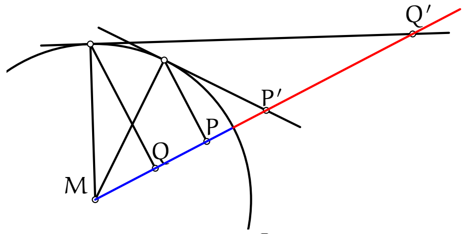


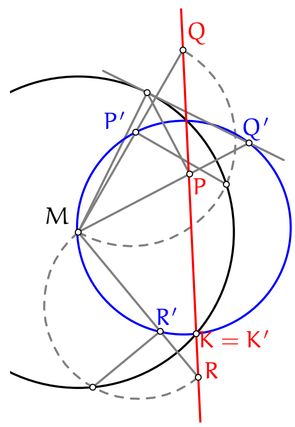
Die Spiegelung erfolgt von innen nach aussen, indem auf der Geraden durch diesen Punkt und dem Mittelpunkt des Kreises ein Lot den Kreis in B schneidet. Die Tangente an den Kreis durch B schneidet die Gerade durch M und P im gespiegelten Punkt P'. Von aussen wird der Punkt Q gespiegelt, indem auf der Verbindung zwischen Q und M der Thaleskreis gezogen wird, auf den Schnittpunkt mit dem Kreis das Lot auf die Verbindungslinie gefällt wird und somit den Schnittpunkt Q' bildet.

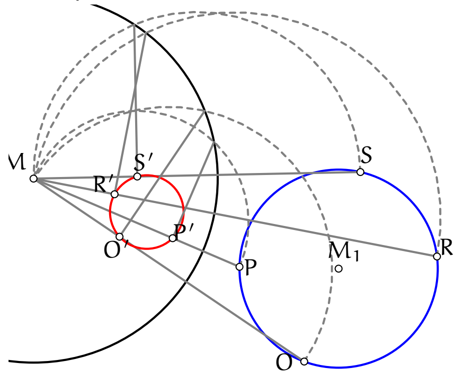
Wie man sieht, ist die Spiegelung von aussen und die Spiegelung von innen jeweils die Umkehrabbildung. D.h. P ist das Abbild von P' und umgekehrt.
Man beachte, dass aufgrund des Kathetensatzes gilt:

$$|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = r^2.$$

Ein Mass dafür, wie weit ausserhalb oder innerhalb eines Kreises sich ein Punkt P befindet, ist die sogenannte *Potenz eines Punktes* mit $\Pi(P) = |PM|^2 - r^2$.
Nun betrachten wir die Involution einer Geraden durch den Mittelpunkt des Spiegelungskreises, einer Sekanten und eines Kreises.





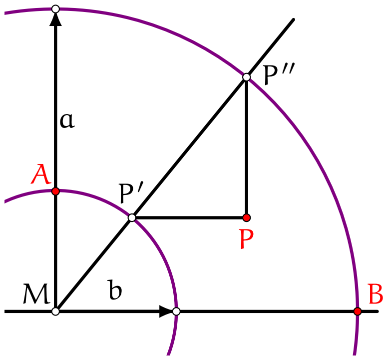


Wir sehen sofort, dass die Gerade durch M auf sich selber abgebildet wird. Eine Sekante oder Passante wird auf einen Kreis durch M abgebildet und umgekehrt. Und ein Kreis wird auf einen Kreis abgebildet.
Wir kommen auf Abb. 3.1 zurück. Hier spiegelt der Kreis k_1 den Kreis k_2 auf sich selbst und analog spiegelt der Kreis k_2 den Kreis k_1 auf sich selbst.
Allgemein ist interessant, dass ein begrenzte Linie, Kreis oder Sekante, in eine unendliche Gerade abgebildet werden kann. Eine begrenzte Linie hat eben auch unendliche viele Punkte.

3.2 Ellipse**

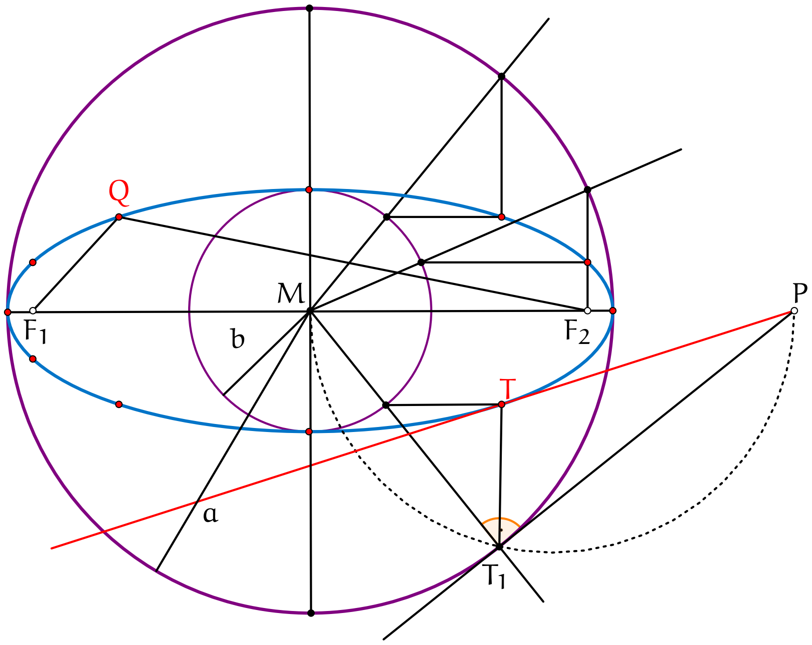
Definition 24. Eine *Ellipse* ist der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 gleich einer gegebenen Konstante ist.

Anmerkung 3.1. Wenn die zwei Punkte F_1 und F_2 zusammenfallen auf M, dann liest man: Eine spezielle Kurve ist der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, für die die Abstände zu einem gegebenen Punkten M gleich einer gegebenen Konstante ist. Diese Kurve ist der Kreis. Somit ist der Kreis ein Spezialfall der Ellipse mit $F_1 = F_2 = M$.



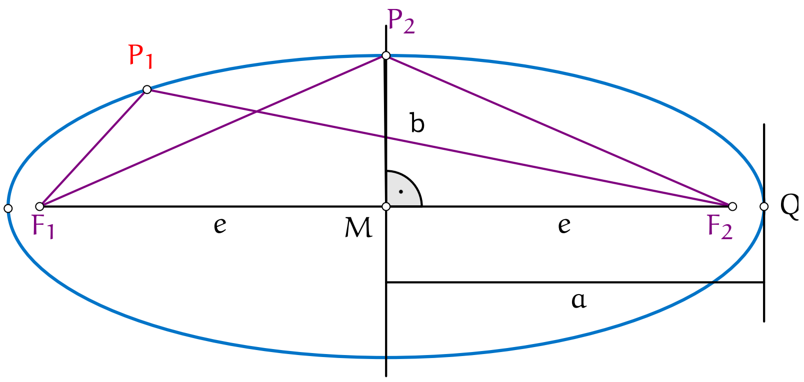
Wie haben schon gesagt, dass die Ellipse eine affine Abbildung des Kreises ist. Deshalb kann man die Ellipse aus den Kreise heraus konstruieren.

Der längste Durchmesser der Ellipse ist die grosse Hauptachse a, der kleinste Durchmesser die kleine Hauptachse b. Wir zeichnen zwei konzentrische Kreise mit den Hauptachsen als Radien. Dann konstruiert man einen Strahl aus M, der beide Kreise schneidet. Durch den Schnittpunkt P' mit dem kleinen Kreis legt man eine Gerade, die parallel zu grossen Hauptachse ist. Analog zeichnet man eine Gerade durch P'', die parallel zur kleinen Hauptachse ist. Der Schnittpunkt P liegt auf der Ellipse.



Die obige Konstruktionsanweisung führt man mehrmals aus, bis man genügend Punkte bestimmt hat, um eine Ellipse zu zeichnen. Man beachte, dass die je zwei Punkte der Kreise auf der Ellipse liegen.

Die affine Abbildung, die durch dieses Prozedere ausgeführt wird, eignet sich auch, um die Tangente von eine Punkt P an die Ellipse zu bestimmen. Dazu zeichnet man die Tangente an den grösseren Kreis, indem man den Thaleskreis auf der Strecke von P zum Kreismittelpunkt errichtet und die Kreise schneidet. Daraus folgt der Punkt T_1. Die Strecke $\overline{MT_1}$ schneidet beide Kreise. Diese Schnittpunkte können nach Prozedur zum Punkt T führen.

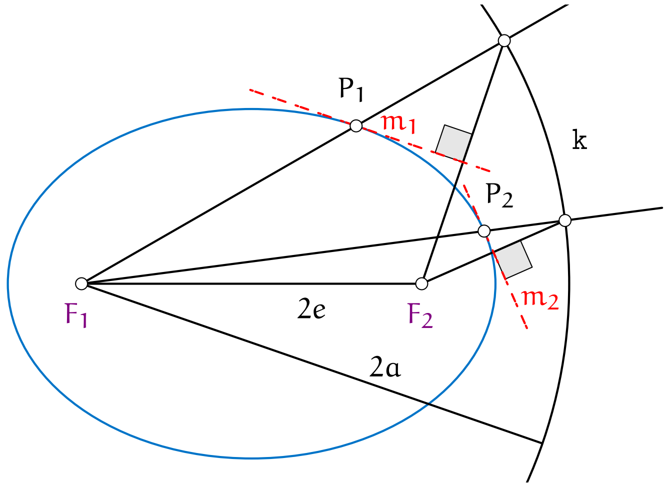


In der Abbildung sieht man die Begriffe der Definition der Ellipse: Die Summe von $|\overline{PF_1}|+|\overline{PF_2}| = k$ ist konstant. Diese Konstante ist $2a$.

Die sogenannte *Gärtnermethode* zur Darstellung einer Ellipse geht von zwei Pflöcken aus, an die eine Schnur, die länger ist als der Pflockabstand, befestigt wird. An der straffen Schnur wird dann die elliptitsche Kurve gezeichnet. Erreicht man den Punkt Q, dann erkennt man, dass die Länge der Schnur $\overline{F_1F_2} + 2 \cdot \overline{QF_2} = 2e + 2(a - e) = 2a$. Damit folgt mit dem Pythagoras die Beziehung:

$$a^2 = b^2 + e^2.$$

Da wir gesagt haben, dass die Ellipse eindeutig durch a und b festgelegt ist, und diese Beziehung gilt, folgt, dass auch e und eine Hauptachsenlänge, entweder a oder b ebenfalls die Ellipse festlegen.

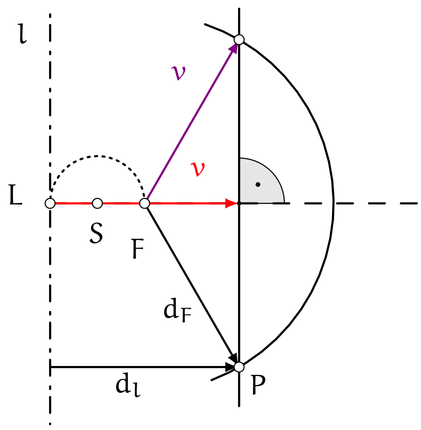


Eine weiter Konstruktionsmethede fusst auf den zwei sogenannten Leitkreisen k. Man zeichnet einen Kreis um F_1 mit dem Radius $2a$. Sodann schneidet man Strahlen aus F_1 mit dem *Leitkreis*. Der Schnittpunkt wird mit dem anderen Brennpunkt F_2 verbunden. Auf der entsprechenden Strecke wird die Mittelsenkrechte errichtet und mit dem Strahl geschnitten. Dieser Schnittpunkt P_1 liegt auf der Ellipse. Wiederum wird die Eingeschaft verwendet, wonach der Abstand eines Punktes auf der Ellipse die Summe der Abstände zu den Brennpunkten ist.

3.3 Parabel**

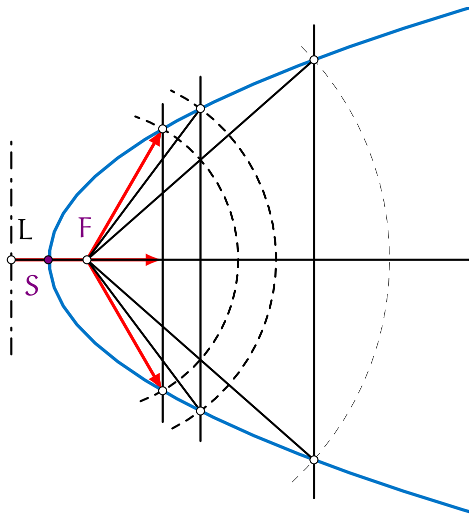
Definition 25. Eine *Parabel* ist der geometrische Ort aller Punkte P, deren Abstand $|\overline{PF}| = d_F$ zum Brennpunkt F gleich dem Abstand d_l von P zur Leitlinie l ist.

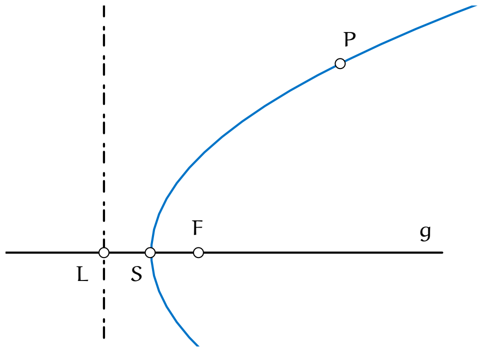
Anmerkung 3.1. Man bezeichnet den Brennpunkt mit F, weil man auch *Fokus* sagt.

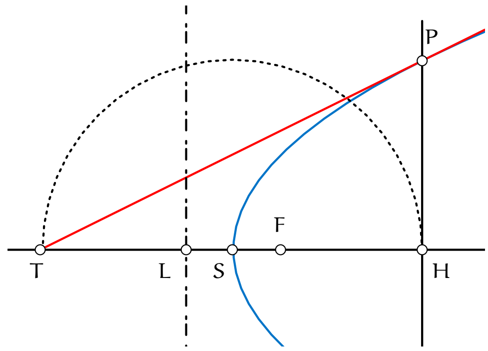


Die Parabel ist durch die zwei Punkte Scheitel S und Brennpunkt F eindeutig festgelegt. Damit kann man die Parabel konstruieren. Als erstes bestimmt man den Punkt L, indem man vom Scheitel S die Distanz zu F in die entgegengesetzte Richtung abträgt. S, F und L sind kollinear und es gilt $\overline{SF} = \overline{SL}$. Nun trägt man von L aus die beliebige Distanz v ab und zeichnet eine Senkrechte. Diese schneitet man mit dem Kreis um F mit Radius v. Die zwei Schnittpunkte liegen auf der Parabel. Die Parabel lässt sich durch wiederholtes anwenden dieser Prozedur punktweise erzeugen. Man verwendet hier die Brennpunkteigenschaft der Parabel.

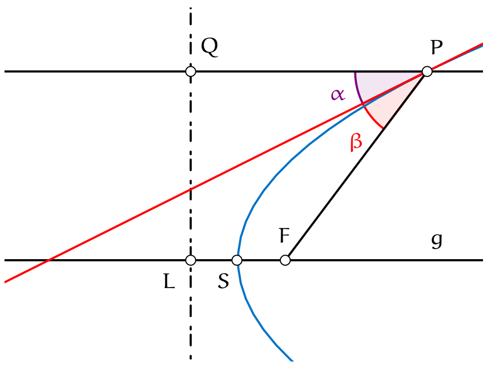
Zur Bestimmung der *Tangente* an die Parabel in einem Punkt P gibt es mehrere Möglichkeiten, die alle sehr einfach zu konstruieren sind. Die Ausgangslage ist wie in den folgenden Abbildungen. Dier erste und einfachste Methode bestimmt den Punkt T auf g. Der Strahl durch T und P ist die Tangente. Als erstes fällt man das Lot von P auf g und erhält den Fusspunkt H. Sodann schlägt man die Distanz $\overline{SH}$ in die Gegenrichtung um und erhält T.

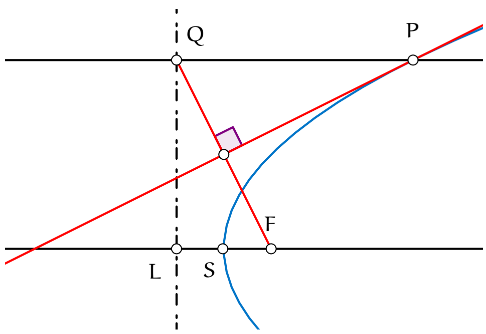






Die zweite Methode zeichnet eine Parallele zu g durch P. Sodann wird der Winkel $\angle QPF$ geteilt. Die Winkelhalbierende ist die Tangente.



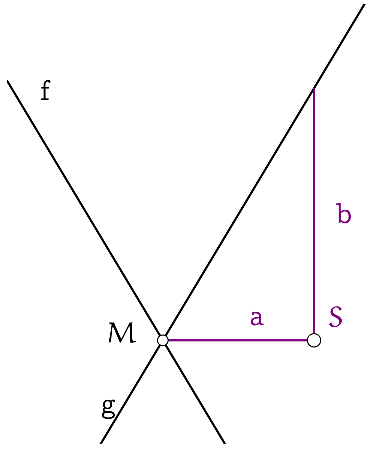


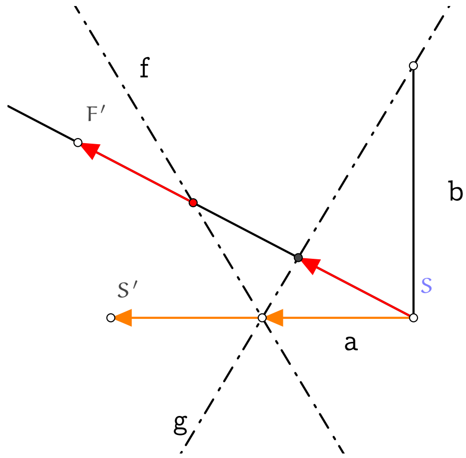
Als drittes bestimmt man den Mittelpunkt der Strecke $\overline{QF}$. Die Gerade durch diesen Mittelpunkt und den Punkt P ist die Tangente.

3.4 Hyperbel**

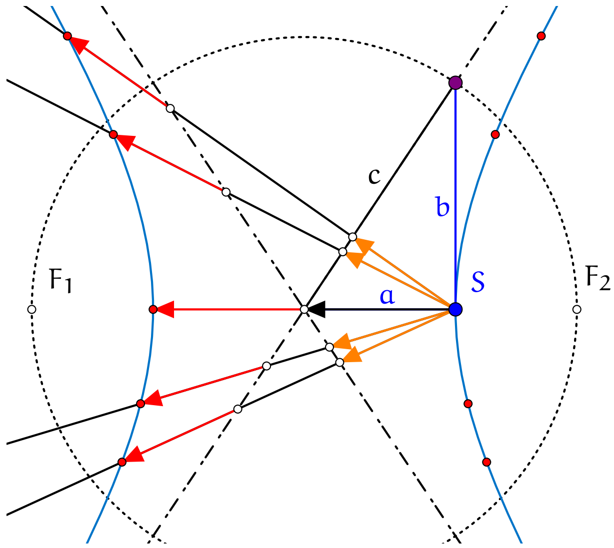
Definition 26. Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte P, für die der Betrag der Differenz ihrer Abstände von zwei Brennpunkten F_1 und F_2 den konstanten Wert $2a$ der doppelte Hauptachsenlänge hat.

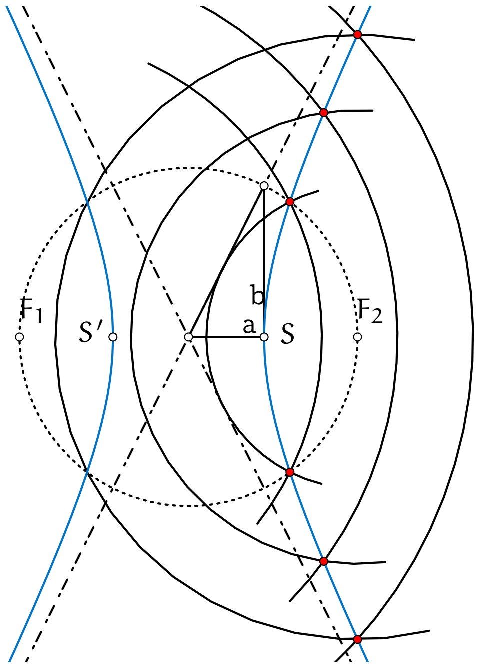
Wir konstruieren die Hyperbel von der affinen Abbildung ausgehend und nicht von der Brennpunkteingeschaft. Gegeben sind die Achsenabstände a und b. Damit kann man zwei achsensymmetrische Geraden bestimmen, die als Asymptoten bekannt sind. Ausgehen von einem Punkt auf der Hyperbel, hier beispielsweise dem Scheitelpunkt S, zeichnet man Halbgeraden, welche die zwei Geraden f und g schneiden. Der Abstand von S zu g wird dann beim zweiten Schnittpunkt auf f richtungs- und betragsmässig abgetragen. Somit entsteht der Punkt F' oder auch S'.





Wiederholtes anwenden dieser Prozedur erzeugt eine Menge von Punkten, die auf der Hyperbel zu liegen kommen. Es ist nicht zwingend, S zu wählen, denn es gibt viele Hyperbeln, die nur durch a und b festgelegt sind. Zur weiteren Übersicht sind die zwei Brennpunkte eingetragen, die vom Mittelpunkt M den Abstand $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ aufweisen. Die links gefundenen Punkte kann man an einer senkrechten Achse durch M spiegeln, denn die Hyperbeläste sind symmetrisch.

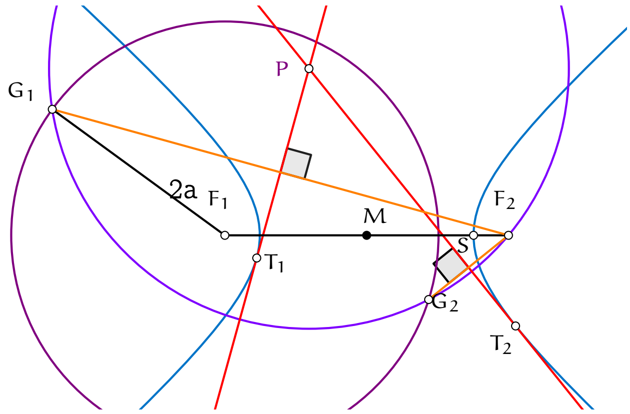




Die Brennpunkteigenschaft besagt, dass $\overline{PF_1} - \overline{PF_1} = 2a$, oder in Worten: Die Differenz der Abstände eines Hyperbelpunktes von den Brennpunkten ist konstant $2a$. Der geometrische Ort ist der Schnittpunkt von zwei Kreisen mit Mittelpunkt F_1 und F_2 mit den Radien $R_1 - R_2 = 2a$. Es muss noch $R_1 > a + c$ sein. Es sei $a = 1$ und $b = 2$. Somit folgt für $R_1 = \{4, 5, 6\}$ dann $R_2 = \{2, 3, 4\}$. Die Brennpunkte liegen $d = 2c = 2\sqrt{1+4}$ auseinander.

Für die Konstruktion der Tangente an die Hyperbel aus einem Punkt P heraus gibt es mehrere Möglichkeiten. Hier wollen wir nur der Vollständigkeit halber eine Methode angeben, ohne tief in die Gründe einzutauchen. Die Tangente werden wir später nochmals in der Analysis, genauer Vektorgeometrien, nochmals antreffen.

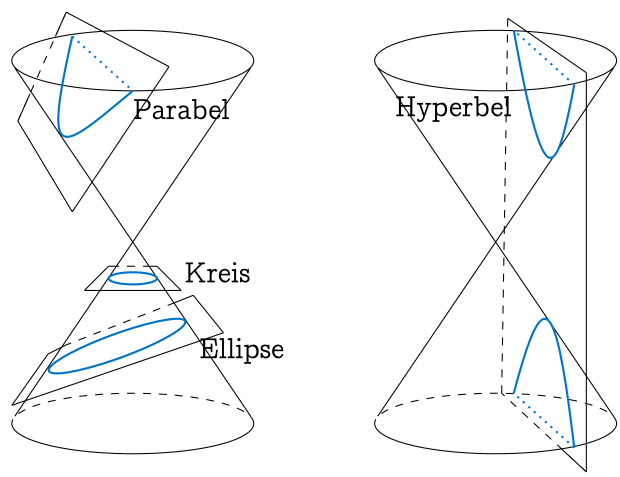
Die Hyperbel ist durch die Brennpunkte F_1 und F_2 sowie den Scheitelabstand a und somit S gegeben. Die Tangenten findet man, indem man in F_1 den Kreis mit Radius $2a$ zeichnet und diesen mit dem Kreis mit Zentrum P und dem Radius $\overline{PF_2}$ durch F_2 schneidet. Es entstehen die zwei Schnittpunkte G_1 und G_2. Die Mittelsenkrechten auf den Strecken $\overline{F_2G_1}$ und $\overline{F_2G_2}$ sind die Tangenten.



3.5 Kegelschnitte

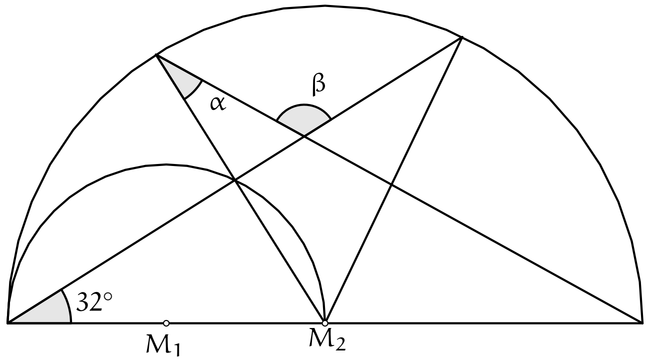
Die vorgestellten Figuren Ellipse, Parabel und Hyperbel, wobei der Kreis eine spezielle Ellipse ist, haben eine interessante Gemeinsamkeit. Sie werden durch ebene Schnitte des Kegels erzeugt. Deshalb heissen sie auch *Kegelschnitte*.

Wie man aus der Abbildung gut erkennen kann, hängt die resultierende Figur von der Schnittebene ab. Senkrecht zur Kegelachse stehende Schnittebenen erzeugen einen Kreis.

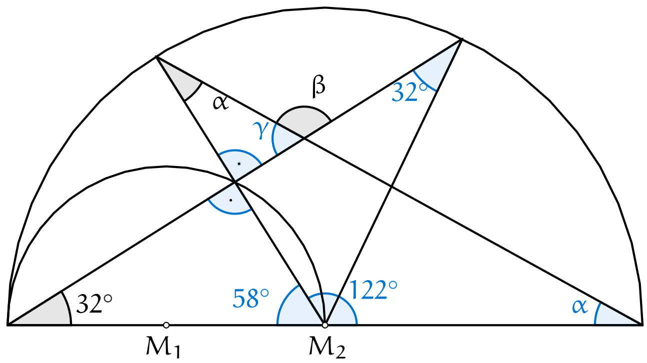


Aufgaben

0.1 Bestimme die Winkel α und β rechnerisch. Zeichnung ist nicht massgetreu.

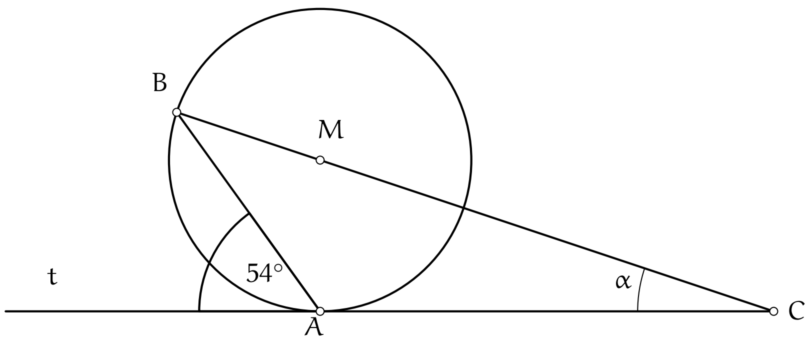


1 Zuerst ergänzen wir die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke und die rechten Winkel der Thaleskreise.



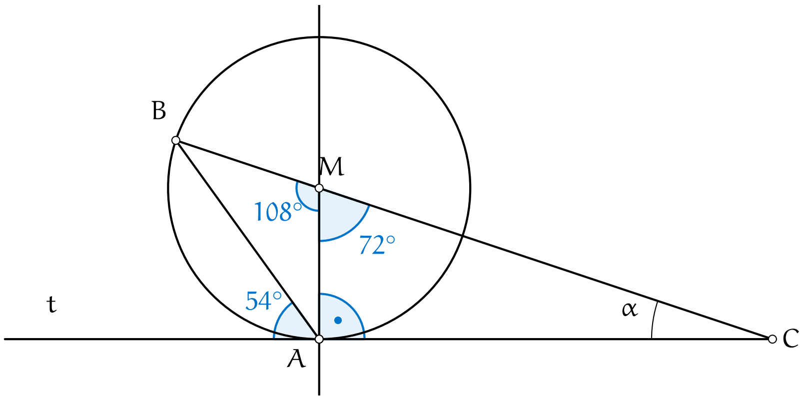
Aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck folgt der Zentriwinkel zu $90° - 32° = 58°$. Der Komplementärwinkel ist dann $180 - 58 = 122°$. Die Basiswinkel zu diesem Winkel des gleichschenkligen Dreiecks ist $\alpha = (180 - 122)/2 = 29°$. Der Winkel β ist $180° - \gamma$, wobei $\gamma = 90 - \alpha = 90 - 29 = 61°$. Somit $\beta = 180 - 61 = 119°$.

0.2 Bestimme den Winkel α.

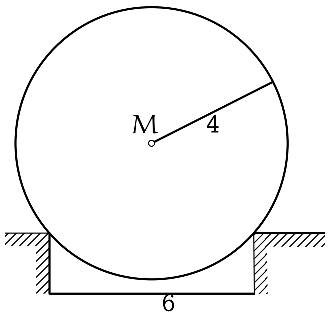


2 Gemäss Tangentenwinkelsatz ist der Zentriwinkel doppelt so gross wie der Tangentenwinkel, also $108°$. Der Radius steht senkrecht auf t durch M. Der Supplementärwinkel ist $180 - 108 = 72°$. Sein

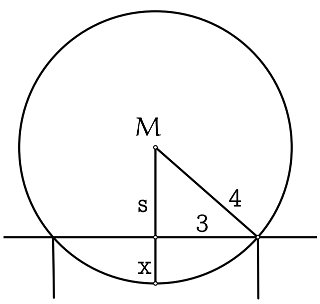
Komplementärwinkel ist $\alpha = 90 - 72 = 18°$.



0.3 Eine Kugel mit Radius 4 ist in ein kreisrundes Loch vom Durchmesser 6 gefallen. Wie tief sitzt die Kugel?

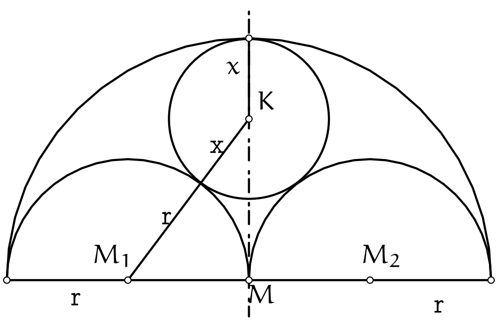


3



Wir bestimme s mit dem Pythagoras zu $s^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 5$ und $s = \sqrt{5}$. Damit wird $x = 4 - s$ dann $x = 4 - \sqrt{5} \approx 1.764$.

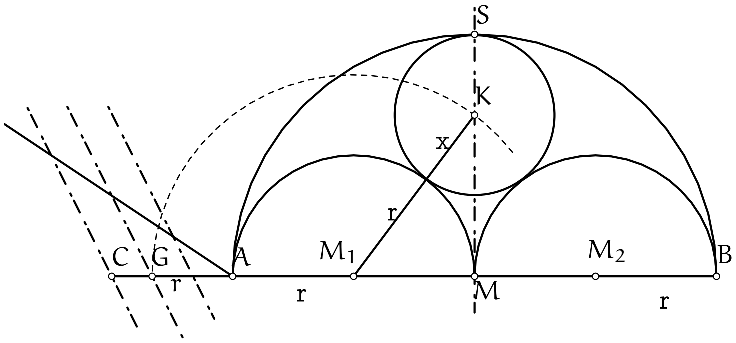
0.4 Verifiziere, dass $x = 2/3r$ ist. Voraussetzung: binomische Formel. Dann konstruiere die Figur mit den euklidischen Werkzeugen.



4 Das rechtwinklige Dreieck im Innern hat die Seitenlänge: r, $r + x$ und $2r - x$. Der Pythagoras lautet: $(r + x)^2 = r^2 + (2r - x)^2$. Ausmultipliziert

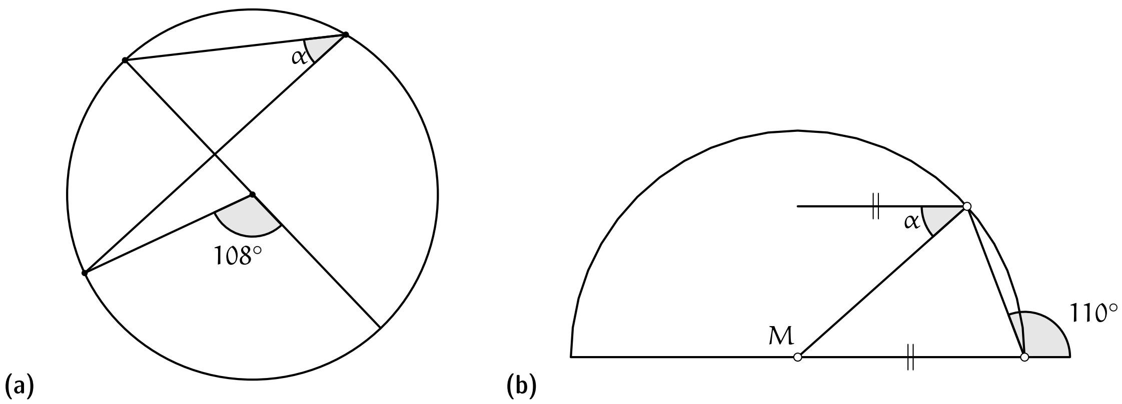
$$r^2+2rx+x^2 = r^2+4r^2-4rx+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2rx = 4r(r-x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2r-2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2r.$$

Die Behauptung stimmt. Konstruktion gemäss Figur:

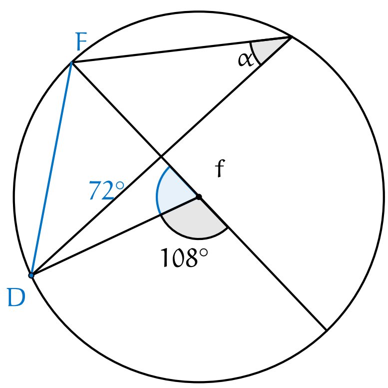


Wir hängen links eine Strecke $\overline{AC}$ der Länge r an und teilen sie im Verhältnis 2:3. Damit hat die Strecke $\overline{GM_1}$ die Länge $r + 2/3r$. Damit schlagen wir einen Kreisbogen, der die Symmetrieachse in K schneidet. Dort schlagen wir einen Kreis mit dem Radius $x = \overline{GA} = 2/3r$.

0.5 Bestimme die Winkel α.

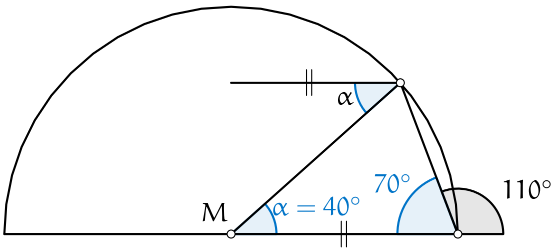


5 **(a)** Der Supplementarwinkel zu den 108° ist 72°. Dieser Winkel ist der Zentriwinkel des Fasskreises über der Sehne $\overline{DF}$. Damit ist der Peripheriewinkel α der halbe Wert, also $72/2 = 36°$.

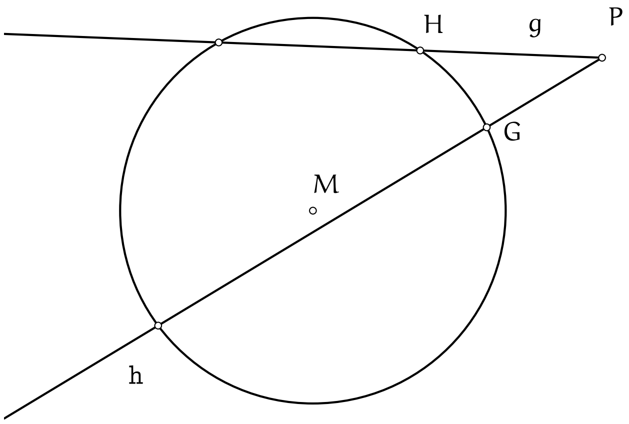


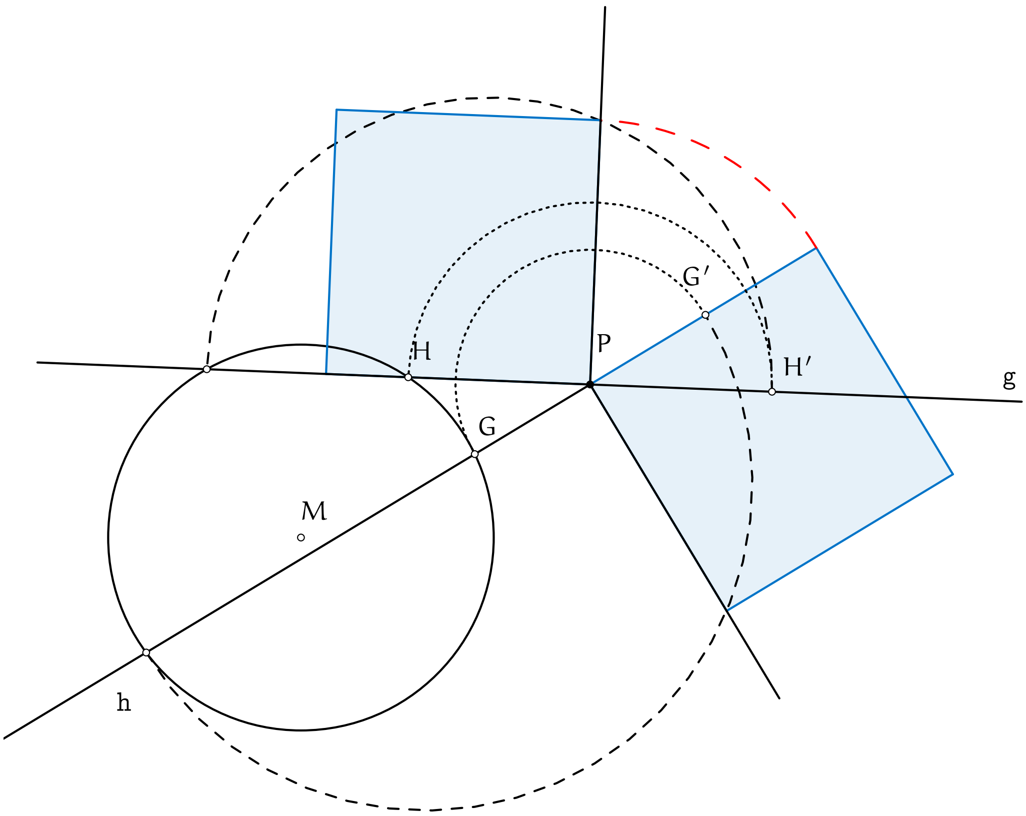
(b) Der Supplementärwinkel zum gegebenen 110° ist 70°. Dieser Winkel ist ein Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks. Somit ist der Spitzenwinkel $180 - 2 \cdot 70 = 40$. Dieser Winkel ist ein Stufenwinkel von α, weil die verbindende Gerade von parallelen Linien geschnitten wird. Somit ist

$\alpha = 40°$.



0.6 Verifiziere mit dem Höhensatz, dass der Sekantensatz stimmt. Die zwei Quadrate müssen gleich sein.



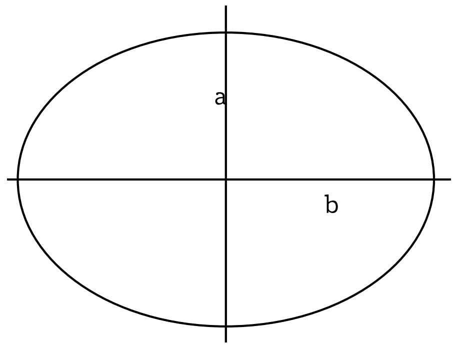


6

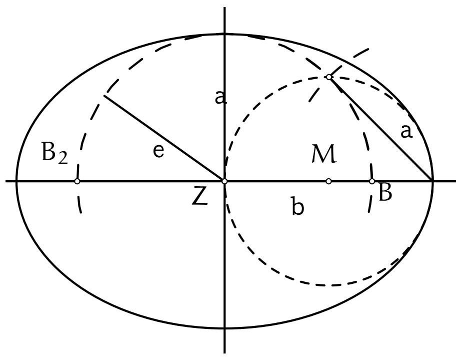
Wir klappen jeweils die kürzere Strecke $\overline{PH}$ und $\overline{PG}$ um und erhalten die Punkte G' und H'. Nun konstruieren wir den Thaleskreis über die Strecken und schneiden diese mit den Senkrechten auf dem

Punkt P. Aus diesen zwei Höhen bilden wir die Quadrate, die nach dem Höhensatz gleiche Fläche habe wie die Rechtecke, die aus den Hypothenusenabschnitten gebildet werden. Wir sehen durch Rotation der Ecke, dass die Höhen gleich sind und somit der Sekantensatz bestätig ist.

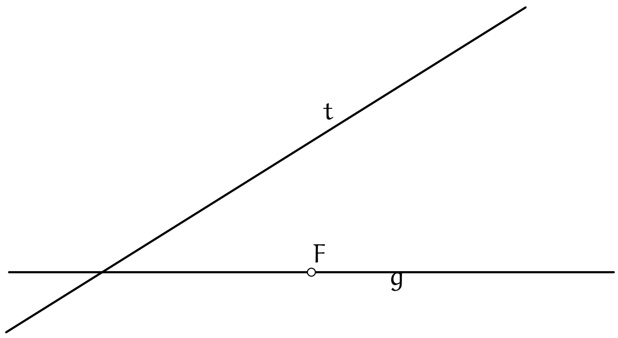
0.7 ** Konstruiere die Brennpunkte der Ellipse. Tipp: Es gilt $b^2 - a^2 = e^2$ mit den Hauptachsen $a < b$.



7 Aufgrund des Tipps muss man den Satz des Pythagoras anwenden und einen Thaleskreis konstruieren, um Rechtwinklichkeit zu erzielen. Über der Halbachse b wir der Bogen gezogen und die Länge a mit dem Halbkreis geschnitten. Von Z aus schlägt man den Bogen durch diesen Punkt und schneidet die Achse b im Punkt B. Dies ist der Brennpunkt. Der zweite Brennpunkt B_2 liegt symmetrisch auf der anderen Seite. Beachte: Nur zufällig ist $a \approx e$.

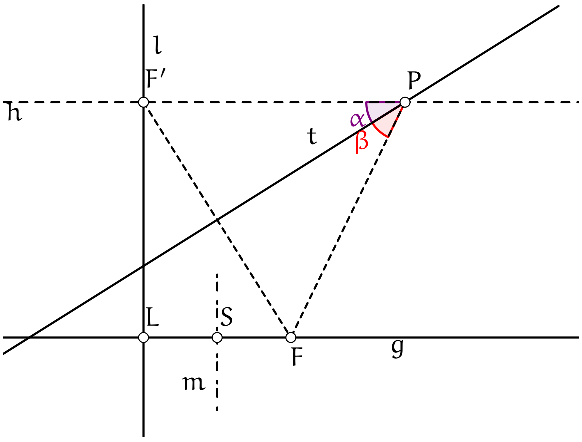


0.8 ** Wir suchen Scheitelpunkt und Leitlinie der Parabel, die durch den Brennpunkt F die Achse g und eine Tangente t gegeben ist.

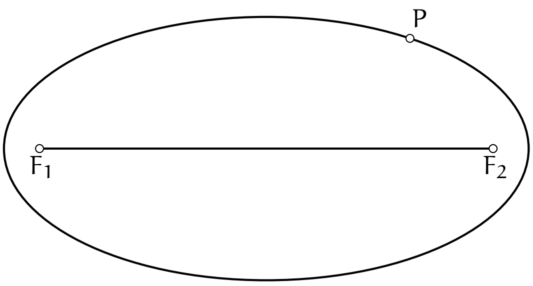


8 Als erstes spiegeln wir F an der Tangente t und erhalten F'. Nach Darstellung auf Seite 3-8 liegt F' auf der Leitlinie l, die wiederum senkrecht auf g steht. Eine Senkrechte auf l durch F' schneidet die

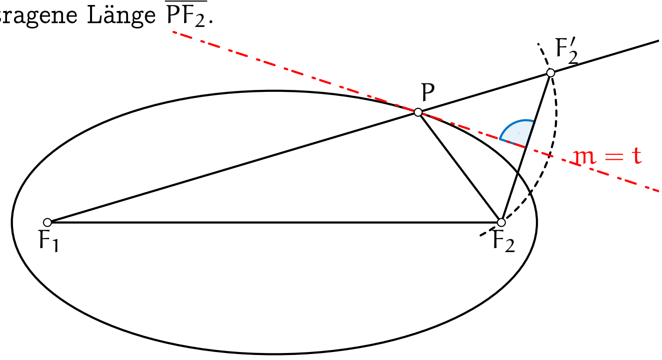
Tangente in P. Die Winkel α und β sind gleich, weil die Tangente die Winkelhalbierende ist. Der Scheitel S liegt auf halber Strecke zwischen F und L.



0.9 ** Konstruiere die Tangente an die Ellipse im Punkt P.



9 Die Tangente in P ist die Mittelsenkrechte auf der Strecke $\overline{F_2F_2'}$. Der Punkt F_2' ist die auf dem Strahl von F_1 durch P abgetragene Länge $\overline{PF_2}$.



Kapitel 4

Flächen

4.1 Begriffe

Die Hauptgegenstände der Elementargeometrie sind vier, nämlich

- Punkt,
- Linie,
- Fläche und
- Körper.

Vom Körper haben wir ein intuitives Verständnis, weil wir alle einen Körper besitzen. Dieser ist begrenzt durch eine Fläche, der Oberfläche, die wiederum aus einem oder mehreren Flächenstücken bestehen kann. Wenn wir an einen prismatischen Körper denken, so sind die Flächenstücke Vielecke. Denken wir an eine Kugel, dann ist die Oberfläche unbegrenzt, und wir können nur von der Kugeloberfläche reden.
Eine Linie ist eindimensional, eine Fläche zwei- und ein Körper dreidimensional. Damit einhergehend misst man die Länge der Linie in Meter m (oder ein Bruchteil davon), den Flächeninhalt in Quadratmeter m^2 und den Rauminhalt in Kubikmeter m^3. Der Punkt ist dimensionslos.
Eine etwas einfache Definition der Fläche könnte wie folgt lauten.

Definition 27. Eine *Fläche* im anschaulichen Sinn ist eine zweidimensionale geometrische Figur oder die Begrenzungsfläche eines dreidimensionalen Körpers.

Anmerkung 4.1. Eine Fläche muss nicht eben, sie kann auch gekrümmt sein.

Eine grosse Klasse von Flächen sind die Figuren, Vielecke oder von gekrümmten geschlossene Linien umgeben, die in der Ebene liegen.

Definition 28. Der *Umfang* U einer Fläche ist die Länge der sie begrenzenden Linie.

4.2 Rechtecke, Dreieck

Ausgangslage für die Flächenberechnung ist das Rechteck, von dem wir wissen, dass die Fläche aus der Multiplikation von den zwei senkrecht stehenden Seiten hervorgeht. Rechteck heisst, dass es ein Viereck mit rechten Winkeln ist.

Satz 4.1. Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist

$$F = a \cdot b$$

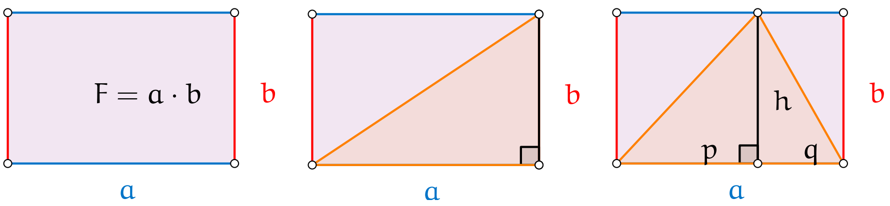
Satz 4.2. Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist

$$U = 2 \cdot a \cdot b$$

Anmerkung 4.3. Dort, wo es nicht missverständlich ist, sprechen wir auch von Fläche anstatt Flächeninhalt.

Wir betrachten ein Rechteck mit den Seiten a und b. Wir zeichnen die Diagonale, welche die Fläche halbiert. Die halbe Fläche entspricht dem Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks. Dieses Dreieck ersetzen wir durch zwei andere, welch zusammen die Länge der Grundseite $a = p + q$ und dieselbe Höhe b aufweisen. Diese zwei Dreiecke kann man sich als Hälften der Rechtecke mit den Seiten b und p oder q vorstellen. Diese zwei Rechtecke ergeben zusammen das ursprüngliche. Deshalb ist die Fläche des Dreiecks wieder die Hälfte der Fläche des Rechtecks. Formal

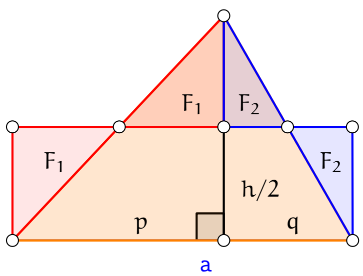
$$F = \frac{1}{2}p \cdot b + \frac{1}{2}q \cdot b = \frac{1}{2}(p+q) \cdot b = \frac{1}{2}a \cdot b$$



Satz 4.4. Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Grundseite a und Höhe h auf a ist

$$F = \frac{1}{2}a \cdot h$$

Anmerkung 4.5. Diese Satz gilt für *beliebige* Dreiecke, also spitzwinklige, stumpfwinklige, überstumpfe, rechtwinklige.



Wir können uns die Dreiecksfläche auch als Rechtecksfläche vorstellen. Nach der Formal für das Rechteck $F = a \cdot h$ muss man für die Höhe die halbe Rechtecksseite einsetzen, also $F = a \cdot \frac{h}{2}$. Dass diese Überlegung stimmt, erkennt man an der Abbildung, wo die entsprechenden Dreiecksflächen deutlich hervortreten.

Wichtig 3. Die Dreiecksfläche kann man als Rechtecksfläche darstellen. ⊣

Satz 4.6. Der Umfang eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c ist

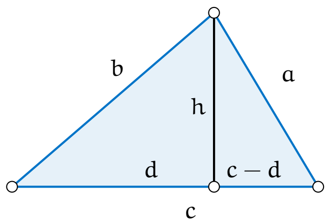
$$U = a + b + c$$

4.2.1 Heron'sche Formel

Satz 4.7. Heron'sche Dreiecksformel Seien a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks so gilt:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

wobei wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Dreiecksumfang ist.



Die Herleitung der Formel geschieht mittels Satzes von Pythagoras. Es gilt $b^2 = h^2 + d^2$ und $a^2 = h^2 + (c-d)^2$, wie abgildet. Subtraktion ergibt $a^2 - b^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot d$, also $d = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2 \cdot c}$.

$$\begin{aligned}
h^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2 \cdot c}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot c}\right)^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2 \cdot c}\right)^2 \\
&= \frac{(2 \cdot b \cdot c + (-a^2+b^2+c^2)) \cdot (2 \cdot b \cdot c - (-a^2+b^2+c^2))}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{((b+c)^2 - a^2) \cdot (a^2 - (b-c)^2)}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{((b+c)+a) \cdot ((b+c)-a) \cdot (a+(b-c)) \cdot (a-(b-c))}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{2 \cdot s \cdot 2 \cdot (s-a) \cdot 2 \cdot (s-c) \cdot 2 \cdot (s-b)}{4 \cdot c^2} \\
&= \frac{4 \cdot s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{c^2}
\end{aligned}$$

Damit

$$h = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

und die Fläche

$$F = \frac{1}{2} h \cdot c = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Aus der Flächenformel lassen sich weitere Zusammenhänge finden, z.B. für den Inkreisradius r_i:

$$r_i = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

oder einen Ankreisradius ρ_a:

$$\rho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

Damit folgt für die Dreiecksfläche auch

$$F = \sqrt{r_i \rho_a \rho_b \rho_c}.$$

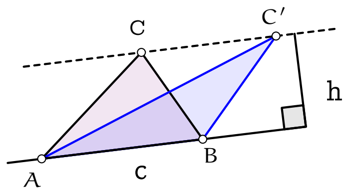
Wir stellen zusammen. Nicht alle Formeln sind hier hergeleitet worden. Dennoch zeigen wir sie hier der Vollständigkeit halber.

Formel 4.8. Flächeninhalt Dreieck Das Dreieck besitzt die Seiten a, b und c.

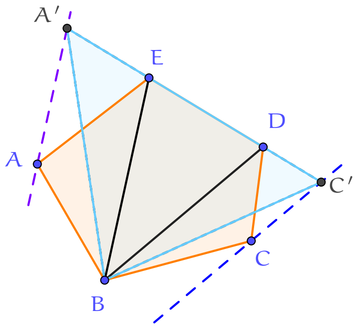
$F = \frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}h_c c$	Höhe h_k auf Seite $k = a, b, c$
$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	Heron $s = (a+b+c)/2$
$F = r_i s$	Inkreisradius r_i
$F = \rho_a(s-a) = \rho_b(s-b) = \rho_c(s-c)$	Ankreisradius ρ_k
$F = \frac{abc}{4R}$	Umkreisradius R

4.3 Scherung und Streckung

4.3.1 Scherung

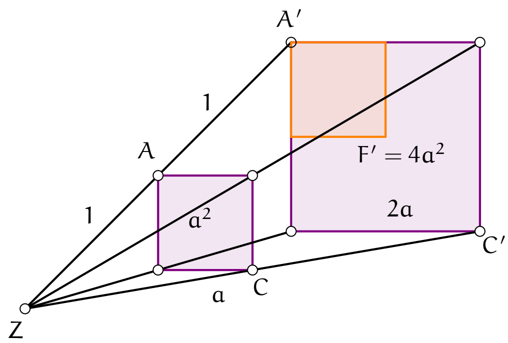


Die *Scherung* des Dreiecks ist eine Transformation der Figur in eine andere, deren Flächeninhalt gleich ist. Da die Fläche des Dreiecks $F = \frac{1}{2}h_a \cdot a = \frac{1}{2}h_b \cdot b = \frac{1}{2}h_c \cdot c$, also halbe Höhe mal Grundfläche, bleibt die Fläche gleich, sofern die Grundfläche und ihre entsprechende Höhe gleich bleibt. Dies ist dann der Fall, wenn der auf einer Parallelen zur Grundseite liegt, welche den Abstand h von dieser aufweist. In der Abbildung sieht man, dass C zu C' werden kann, ohne den Flächeninhalt zu verändern.



Die Scherung kann dazu verwendet werden, ein Vieleck, wie in der Abbildung ein Fünfeck, in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln. Dazu werden zwei Punkte "weggeschert". Dazu zeichnet man Diagonalen, welch Dreiecke bilden. Parallel zu diesen Diagonalen werden die Punkte so verschoben, dass sie auf der Geraden durch die andere Seite zu liegen kommen. In der Abbildung werden die Punkte D und E eliminiert. Der Umfang der ursprünglichen Figur bleibt nicht erhalten.

4.3.2 Streckung



Wir untersuchen die Auswirkung einer zentrischen Streckung einer Figur zu seiner Abbildung. Bei der Streckung gibt man einen Streckungsfaktor k vor, der die Längen der Figur entsprechen vergrössert oder verkleinert. Die zentrische Streckung ist eine Ähnlichkeitsabbilung, bei der die Teilverhältnisse von Strecken gleich bleiben. In der Abbildung ist $k = 2$. Deshalb wir deine Quadratseite von der Länge a auf eine solche der Länge $k \cdot a = 2a$ abgebildet. Die Fläche des Abbilds ist somit $F = (2a)^2 = 4a^2$ und somit $k^2 = 4$ mal grösser als das Urbild.

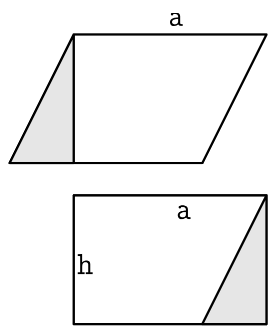
Satz 4.1. Wir eine Figur mit dem Faktor k zentrisch gestreckt (gestaucht), dann ist die Fläche des Abbilds um den Faktor k^2 grösser (kleiner) als die Fläche des Urbildes.

Anmerkung 4.2. Würde man einen Würfel in alle 3 Richtung strecken, so wäre der Rauminhalt um den Faktor k^3 mal grösser.

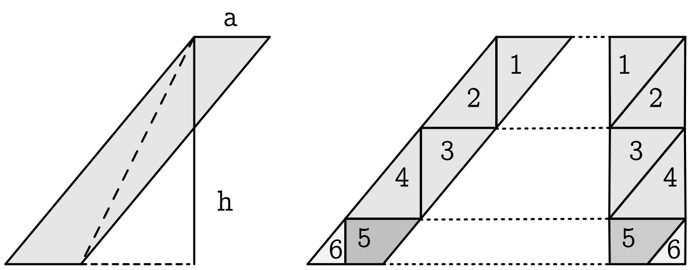
4.3 Übung Zwei ähnliche Figuren besitzen entsprechende Seiten der Länge 3 und 21. Wieviel mal grösser ist die Fläche der zweiten Figur? Die Seite ist 7 mal länger. Somit ist die Fläche $7^2 = 49$ mal grösser. ◁

4.4 Vier- und Vielecke

4.4.1 Parallelogramm

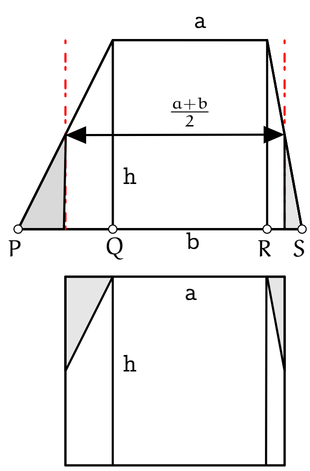


WWir bestimmen die Fläche aufgrund der sogenannten Zerlegungsgleichheit, wonach zwei Vielecke flächengleich sind, wenn sie in die gleichen Teilvielecke aufgeteilt werden können. In der Abbildung sieht man, wie das Lot gefällt wird und ein Dreieck entsteht, das auch Teil eines Rechtecks ist. Die Fläche des Rechtecks ist mit $F = a \cdot h$ bekannt.



In diesem zweiten Beispiel versagt die Methode und die Aufteilung erfolgt in wiederkehrendem Zickzack. Dass dies auch so stets möglich ist, scheint nicht ganz selbstverständlich zu sein. Es funktioniert dank des archimedischen Axioms, das wir nicht weiter diskutieren.

4.4.2 Trapez



Wir stützen uns wiederum auf die Zerlegungsgleichheit. Zwischen den Punkte P und Q sowie R und S errichten wir die Mittelsenkrechte und fügen die äusseren überlappenden Dreiecke ein. Das Rechteck erlangt somit die Breite vom Mittelwert der Längen der beiden parallelen Seiten, also $m = \frac{a+b}{2}$. Die Höhe bleibt unverändert. Somit folgt die Trapezfläche als:

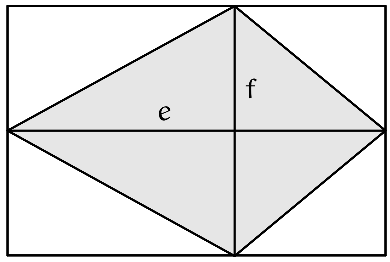
$$F = h \cdot \frac{a+b}{2}.$$

Die Strecke mit der Länge $m = (a+b)/2$ nennt man Mittelparallele.

4.4.3 Drachenviereck

Das Drachenviereck nennt sich auch einfach Drache oder Deltoid.

Ein Drachen ist zwar nicht durch seine zwei Diagonalen eindeutig bestimmt, aber daraus lässt sich die Fläche berechnen. Betrachten wir die Abbildung, dann sehen wir ohne Mühe, dass der Drachen genau die Hälfte der Rechtecksfäche ausmacht. In jedem Quadraten ist das Rechteck in zwei Dreiecke halbiert. Die Fläche folgt aus den Diagonalen e und f sogleich als

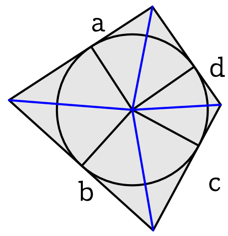


$$F = \frac{1}{2} e \cdot f.$$

Man kann natürlich auch über das Dreieck argumentieren.

4.4.4 Tangentenviereck

Auch wenn diese Bestimmung nicht sehr wichtig ist, dient sie zur Übung. Wir erkennen die vier Dreiecke, die durch die Seiten und die Verbindungslinien der Ecken zum Kreismittelpunkt gebildet werden. Jedes Dreieck hat die halbe Fläche von Radius r mal Seitenlänge. Also

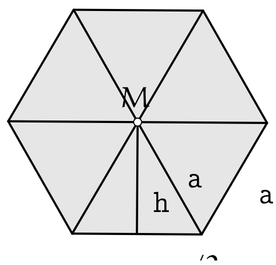


$$F = \frac{1}{2} r(a + b + c + d).$$

Eine schöne Formel.

4.4.5 Regelmässiges Sechseck

Die Fläche des regelmässigen Sechsecks zu bestimmen, ist eine leichte Übung. Es gilt schon mal, dass man die Fläche von sechs gleichseitigen Dreiecken summieren muss. Ein Dreieck hat die Fläche $A = h \cdot a/2$. Somit folgt $F = 3 \cdot a \cdot h$. Die Höhe h ergibt sich mit dem Pythagoras zu $h = \sqrt{a^2 - a^2/4} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Somit gilt

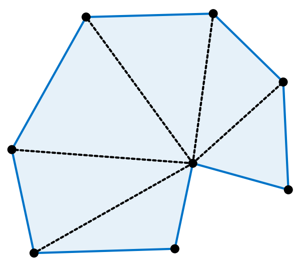


$$F = \sqrt{3}\frac{3}{2}a^2.$$

Die Fläche des regelmässigen Fünfecks aus der Seite wird uns später noch beschäftigen. **Vorgriff: Es wird sich zeigen, dass für regelmässige Vielecke die Fläche mit sogenannten trigonometrischen Funktionen allgemein formuliert werden kann. Es ist nämlich für das n-Eck die Fläche $F = \frac{n a^2}{4 \tan(180^\circ / n)}$. Die Funktion tan() ist der Tangens.

4.4.6 Beliebiges Vieleck

Polyeder oder Vielecke sind durch einen geschlossenen Streckenzug dargestellt. Ein n-Eck kann aus einem Punkt in $n - 2$ Dreiecke zerlegt werden. Die Fläche der einzelnen Dreiecke kann bestimmt und zur Gesamtfläche addiert werden.



4.5 Gekrümmte Figuren

4.5.1 Kreiszahl

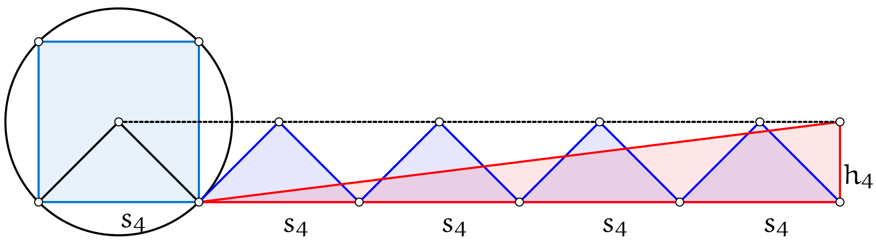
Definition 29. Die *Kreiszahl* π ist eine mathematische Konstante, die das Verhältnis des Umfangs U eines Kreises zu seinem Durchmesser D angibt,

$$\pi = \frac{U}{D} \approx 3.141593.$$

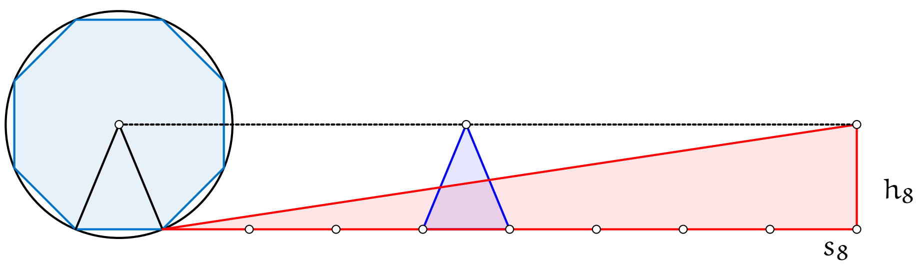
Anmerkung 4.1. Schon von Alters her ist dieses Verhältnis als sehr speziell aufgefallen. Im Alten Testament wir ein Wasserbecken erwähnt, das 10 Ellen im Durchmesser und 30 Ellen im Umfang misst (1 Kön 7,23). Daraus leitet sich dann ein Verhältnis von 3 ab. In der griechischen Übersetzung stand dann 33/10. Die Babylonier rechneten mit $3\frac{1}{8}$ und die Ägypter mit $(16/9)^2 \approx 3.16$. Praktisch ist der Bruch $\frac{22}{7} \approx 3.143$ häufig genügend. Heute kennt man die Zahl π auf 50 Billionen Stellen.

4.5.2 Kreis

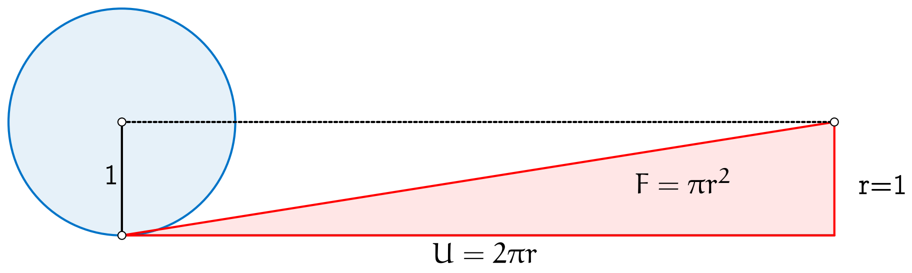
Die Bestimmung der Kreisfläche kann man nach einer Idee von Niklaus von Kues erreichen. Wir stellen ein Viereck her, das im Einheitskreis eingezeichnet ist. Vom Mittelpunkt aus zeichnen wir die vier Dreiecke, die das Quadrat ausmachen. Nun rollen wir die Dreiecke ab. Mittels Scherung können wir die vier Dreiecke zu einem einzigen zusammenfügen. Die Fläche dieses Dreiecks ist, wie immer, Grundfläche mal Höhe halbiert, also $F_4 = 4 \cdot s_4 \cdot h_4 \frac{1}{2}$.



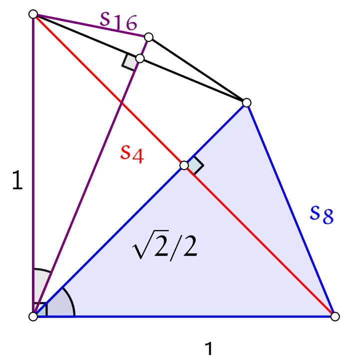
Nun erzeugen wir aus dem Quadrat ein regelmässiges Achteck, indem wir zwischen zwei Ecken des Quadrats je einen weiteren Punkt einfügen. Wiederum rollen wir die acht Dreiecke ab und erzeugen ein einziges mit der Fläche $F_8 = 8 \cdot s_8 \cdot h_8 \frac{1}{2}$.



Nun stelle wir uns vor, dass wir wiederum so verfahren, also ein 16-Eck kontruieren, sodann ein 32-Eck usw. Schon jetzt erkennen wir, dass sich die abgerollte Strecke immer mehr dem Umfang des Kreises und die Höhe sich dem Radius des Einheitskreises annähert. Die Kreisfläche ist wird somit zu Umfang mal Radius halbe, $F_{\text{Kreis}} = U \cdot r\frac{1}{2} = 2\pi r \cdot r\frac{1}{2} = \pi r^2$.



** Wir können das noch ein wenig stärker begründen, wenn wir die Umfänge der Vielecke betrachten. Beim Viereck ist die Seitenlänge mit dem Pythagoras $s_4 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Es folgt



$$s_8 = \sqrt{(1-\frac{s_4}{2})^2 + (\frac{s_4}{2})^2} = \sqrt{1 - s_4 + \frac{s_4^2}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Ebenso gilt für s_8

$$\begin{aligned} s_{16} &= \sqrt{(1-h_8)^2 + (\frac{s_8}{2})^2} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{1-(\frac{s_8}{2})^2}\right)^2 + (\frac{s_8}{2})^2} \\ &= \sqrt{1 - 2\sqrt{1-(\frac{s_8}{2})^2} + 1 - (\frac{s_8}{2})^2 + (\frac{s_8}{2})^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}}} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Mit grosser Geduld könnte man weiter zeigen, dass gilt

$$s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}} \quad \text{und} \quad s_{64} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

Mit dem Computer machen wir eine Tabelle wie folgt

n	s_n	$U_n = s_n \cdot n$	$U_n/2$
4	1.414214	5.656854	2.828427
8	0.765367	6.122935	3.061468
16	0.390181	6.242890	3.121445
32	0.196034	6.273097	3.136549
64	0.098135	6.280662	3.140331
128	0.049082	6.282555	3.141277

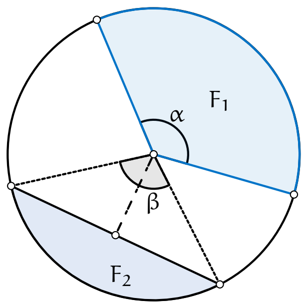
Aus der Tabelle entnehmen wir, dass ersten s_n mit wachsendem n immer kleiner wird, der Umfang immer grösser und sich als halber Umfang der Kreiszahl π von unten annähert. Für π gilt $\pi \approx 3.141593$. Somit haben wir auch ein Verfahren kennengelernt, die Kreiszahl näherungsweise zu bestimmen.

Satz 4.2. Die Fläche F eines Kreises mit Radius r ist

$$F = \pi \cdot r^2$$

4.5.3 Kreissegment, Sektor

Anstatt Kreissektor verwendet man auch den Ausdruck Kreisabschnitt. Sektor kommt vom lateinischen *secare*, was abschneiden heisst.

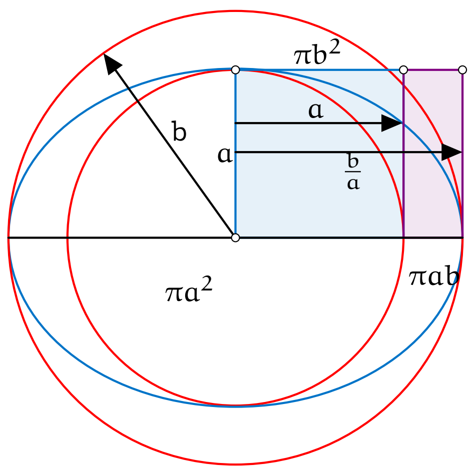


Der Flächeninhalt des Sektor ist proportional zum Winkel α. Da der Winkel bis 360° geht und dann ein Flächeninhalt von πr^2 resultiert, ist die Fläche des Sektors einfach

$$F_{Sek} = \frac{\alpha}{360}\pi r^2$$

Für das Segment muss man die Differenz der Fläche des Sektors und des Dreiecks bilden. Angenommen es sei die Höhe h des Dreiecks gegeben und β ist nicht überstumpf, d.h. $\beta < 180°$, dann rechnet man $F = \frac{\beta}{360}\pi r^2 - h \cdot \sqrt{1 - h^2}$. Nun gibt es einen Zusammenhang zwischen β und h, den wir später erörtern werden[1].

4.5.4 Ellipse



Die Ellipse kann aus einer affinen Abbildung mittels der zwei Kreise mit Hauptachenabständen als Radien konstruiert werden. Die hellblaue Kurve geht aus der Verschiebung der Punkte des inneren Kreises hervor. Analog wird das Quadrat a^2 nach aussen nur in einer Richtung um $\frac{b}{a}$ gestreckt und erzeugt so das Rechteck mit der Fläche ab. Der Kreis wird wie auf einer Gummihaut horizontal gestreckt. Somit folgt für die Ellipse $F = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a}$.

Satz 4.3. Die Fläche der Ellipse mit den Achsen a und b ist

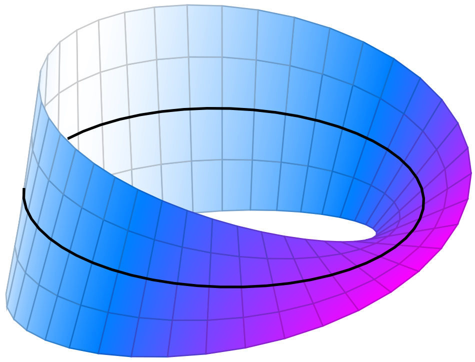
$$F = \pi \cdot a \cdot b.$$

4.5.5 Orientierung von Flächen

Bei einer ebenen Figur können wir uns eine Ober- und eine Unterseite vorstellen.

[1] Es ist $h = \cos(\beta)$.

Es gibt aber zweidimensionale Flächen im Raum, die keine solche Eigenschaft aufweisen. Das bekannte Möbiusband stellt man her, indem man einen Streifen schneidet, und die Enden verdreht zusammenleimt. Bei diesem Gebilde kann man mit dem Finger auf der Oberfläche ohne Sprung rundherum fahren und sowohl innen als auch aussen sein. Man sagt, die Schleife ist nicht *orientierbar*, denn man kann nicht zwischen unten und oben oder zwischen innen und aussen unterscheiden.



4.5.6 Zusammenfassung Flächenformeln

Formel 4.4 (Flächen und Umfänge).

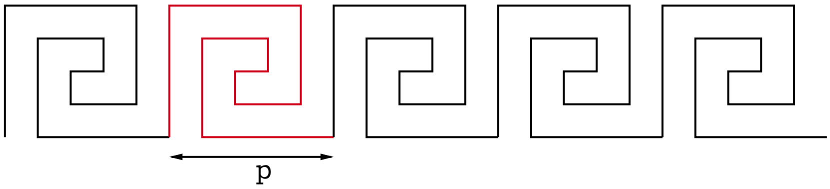
Figur	Flächeninhalt F	Umfang U
Allgemeines Dreieck	$\frac{1}{2}a \cdot h_a,\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	$a+b+c$
Gleichseitiges Dreieck	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$3a$
Gleichschenkliges Dreieck	$\frac{1}{2}c\sqrt{a^2-\frac{1}{4}c^2}$	$2a+c$
Rechtwinkliges Dreieck	$\frac{1}{2}ab$	$a+b+c$
Quadrat	a^2	$4 \cdot a$
Rechteck	$a \cdot b$	$2a+2b$
Raute (Rhombus)	$\frac{1}{2}ef$	$4a$
Parallelogramm	$a \cdot h_a$	$2 \cdot (a+b)$
Trapez	$m \cdot h = \frac{1}{2}(a+c) \cdot h$	$a+b+c+d$
Drachen	$\frac{1}{2}ef$	$2 \cdot (a+b)$
Tangentenviereck	$\frac{1}{2}r \cdot (a+c+b+d)$	$a+c+b+d$
Regelmässiges Fünfeck	$\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$5a$
Regelmässiges Sechseck	$\frac{3}{2}\sqrt{(3)}a^2$	$6a$
Regelmässiges Vieleck	$\frac{na^2}{4\tan(180°/n)}$	$n \cdot a$
Kreis	πr^2	$2\pi r$
Kreisring	$\pi \cdot (R^2 - r^2)$	$2 \cdot \pi \cdot (R+r)$
Kreisausschnitt (Sektor)	$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$	$\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°} + 2r$
Kreisabschnitt (Segment)	$\frac{\alpha}{360}\pi r^2 - h \cdot \sqrt{1-h^2}$	$\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°} + 2r$
Ellipse	$\pi a \cdot b^2$	–

4.6 Ornamente und Pflasterung**

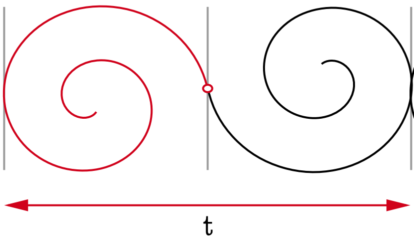
Geometrische Figuren sind schon von frühen Kulturen zur Verzierung von Gefässen oder Gebäuden, oder auf Textilien und beim Schmuck verwendet worden. Bekannt ist die Schnurkeramik der Kupfersteinzeit. Im Bauwesen verwendet man Pflasterstein, Fliesen und Kacheln, um Böden und Wände zu konstruieren und zu schützen. Dabei wird auf eine lückenlose Bedeckung geachtet.

4.6.1 Ornamente

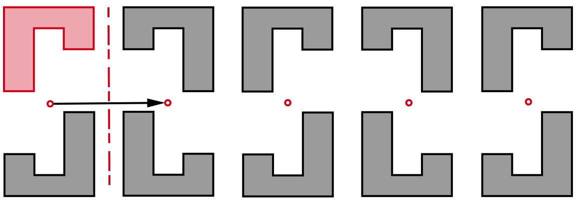
Wir betrachten sogenannte Friesornamente, die man an den Wänden nahe der Decke so oft findet. Ähnlich sind Bandornamente auf Textilien, die beidseitig gemustert sein können. Ein einfachses Beispiel ist eine Mäanderlinie, die regelmässig um die Periodenlänge p horizontal verschoben wird.



Grundmuster kann man auch spiegeln und dann Grundform mit Spiegelbild regelmässig verschieben.



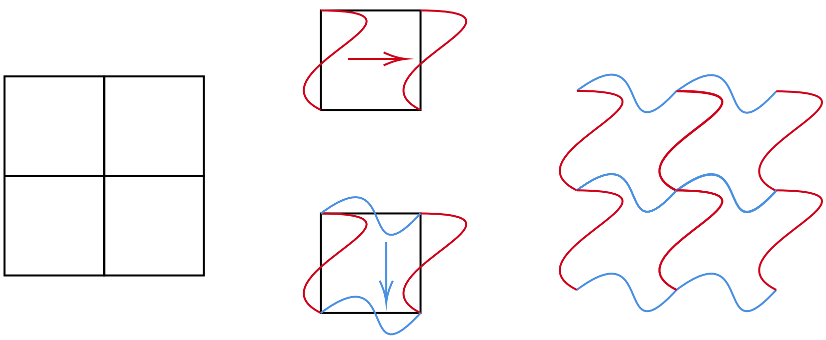
Häufig sieht man auch Friesornamente auf zwei Reihen. Dabei wird eine Grundform transformiert, d.h. gespiegelt (punkt- und Achsenspiegelung), gedreht, verschoben oder geklappt.



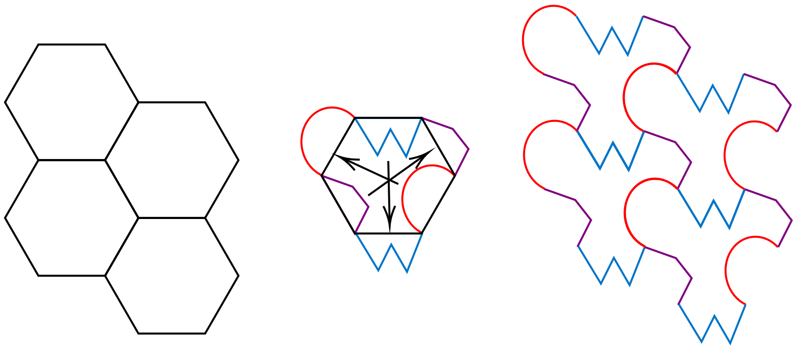
Bandförmige Ornamente kann man nach Transformationen ordnen und klassifizieren.

4.6.2 Pflasterung, Parkettierung

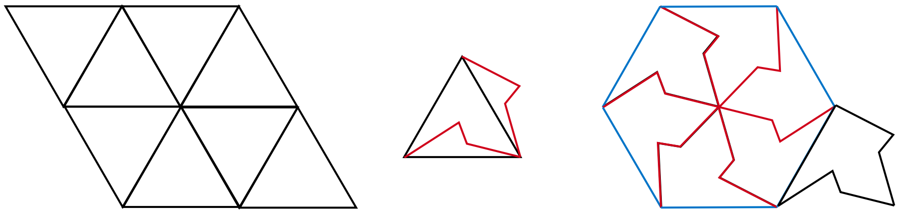
Die einfachsten gleichseitigen Kacheln für eine komplette Bedeckung sind die drei regelmässigen Vielecke, nämlich Drei-, Vier- und Sechseck. Sie liegen Kante an Kante. Das sind die platonischen Parkettierungen. Die Flächen besitzen Axial- und Rotationssymmetrien. Sie lassen sich nutzen, um die Flächen zu transformieren.
Als erste Beispiel zeigen wir ein Quadrat mit entsprechender Parkettierung.

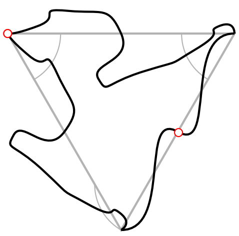


Wenn die Kanten aneinander liegen, also nicht reihenweise verschoben sind, so kann man zwei Translationsrichtungen ausmachen, hier horizontal und vertikal. Nun ist es einfach möglich, die Kanten durch eine neue Linie zu ersetzen, wobei diese in senkrechter Richtung vervielfältigt wird.
Bei der Parkettierung mit regelmässigen Sechsecken gibt es drei Translationsrichtungen und damit drei Kanten, die verändert werden können.

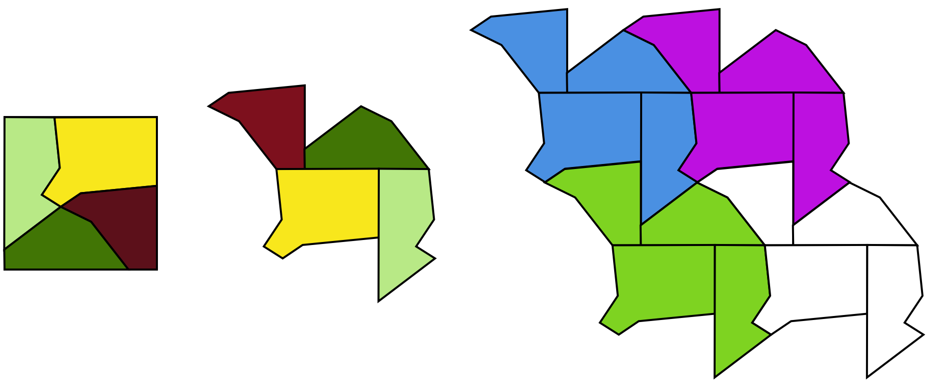


Die dritte platonische Parkettierung verwendet regelmässige Dreiecke. An einem solchen Dreieck nehmen wir eine Änderung einer Seite vor und rotieren die neue Kurve um 60°. Dadurch erhalten wir eine neue Fläche, die man wiederum zur Pflasterung verwenden kann. Die Translation ist hier nicht angebracht, denn ein Nachbar ist keine Verschiebung der betrachteten Kachel.

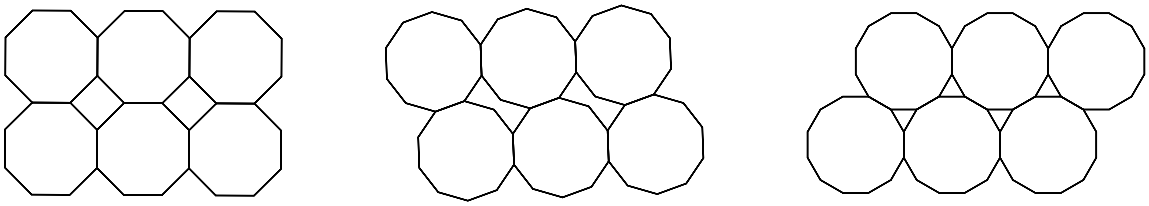




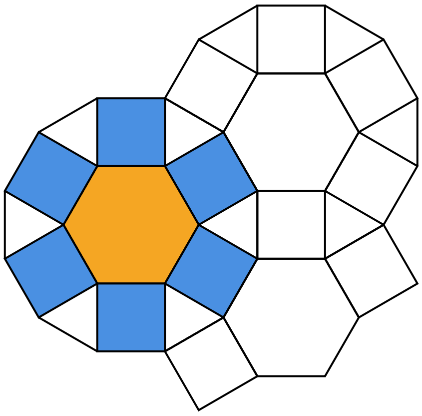
Wir haben eine Kantenkontur an der unteren rechten Ecke gedreht. Zusätzlich kann man noch dazu an der dritten Kante eine Punktspiegelung am Seitenmittelpunkt ausführen. In der Abbildung sehen wir die Drehung um die Ecke oben links und zusätzlich die Speigelung an der Kante unten rechts. Es entsteht eine Art Ente. Bei all diesen Operationen ist es wichtig, dass die neuen Linien in den Ecken beginnen und enden und die Linie sich nicht selber schneidet.
Eine rechteckige Kachel kann man auch zweimal durchschneiden und die vier Teile neu anordnen. Die neue Kachel pflastert dann die Ebene ebenfalls lückenlos aus.



Man kann auch mit mehr als einer Kachelform parkettieren. Zum Beispiel mit zwei, wie nachfolgend dargestellt. Man findet Achteck mit Quadrat, Zehneck mit sechseckigem Vieleck und Zwölfeck mit Triangel. Weiters kann man auch verschiedene Kachel mit gleicher Seitenlänge finden.



Grundformen von Pflasterungen sind auch mit drei Kacheln möglich, hier gleichseitige Drei-, Vier- und Sechsecken.

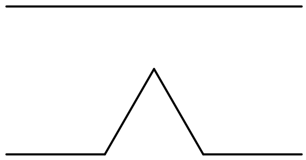


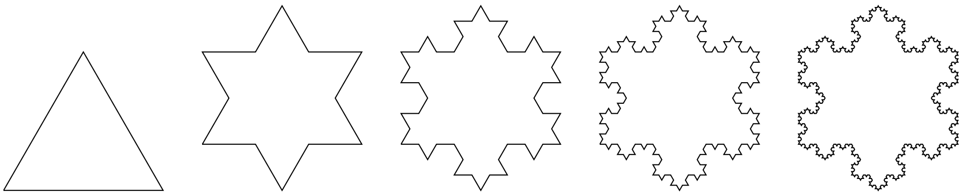
Nun kann man sich die Frage stellen, wie man den Raum, eine Dimension höher als die Fläche, lückenlos durch Elemente ausfüllen kann. Sofort fallen einem Quader, Tetraeder und Parallelepipede oder Zylinder mit regelmässigem Sechseck als Grundfläche ein.

4.6.3 Fraktale

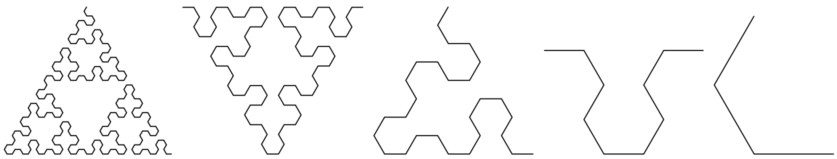
In den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts untersuchte ein Forscher die Länge der Küstenlinie. Er erkannte, dass die Länge der Küste davon abhängig ist, mit welchem Massstab fester Länge e gemessen wird. Denn die Küste hat immer wieder Buchte von unterschiedlichen Ausmassen. Eine Bucht von 1m Durchmesser erscheint nicht bei einer Messung mit einem Massband von 10m. Die Länge der Küstenlinie ist ein Funktion der Messlänge, $L(e)$. Je kleiner e desto länger und somit grösser $L(e)$. Der Forscher fand experimentell, dass ungefähr gilt wie $L(e) = k \cdot e^{1-D}$ und D meist keine ganze Zahl ist.
Die Zahl D nennt man eine *fraktale Dimension*, welche als Mass für die "Rauhigkeit" einer Linie dient. Die Küste Englands hat $D = 1.25$, wogegen Deutschland $D = 1.15$ besitzt. Das Wort Fraktal meint also Figuren mit einer gebrochenen Dimension, die zwischen 1 und 2 liegen soll.
Fraktale Linien sind *selbstähnlich*, weil man bei mehreren verschiedenen Vergrösserungen immer dieselbe Form findet.
Neben unregelmässigen Linien wie eben Küsten gibt es auch regelmässige, die eben nach einer festen Regel erzeugt werden.

Die folgende *Koch'sche Schneeflocke* von 1904 zeigt das Konzept nochmals. Die Flocke wird in jedem Schritt weiter verästelt. Dabei wird jede gerade Kante durch eine mit einem Zacken in der Mitte ersetzt. Rückwärts betrachtet misst man den Umfang mit einem immer grösseren Massstab. Ihre Dimension ist $D \approx 1.26$.

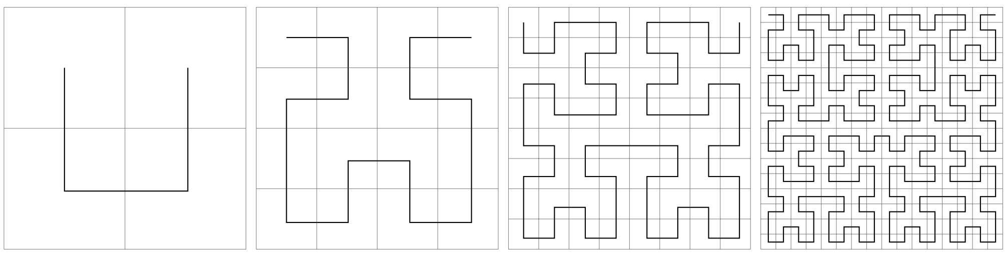




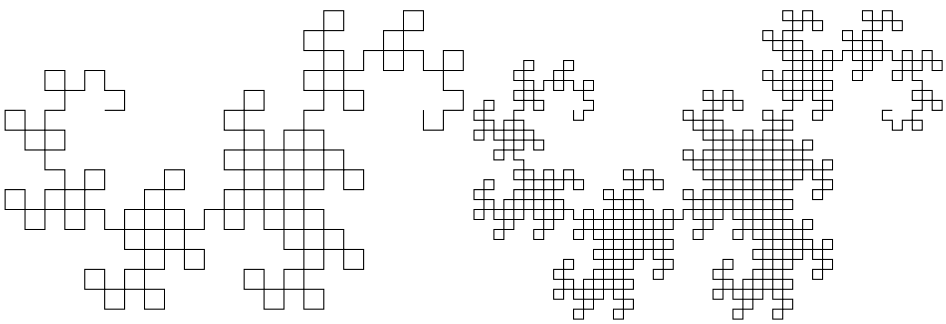
Ein anderes Beispiel ist das folgende nach Sierpinski.

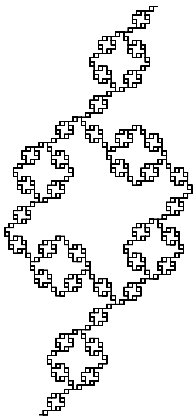
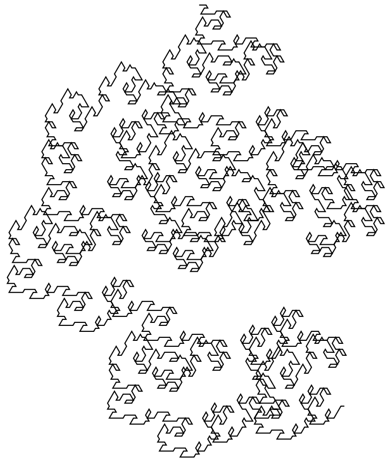


Die nächste Kurve von Peano soll zeigen, wie man eine Kurve durch alle Mittelpunkt von einzelnen Feldern von Gittern legen kann, unabhängig von deren Ausmass. Es ergeben sich regelmässige Muster, wobei man bei höheren Stufen nicht mehr sagen kann, was innen oder aussen, resp. unten oder oben ist.



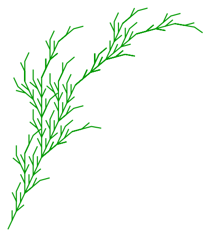
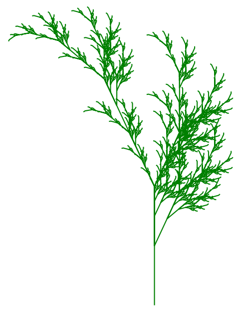
Und weil es so schön ist, hier die sogenannte Drachenkurve mit verschiedenen Iterationsstufen.



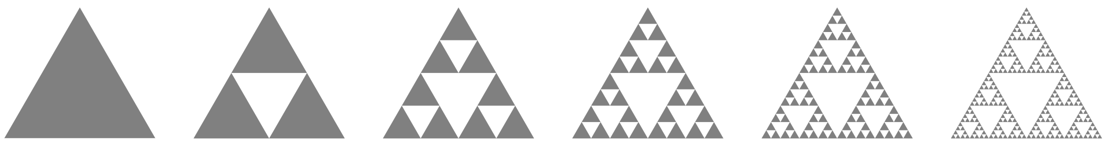



Die Mathematik zeichnet sich durch möglichst grosse Abstraktion zur Vereinfachung aus. Hinter all diesen Kurven kann man ein System ausmachen, das vier Elemente umfasst und eine höchstvereinfachte Grammatik beschreibt. Es stammt vom Biologen Lindenmayer. Wir untersuchen die Koch'sche Flocke. Erstens gibt es den Variablensatz, hier mit nur einem Element F für eine gerade Strecke der Länge s^n mit $s < 1$, zweitens einen Satz mit Konstanten, hier $+$ und $-$ für Drehung in beide Sinne um einen Winkel α, drittens ein Startwort ("Axiom"), z.B. $F--F--F$ für den Anfang der Kurve und viertens Ersetzungsregeln, hier $F- > F+F--F+F$. Für alle gezeigten Kurven gibt es eine solche Grammatik, die von Graphikprogrammen verstanden wird. Man verkürzt die Länge s^n, weil $s < 1$ ist, um unabhängig von der ausgeführten Anzahl Schritte n gleichgrosse Bilder zu erzeugen.

Wenn die Regel nicht symmetrisch ist, entstehen ebenfalls regelmässige Kurven, die nicht symmetrisch aussehen. Man erkennt an solchen Kurven, dass die Natur, in der Flora, genau solche Regelmässigkeiten zeigt. Hier zeigen wir eine Pflanze, die nach der Ersetzungsregel $F- > F[+F]F[-F]$, dem Startwert F, der Ordnung $n = 4$, dem Winkel $\alpha = 25°$ und der Länge $s = 2$ erzeugt wurde. Mit Klammerpaaren kann ein im Leeren endender Zweig gezeichnet werden.

Bis hierhin haben wir Linien betrachtet. Analog kann man mit Fläche umgehen. Es wird eine Regel festgelegt, die ein Flächenelement transformiert. Sehr bekannt ist Sierpinski-Dreieck.



An den Beispielen erkennt man die Bedeutung von Geometrie für die Natur und für die Graphik. Im weiteren kann man die Regeln mit einer gewissen Zufälligkeit anpassen, indem man Parameter nach einer Verteilungsfunktion variiert.

Aufgaben

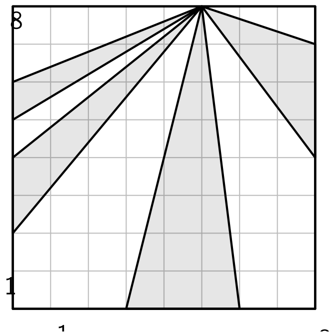
3.1 Von einem Dreieck sind die Seiten $a = 4$, $b = 6$ und $c = 8$ gegeben. Berechne die Fläche des Dreiecks.

1 Zur Bestimmung der Fläche aus den Seitenlängen verwenden wir die Formel von Heron.

$$F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \qquad \text{mit} \qquad s = (a+b+c)/2$$

Mit $s = 18/2 = 9$ folgt $F^2 = 9 \cdot (9-4) \cdot (9-6) \cdot (9-8) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 135$ und damit $F = \sqrt{F^2} = \sqrt{135} \approx 11.619$.

3.2 Bestimme den Flächenanteil der grauen Dreiecke. Das Quadrat ist 8×8 gross.

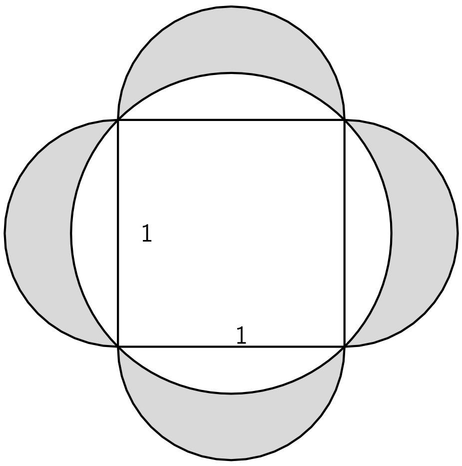


2 Wir bestimmen die Fläche von vier Dreiecken, die gemäss $F = 0.5 g \cdot h$ gegeben sind. Im Gegenuhrzeigersinn von links: $F_1 = 0.5 \cdot 1\dot{5} = 2.5$, $F_2 = 0.5 \cdot 2 \cdot 5 = 5$, $F_3 = 0.5 \cdot 3 \cdot 8 = 12$ und $F_4 = 0.5 \cdot 3 \cdot 3 = 4.5$, zusammen $F = 24$. Als Anteil $q = 24/64 = 3/8$.

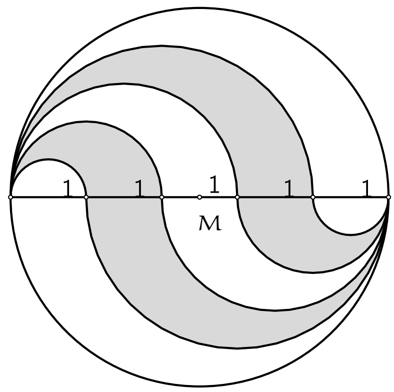
3.3 Die Erde sei eine Kugel mit einem Umfang von 40'000 km. Angenommen der Umfang verlängere sich um 1m. Um wieviel vergrössert sich der Radius?

3 Es gilt $U_1 = 2\pi r_1$ und $U_2 = 2\pi(r_2)$ und $U_1 = U_2 + 1$ oder $U_1 - U_2 = 1 = \Delta U$. Damit $\Delta U = 1 = 2\pi(r_1 - r_2) = 2\pi\Delta r$ und $\Delta r = 1/2\pi \approx 0.1592$. Wenn der Erdumfang um 1 Meter länger wird, vergrössert sich der Erdradius um ca. 16cm!

3.4 Bestimme die schraffierten Flächenanteile



(a)

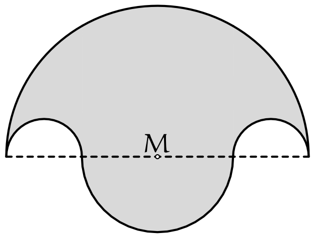


(b)

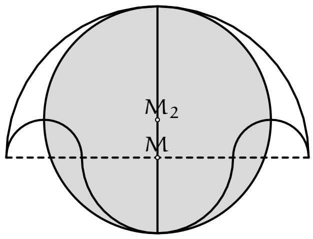
4 **(a)** Der Radius des inneren Kreises ist $r = \sqrt{2}/2$. Die Fläche des Kreises ist somit $K = \pi r^2 = \pi \cdot 1/2$. Das Quadrat hat die Fläche $Q = 1$, pro Mond ein Viertel davon, also $q = \pi/8$. Die Halbkreise über dem Quadrat $H = \pi 0.5^2/2 = \pi 0.5^3 = 0.125\pi = \pi/8$. Die Möndchen haben die Fläche $M = H - (K/4 - Q/4) = H + Q/4 - K/4 = \pi/8 + 1/4 - \pi/8 = 1/4$. Alle vier zusammen $4M = 4 \cdot 1/4 = 1$. Die Möndchen haben dieselbe Fläche wie das Quadrat!

(b) Die zwei schraffierten Figuren sind gleich, da punktsymmetrisch. Wir betrachten nur die linke Figur. Sie besteht aus zwei Teilen, die wiederum Differenzen von Halbkreisflächen sind. Der Durchmesser des Kreises ist 5. $F_1 = \pi 1^2/2 - \pi 0.5^2/2 = 3/8\pi$. Das untere Stück $F_2 = \pi 2^2/2 - \pi 1.5^2/2 = 2\pi - 2.25/2\pi = \pi(2 - 1.125) = \pi 0.875 = 7/8\pi$. Zusammen $F_1 + F_2 = 10/8\pi$. Beide Figuren somit $F = 20/8 = 5/2\pi$. Anteil: $F/(\pi 2.5^2) = 2.5\pi/6.25\pi = 0.4$.
(Die mittlere zentrale Figur hat die Fläche $2A = \pi(1.5^2 - 1^2) = \pi 1.25$ oder anteilsmässig $q = \pi 1.25/(\pi 6.25) = 0.2$. Die zwei Randfiguren sind kongruent. Die Fläche ist $S = \pi(2.5^2 - 2^2)/2 + \pi 0.5^2/2 = \pi(1.125 + 0.125) = \pi 1.25 = \pi 10/8$, anteilig $q_2 = 1.25/6.25 = 1/5 = 0.2$. Auch diese Figuren besitzen einen Anteil von 1/5. Somit haben alle Figuren dieselbe Fläche, nämlich 1/5 der Kreisfläche!)

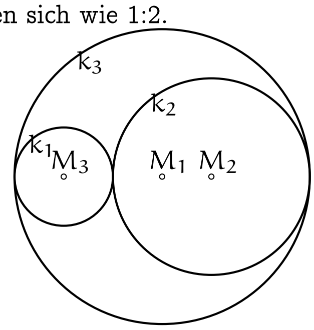
3.5 Bestimme die Fläche und zeichne einen entsprechenden Kreis ein. (Die Figur ist als Salzfass des Archimedes bekannt.)



5 Wir nehme den Durchmesser zu 2 an. Über der Linie finden wir die Fläche $\pi 1^2/2 - 2 \cdot \pi(1/4)^2/2 = \pi(1/2 - 1/16) = \pi 7/16$. Unter der Linie finden wir die Fläche $A = \pi 0.5^2/2 = \pi/8$. Zusammen also $F = \pi(7 + 2)/16$. Der Kreis mit dieser Fläche hat den Radius $R = \sqrt{9/16} = 3/4$. Das entspricht der Höhe der Figur.

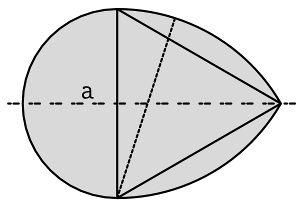


3.6 Bestimme das Verhältnis des Umfangs des Umkreises mit der Summe der Umfänge der Innenkreise. Die Radien der Innenkreise verhalten sich wie 1:2.



6 Wir nehmen den Durchmesser zu 6 an. Der grosse Umfang ist $U_3 = \pi 6$, die kleinen $U_1 = 2\pi 1$ und $U_2 = 2\pi 2$, zusammen $U_2 + U_1 = 6\pi$. Das Verhältnis ist $q = \frac{6\pi}{6\pi} = 1$.

3.7 Bestimme die Fläche der Figur.



7 Die Figur besteht aus einem Halbkreis A_1, zwei überlagerten Kreisausschnitten A_2 und einem gleichseitigen Dreieck A_3. Die Fläche ist $F = A1 + 2A_2 - A_3$. Es ist $A_1 = \pi a^2/2$, $A_2 = \pi(2a)^2/6$ und $A_3 = \sqrt{3}a^2/2$. Zusammen $F = \pi a^2/2 + 2\pi(2a)^2/6 - \sqrt{3}a^2/2 = \pi a^2/2 + 4\pi a^2/3 - \sqrt{3}a^2/2 = a^2[\pi/2 + 4\pi/3 - \sqrt{3}/2]$.

Kapitel 5

Körper

5.1 Begriffe

Geometrische Objekte haben eine Eigenschaft, die man *Dimension* nennt. Anschaulich ausgedrückt ist es die Anzahl Richtungen, die ein Punkt auf oder in diesem Objekt nehmen kann, um sich im Objekt zu bewegen. Eine Punkt kann sich nicht bewegen und hat deshalb die Dimension 0. Ein Punkt kann sich längs einer Geraden oder Linie bewegen und hat somit die Dimension 1. Ein Punkt auf einer Fläche kann sich in zwei Richtungen bewegen, Dimension 2 und ein Körper bietet drei Richtungsmöglichkeiten.

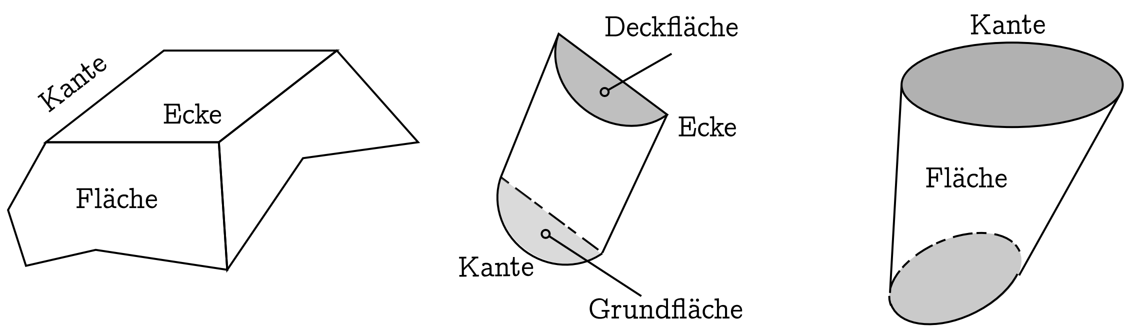
Definition 30. Ein geometrischer *Körper* ist ein allseits von Flächen begrenzter Raum.

Definition 31. Die Summe aller den Körper begrenzenden Flächen heisst *Oberfläche*.

Definition 32. Die Linie, in der sich zwei den Körper begrenzenden Flächen schneiden, heisst *Kante*.

Definition 33. Ein Punkt, in dem drei oder mehr Kanten zusammentreffen, heisst *Ecke*.

In der Abbildung sind die Elemente der Körper eingezeichnet. Wie man erkennen kann, gibt es auch Körper mit Ecken, deren begrenzenden Flächen gekrümmt sind. Man unterscheidet deshalb zur Vereinfachung eckige Körper, die Ecken aufweisen und gerundete Körper, die keine Ecken, aber allenfalls Kanten, besitzen.

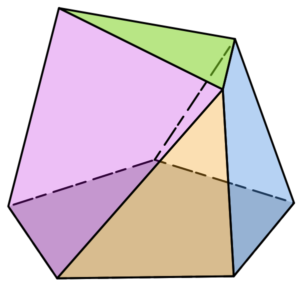


Bei Körpern, die zwei parallele Begrenzungsflächen besitzen, spricht man von Deck- und Grundfläche.

5.2 Eckige Körper, Polyeder

Wir betrachten zuerst die eckigen Körper, solche mit Ecken. Man nennt solche Körper *Polyeder*, wenn sie keine gekrümmten Flächen aufweisen.

Definition 34. Ein *Polyeder* ist ein dreidimensionaler Körper, der ausschliesslich von ebenen Flächen begrenzt wird.



Das allgemeine Polyeder kann unendlich viele Formen annehmen, Vertiefungen, Löcher, einspringende Ecken usw. aufweisen. Aus dieser Mannigfaltigkeit der Ausprägungen haben aber ein paar wenige die Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Im weiteren werden wir die häufigsten Spezialfälle betrachten. Bestes Beispiel ist der Quader, der uns fast täglich vom Postboten ausgehändigt wird.

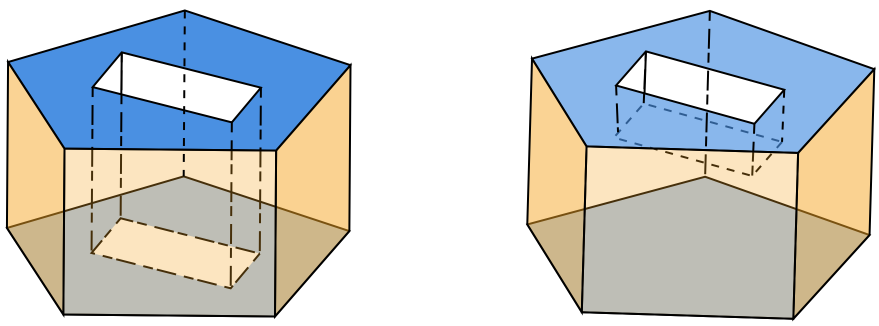
Es wurde schon früh gefragt, ob es einen regelmässigen Zusammenhang von Flächen, Ecken und Kanten gibt. Und tatsächlich kann man eine Regel formulieren.

Satz 5.1. Euler'scher Polyedersatz Für ein beschränktes konvexes Polyeder mit E Anzahl Ecken, K Anzahl Kanten und F Anzahl Flächen gilt:

$$E - K + F = 2$$

Ein beschränktes Polyeder ist ein solches, das sich nicht ins Unendliche ausdehnt. Dieses Zusatzu ist also ein wenig spitzfindig. Ein Polyeder heisst konvex, wenn für je zwei Punkte des Polyeders die Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten vollständig im Polyeder liegt. Damit sind also z.B. eckige Donuts ausgeschlossen.

5.2 Übung Wir betrachten die Abbildung mit zwei sehr ähnlichen Körpern. Beim linken geht ein rechteckiges Loch durch den ganzen Körper. Beim rechten gibt es nur eine quaderförmige Vertiefung.



Die Anzahl Kanten $K = 27$ und die Anzahl Ecken $E = 18$ sind identisch. Nur die Anzahl Flächen ist unterschiedlich, links $F = 11$ und rechts $F = 12$. Es handelt sich um den Boden des Lochs, der zusätzlich hinzukommt. Für die linke Figur gilt $E - K + F = 18 - 27 + 11 = 2$, für die rechte $E - K + F = 3$. Der Satz gilt nicht umgekehrt, es gibt auch konvexe Polyeder, die der Formel entsprechen, wie das Beispiel links zeigt. ◁

5.2.1 Quader und Würfel

Definition 35. Ein *Quader* ist ein Körper, der von sechs Rechtecken begrenzt wird, wobei

(1) die sechs Begrenzungsflächen im rechten Winkel aufeinander stehen,

(2) acht rechtwinkelige Ecken und

(3) zwölf Kanten, von denen jeweils vier gleiche Längen besitzen und zueinander parallel sind vorhanden sind.

Aus dem Quader folgt der Würfel, denn man muss nur ein paar Kanten zurecht machen.

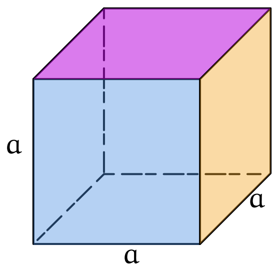
Definition 36. Der *Würfel* (auch Hexaeder oder Kubus) ist ein Polyeder mit

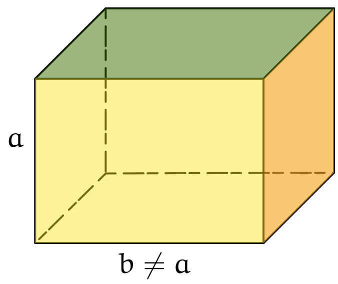
(1) sechs (kongruenten) Quadraten als Begrenzungsflächen

(2) zwölf (gleich langen) Kanten und

(3) acht Ecken, in denen jeweils drei Begrenzungsflächen zusammentreffen.

Anmerkung 5.3. Der Würfel ist ein Spezialfall des Quaders, bei welchem nicht nur jeweils 4 Kanten gleich lang sind sonder alle 12.

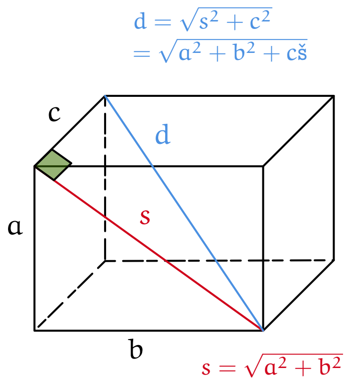




Würfel sind regelmässig, weshalb sie auch als Zufallsgeneratoren verwendet werden können. Die hervorragende Eigenschaft von Quadern ist ihre perfekte Stapelbarkeit. Deshalb findet man diesen Körper in Verpackungen, Backsteinen etc.

Die Diagonale der Quader lässt sich mit dem Satz des Pythagoras bestimmen. Mit den Seiten a, b und c folgt die Diagonale d, die einzig ist, als $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Die Raumdiagonale d folgt aus dem Pythagoras mit der Flächendiagonale s, wie in der Abbildung gezeigt. Für den Würfel einfacher $d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Zusammenfassend

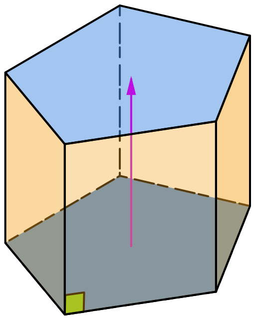
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

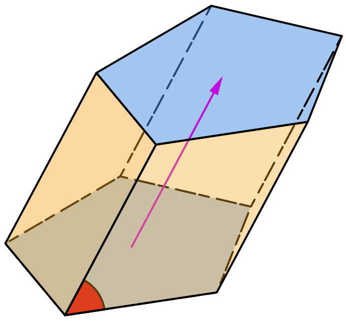


Die Diagonale ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Pythagoras. Das Dreieck mit den Seiten s, c und d ist rechtwinklig.

5.2.2 Prisma

Definition 37. Ein *Prisma* (Mehrzahl: Prismen) ist ein geometrischer Körper, der durch Parallelverschiebung eines ebenen Polygons entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht.



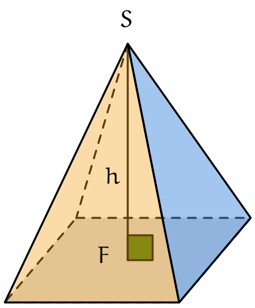


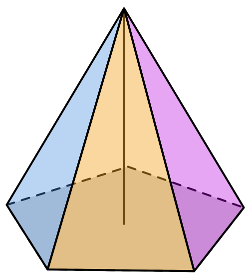
Ist die Parallelverschiebung senkrecht zum Ausgangspolygon, dann handelt es sich um ein *gerades* Prisma. Ist die Verschiebung nicht lotrecht, dann tritt ein *schiefes* Prisma hervor. Dann sind die Seitenflächen Parallelogramme und nicht Rechtecke.
Beim geraden Prisma ist die Höhe gleich der Länge der Kanten, die Grund- und Deckfläche verbinden.

5.2.3 Pyramide und Pyramidenstumpf

Definition 38. Die Pyramide ist ein Polyeder, dessen Grundfläche ein Polygon ist und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die sich in einem Punkt, der Spitze der Pyramide, treffen.

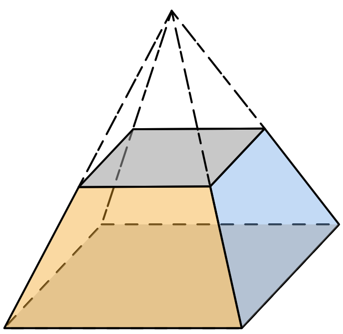
Anmerkung 5.4. Die Grundfläche als Polygon kann regelmässig oder nicht sein. Speziell ist ein gleichseitiges Dreieck, das mit gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen eine *Tetraeder* bildet.

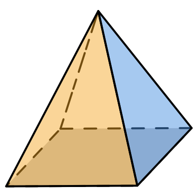




In der Abbildung erkennt man regelmässige Polygone als Grundfläche, was aber nicht eine Bedingung ist. Zudem kann eine Pyramide gerade oder schief sein. Das hängt von der Gleichheit der Winkel der in die Spitze führenden Kanten ab.
Neben der Spitze gibt es noch den *Fusspunkt* F als ausgezeichneten Punkt, der als Schnittpunkt des Lotes von der Spitze auf die Grundfläche entsteht. Der Abstand von Fusspunkt und Spitze ist die Höhe der Pyramide.

Definition 39. Ein *Pyramidenstumpf* ist der Restkörper einer Pyramide, der man parallel zur Grundfläche an den Mantelflächen eine kleinere, ähnliche Pyramide wegtrennt.

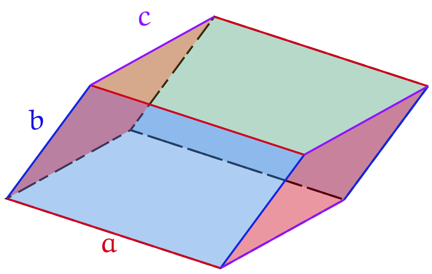




5.2.4 Spat, Parallelepiped

Der Begriff Spat wird nur in der Geometrie verwendet. Die Herkunft ist unsicher, könnte ein Holzscheit bedeuten, das die gefordrte Form aufweist. In der Vektorgeometrie taucht der Begriff nochmals auf.

Definition 40. Ein *Parallelepiped* oder *Spat* ist ein geometrischer Körper, der von 6 Parallelogrammen begrenzt wird, von denen je 2 gegenüberliegende kongruent (deckungsgleich) sind und in parallelen Ebenen liegen.



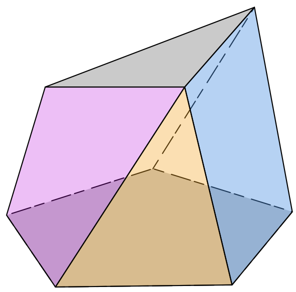
Ein Parallelepiped hat 12 Kanten, von denen je 4 parallel verlaufen und untereinander gleich lang sind, und 8 Ecken, in denen diese Kanten in maximal 3 verschiedenen Winkeln zueinander zusammenlaufen. Sind alle Winkel rechte, dann handelt es sich um einen Quader, der mit dem Würfel ein Spezialfall des Parallelepipeds ist. Ein *Rhomboeder* ist eine Parallelepiped mit allseitig gleichlangen Kanten. Sind zudem alle Winkel rechte, dann ist es ein Würfel.

5.2.5 Prismatoid

Definition 41. Ein *Prismatoid* (oder Prismoid) ist ein Polyeder mit parallelen Vielecken als Grund- und Deckfläche sowie Dreiecken oder Trapezen als Seitenflächen.

Anmerkung 5.5. Im Unterschied zum Prisma brauchen Grund- und Deckfläche nicht kongruent zu sein und auch nicht die gleiche Eckenzahl zu haben.

Bei diesem Körper gibt es nur eine Bedingung, nämlich zwei begrenzende Polygone, die in parallelen Ebenen liegen.
Neben diesen beschriebenen Körpern gibt es eine weitere Kategorisierung von Polygonen, die man als Erweiterung in die dritte Dimension von regelmässigen Polygonen verstehen kann.



5.2.6 Regelmässige Körper

Regelmässige Körper werden auch platonische Körper genannt. Es gibt fünf regelmässige Körper. Ihren Namen enthalten die griechisch ausgedrückte Zahl ihrer begrenzenden Flächen.

- *Tetraeder*, “Vierflächner”, Oberfläche aus vier Dreiecken,
- *Hexaeder*, “Sechsflächner” oder *Würfel*, Oberfläche aus sechs Quadraten,
- *Oktaeder* “Achtflächner”, Oberfläche aus acht Dreiecken),
- *Dodekaeder* “Zwölfflächner”, Oberfläche aus zwölf Fünfecken),
- *Ikosaeder* “Zwanzigflächner”, Oberfläche aus zwanzig Dreiecken).

Eigenschaften

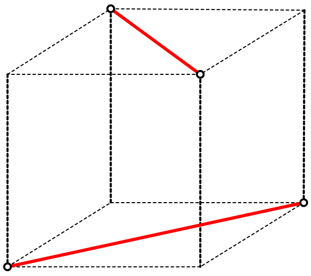
Für regelmässige Körper gelten folgende Beschreibungen:

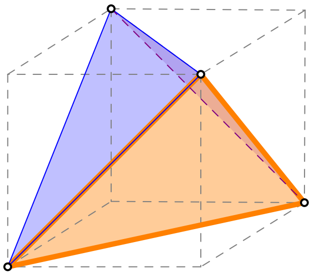
- ihre Oberfläche besteht aus Flächen,
- sie sind konvex, haban keine einspringenden Ecken oder Kanten,

- alle Kanten sind gleich lang,
- alle Flächen sind kongruent, gleichseitig und gleichwinklig,
- alle Ecken haben gleiche Flächen- und Kantenwinkel,
- alle Ecken haben denselben Abstand vom Mittelpunkt, folglich existiert eine Umkugel, eine Kantenkugel und eine Inkugel.

Tetraeder

Das Tetraeder, bestehend aus lauter gleichseitigen Dreiecken, kennen wir schon als Ausprägung der Pyramide mit einem regelmässigen Dreieck als Grundfläche. Jede Ecke ist gleichweit von jeder anderen Ecke entfernt.

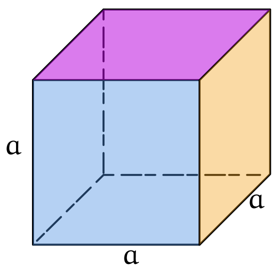




In den 60er Jahren sind für Milch und Fruchtsäfte tetraedrische Verpackungen aufgekommen, die von der Firma Tetrapak hergestellt wurden. Bei genauer Betrachtung erkennt man, dass die Verpackung zwei Schweisskanten aufweist, ansonsten nicht aus Teilflächen zusammengesetzt ist. Bei der Abfüllung wir ein Kartonschlauch zweimal senkrecht abgezwackt.

Das Tetraeder kann wie ein Würfel ideal gestapelt werden, d.h. ohne Zwischenräume.

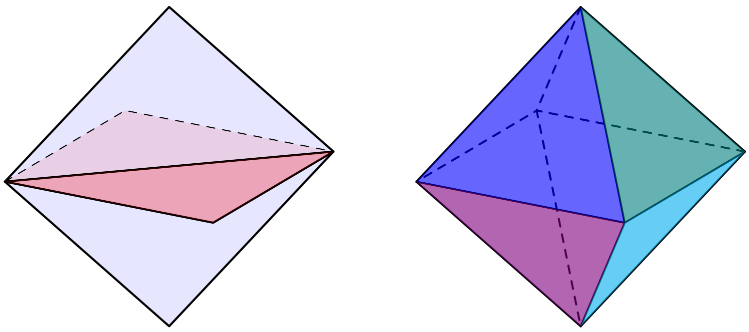
Hexaeder, Würfel



Hexaeder ist die griechische Bezeichnung für “Sechsflächner”, den wir als Würfel kennen. Die Regelmässigkeit zeigt sich in den acht gleichlangen Kanten, die sechs Quadrate als Begrenzungsflächen bilden.

Bekannt ist natürlich die optimale Stapelbarkeit dieses Körpers.

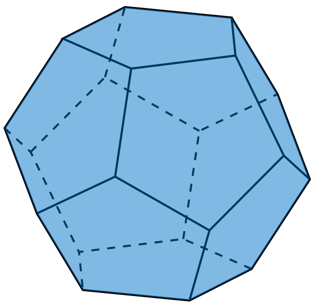
Oktaeder



Die wichtigsten Eigenschaften sind wie folgt:

Flächen	8
Ecken	6
Kante	12
Anzahl Ecken an Fläche	4
Anzahl Kanten an Ecke	3

Dodekaeder



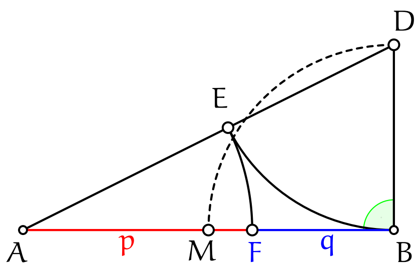
Die wichtigsten Eigenschaften sind wie folgt:

Flächen	12
Ecken	20
Kante	30
Anzahl Ecken an Fläche	5
Anzahl Kanten an Ecke	3

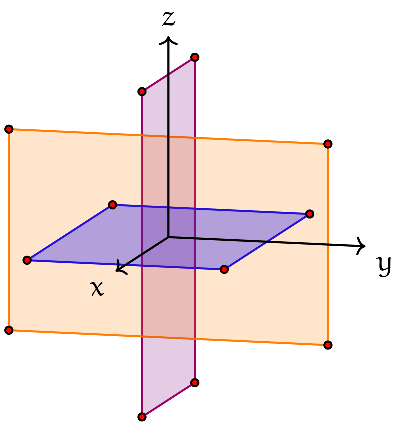
Ikosaeder

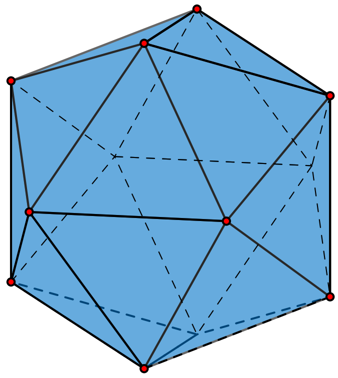
Der Zwanzigflächner bildet sich aus drei senkrecht aufeinderstehenden Rechtecken mit dem Seitenverhältnis des goldenen Schnittes. *Goldener Schnitt* ist ein Verhältnis von

$$p : (p+q) = q : p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$$



Es ergibt sich aus der Konstruktion in der Abbildung.
Die halbe Strecke $\overline{AB}$ wird an einem Ende senkrecht angehängt, Punkt D, und damit ein rechtwinkliges Dreieck gebildet. Von D aus wird dieselbe Länge auf $\overline{AD}$ abgetragen (Punkt E). Dann wird $\overline{AE}$ auf $\overline{AB}$ abgetragen, so dass F entsteht. Der Punkt teilt die Strecke $\overline{AB}$ in die Teile p und q.





In der linken Abbildung sieht man das Gerüst bestehend aus Rechtecken. Nun ist das Verhältnis der langen Seite zur kurzen genau der goldene Schnitt.
Die wichtigsten Eigenschaften sind wie folgt:

Flächen	20
Ecken	12
Kante	30
Anzahl Ecken an Fläche	3
Anzahl Kanten an Ecke	5

Wie man einfach nachrechnen kann, gilt hier der Polyedersatz, denn $E-K+F = 12-30+20 = 2$.

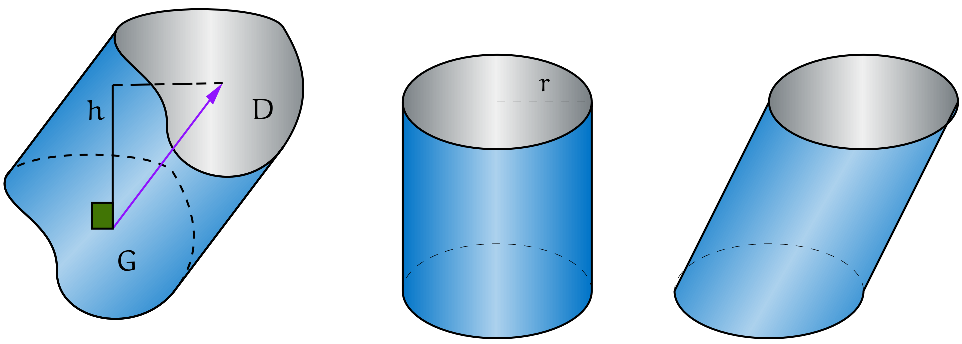
5.3 Runde Körper

Hier betrachten wir Körper, die keine Ecken haben. Darunter befinden sich solche mit Kanten und solche ohne Kanten, z.B. die Kugel.

5.3.1 Zylinder, Walze

Definition 42. Ein *Zylinder* ist ein geometrischer Körper, der durch Parallelverschiebung einer ebenen gekrümmten geschlossenen Linie entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht.

Anmerkung 5.1. Der Zylinder entsteht wie das Prisma, mit dem Unterschied, dass anstelle des Polygons eine gekrümmte Linie tritt.

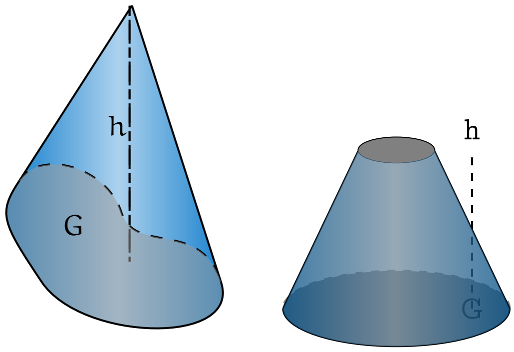


In der Abbildung sehen wir der Reihe nach den allgemeinen Zylinder mit der typischen identischen Deck- und Grundfläche, den geraden *Kreiszylinder* und den schiefen Kreiszylinder. Häufig ist die Grundfläche eine Kreis oder allenthalben eine Ellipse. Die Höhe des Zylinders wird senkrecht zur Grundfläche gemessen. Für den geraden Kreiszylinder kann man auch *Walze* sagen.

5.3.2 Kegel und Kegelstumpf

Definition 43. Ein *Kegel* ist ein geometrischer Körper, dessen Oberfläche von einer in einer Spitze endenden, gleichmässig gekrümmten Fläche über einer gekrümmten Grundfläche gebildet wird.

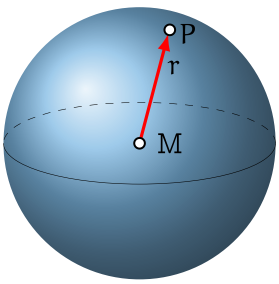
Anmerkung 5.2. Die Grundfläche ist meist kreisförmig oder elliptisch.



Der allgemeine Kegel ist in der Abbildung wiedergegeben. Die Grundfläche ist G und die lotrechte Höhe über G ist h. Das Volumen dieses Körpers ist einzig durch durch G und h festgelegt. Alle Kegel mit Grundfläche G und Höhe h haben dasselbe Volumen.

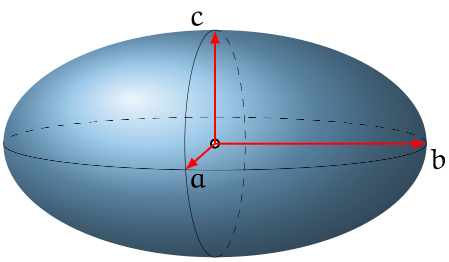
5.3.3 Kugel

Definition 44. Die Kugel ist der Körper, dessen Oberfläche der geometrische Ort aller Punkte P ist, die vom Mittelpunkt M den gleichen Abstand r haben.



Die Kugel ist der fast perfekte Körper, denn er hat unendlich viele Symmetrien. Das Verhältnis von Inhalt zu Oberfläche ist auch optimal. Einzig die Stapelbarkeit von Kugeln ist nicht restlos raumfüllend.
Der kürzeste Abstand zweier Punkte auf der Oberfläche der Kugel liegt auf einem sogenannten *Grosskreis*, der in der Ebene der zwei Punkte und des Mittelpunktes liegt.

5.3.4 Ellipsoid

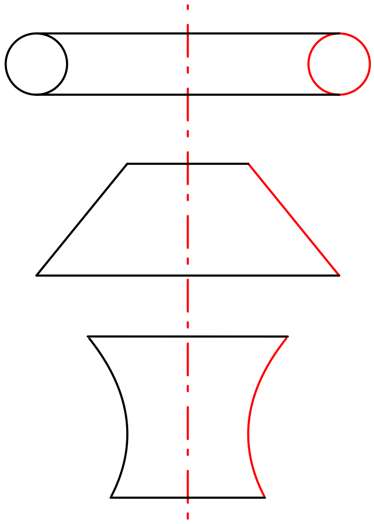


Das Ellipsoid kann man sich aus einer zweifachen Streckung der Kugel in zwei zueinander senkrechte Richtungen vorstellen. Anstatt eines Radius entstehen so drei Hauptachsen. In den Ebenen senkrecht zu den Hauptachsen sind die Schnittflächen Ellipsen. Die Kugel kann als Spezialfall des Ellipsoids aufgefasst werden, bei denen die Hauptachsen alle gleich dem Radius sind.

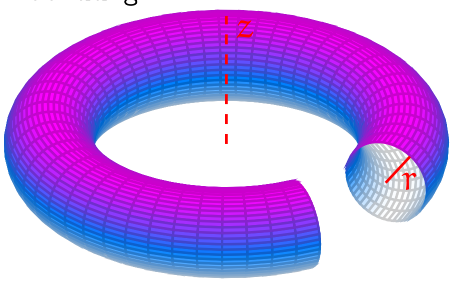
Die Erdkugel wird auch als Ellipsoid vereinfacht, wobei zwei Achsen gleich sind, d.h. eine Schnittfläche wie der Äquator ein Kreis ist. Die zwei Achswerte sind analog zur Abbildung, wenn die Pole oben und unten sind, $a = b = 6378$ und $c = 6357$ in Kilometer. Wenn man mit der Erde als Kugel rechnet, dann setzt man den Radius zu 6371 km.

5.3.5 Drehkörper

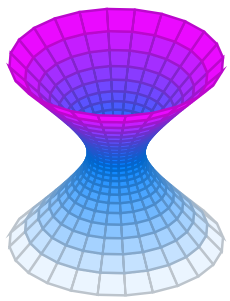
Drehkörper werden auch *Rotationskörper* genannt. Sie entstehen, indem eine sogenannte *erzeugende Kurve* um eine Rotationsachse, die in derselben Ebene liegt, gedreht wird.



Einige Beispiele von Drehkörpern kennen wir schon, nämlich den Zylinder und den Kegel, resp. Kegelstumpf. Hier sind die erzeugenden Kurven Geraden. Aber auch Kugel und Ellipsoid kann man als Rotationskörper verstehen. Wenn die erzeugende Kurve geschlossen ist, dann entsteht z.B. aus einem Kreis ein *Torus*, wie in der folgenden Abbildung.



In der linken oberen Abbildung sieht man von oben nach unten einen Torus, einen Kegelstumpf und einen sogenannten Paraboliden. Denn die Erzeugende (rot gezeichnet) ist ein Parabelstück.
Analog gibt es auch Hyperbolide usw. Durch die Art der Entstehung ist klar, dass jeder zur Drehachse senkrechte Schnitt einen Kreis ergibt.
In der Realität sieht man solche Drehkörper bei gedrechselte Geländerstäben.



Aufgaben

5.3 Überprüfe den Euler'schen Polyedersatz an den platonischen Körpern.

Körper	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Anzahl der Ecken E	4	8	6	20	12
Anzahl der Kanten K	6	12	12	30	30
Anzahl der Flächen F	4	6	8	12	20
$E - K + F$	8-6=2	14-12=2	14-12=2	32-30=2	32-302

3

(Man erkennt ein Muster. Gleiche Terme der Differenz zeigen die sogenannte Dualität an. Würfel und Oktaeder sind dual, sowie Dodekaeder und Ikosaeder. Das Tetraeder ist selbstdual.)

5.4 Welche Körper haben zwei parallele Flächen?

4 Allgemein gesprochen sind dies v.a. der Kegelstumpf und der Pyramidenstumpf. Letzterer ist die Verallgemeinerung vom Prisma, dem Parallelepiped, dem Quader und Würfel. Dazu kommen noch Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Der Kegelstunpf umfasst auch den Zylinder.

5.5 Gibt es Körper mit Kanten aber ohne Ecken?

5 Ja, runde Körper wie Zylinder oder Kegel.

5.6 Es ist $p + q = 1$ und es gilt $p : (p + q) = q : p$. Bestimme p und q.

6 Die Gleichung ist umgeformt $p^2 = q(p + q) = pq + q^2$. Wir setzen $q = 1 - p$ ein, $p^2 = (1 - p) \cdot 1$. Somit $p^2 + p - 1 = 0$. Quadratisch ergänzt folgt $(p + 1/2)^2 - 1/4 - 1 = 0$ oder $(p + 1/2)^2 = 5/4$. Damit $p + 1/2 = \sqrt{5}/2$ und $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Numerisch $p \approx 0.618$. $p/q = (0.618)/(1 - 0.618) = 0.618/0.372 = 1.6613$.

5.7 Wie hängt die Länge der Erzeugenden mit der Mantelfläche eines Rotationskörpers zusammen? Und wie mit dem Radius oder Abstand der Erzeugenden von der Drehachse?

7 Je länger die Erzeugende desto grösser die Mantelfläche und je grösser der Radius, Abstand zur Drehachse, desto grösser die Mantelfläche.

5.8 Wie werden Flächen und Volumen gemessen? Welche Einheiten kennst Du? Drücke Liter in cm^3 aus, denke an die Dimensionen einer Milchpackung.

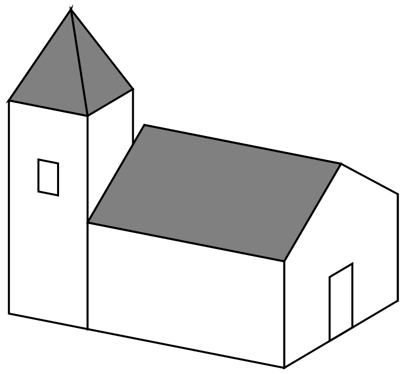
8 Flächen werden in Quadrametern m^2 und Volumen in Kubikmetern m^3 ausgedrückt. Mit Präfixen werden die Grössen verändert, z.B. Centi zu $1cm = m/100$ oder Kilo zu $1000m = 1km$ oder Milli $1m = 1000mm$.
Ein Liter entspricht $10cm \times 10cm \times 10cm$. Die Milchpackung ist ungefähr $7cm \times 7cm \times 20cm$.

Kapitel 6

Oberflächen und Rauminhalte

6.1 Projektionen

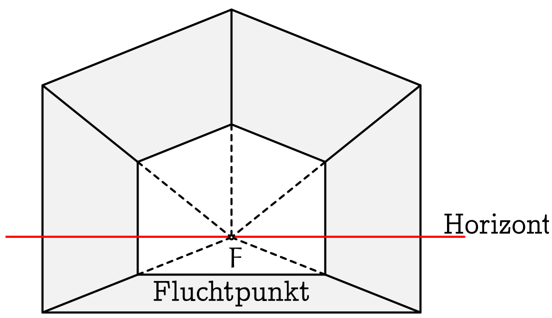
Mit dem Wort Projektion ist einerseits das Abbild eines Urbildes gemeint, anderseits die Art und Weise der Abbildung. Aus dem Zusammenhang wird die jeweilige Bedeutung aber klar. Wir benutzen im Weiteren die dargestellte romanische Kirche als Modell.



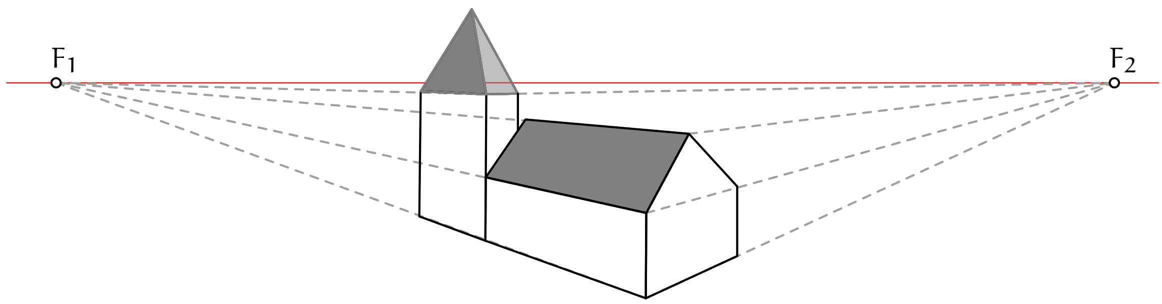
In den vorangehenden Kapiteln haben wir dreidimensionale Körper auf diesen zweidimensionalen Blättern dargestellt. Dabei haben wir gewisse Annahmen getroffen. Da die menschliche Netzhaut im *Auge* ebenfalls zweidimensional ist, sind wir mit der Projektion oder Abbildung der dreidimensionalen Wirklichkeit als Fläche bestens vertraut, nämlich wie auf einem Foto. Das Auge als Zentrum entspricht dem Modell der *Zentralprojektion*.
Die andere wichtige Projektionsart wird durch den *Schattenwurf* dargestellt. Da die Sonnendistanz so viel grösser als die Ausdehnung der Umgebung ist, können ihre Strahlen als parallel betrachtet werden. Diese Abbildung nennt man *Parallelprojektion*.

6.1.1 Zentralprojektion

Die meisten Objekte stehen auf dem Boden, der als Fläche darstellbar ist. Sie erstreckt sich bis zum Horizont, der als horizontale Linie, am Meer, begrenzt ist. Alle Objekte erscheinen kleiner mit zunehmendem Abstand vom Betrachter, am Horizont verschwinden sie dann ganz. Wenn man nun von seinem Standpunkt aus geradeaus schaut, dann ist der Punkt, an dem diese Blickachse auf den Horizont trifft, der *Fluchtpunkt* der Zentralprojektion.

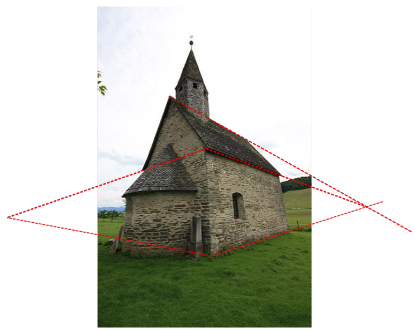


In der Realität parallele Linien, die parallel zur Sichtachse betrachtet werden, laufen in der Abbildung immer auf einen gemeinsamen Fluchtpunkt zu (siehe Abbildung). Hier bleiben nur Linien parallel, die senkrecht zur Blickachse liegen.
Hat das betrachtete Objekt keine zur Sichtachse senkrechten Flächen, dann "fliehen" die Linien in der Abbildung auf zwei Fluchtpunkte zu.



Je näher die zwei Fluchtpunkte desto verzerrter erscheint das Objekt.

Anhand dieser Fotographie kann man die Richtigkeit dieser Ausführungen bestätigen. Wir bemerken, dass runde, gekrümmte Oberflächen wie etwa Kugeln keinen Fluchtpunkt aufweisen.
Die Verzerrung der Längen ist für technische Anwendungen, besonders wenn solche Zeichnungen Informationsträger sind, schlecht zu gebrauchen.

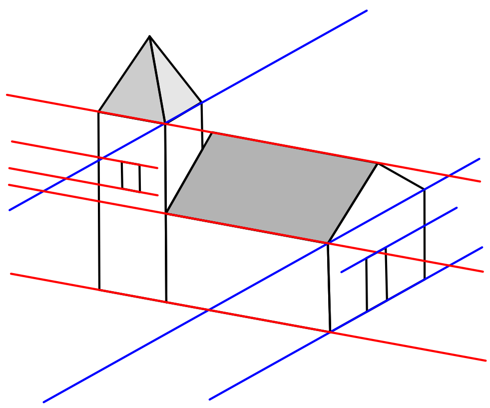


Definition 45. Zentralprojektion Bei einer *Zentralprojektion* wird ein Körper durch Projektionsstrahlen, die alle durch ein gemeinsames Zentrum verlaufen, auf eine Ebene projiziert.

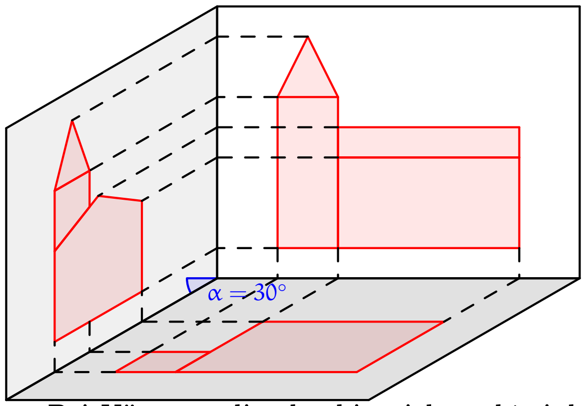
6.1.2 Paralleprojektion

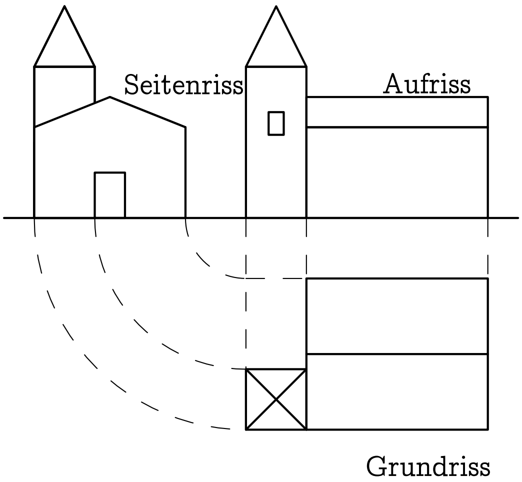
Bei der Parallelprojektion sind die Projektionsstrahlen eben parallel. Das bewirkt, dass parallele Linien des Objekts bei einer räumlichen Darstellung parallel bleiben. Ebenso bleiben die Längenverhältnisse bestehen, wie in der Abbildung dargestellt.

Aus der Figur könnte man auch herauslesen, dass zwei uneigentliche Fluchtpunkte im Unendlichen vorstellbar sind.
Der Grundriss (Draufsicht) ist das Bild, das auf der Projektionsebene entsteht, wenn von oben auf das Objekt geschaut wird. Der Aufriss (Vorderansicht) ist das Bild von vorn auf ein Objekt. Der Seitenriss (Seitenansicht) ist das Bild von der rechten (oder linken) Seite.



Man kann sich das Objekt in einer Schachtel vorstellen, auf deren Aussenseiten das Objekt senkrecht projiziert wird. Von den gesamthaft sechs Seiten werden dann drei aufgefaltet und eben gezeigt. Man nennt diese Darstellung die sogenannte Drei-Tafel-Projektion. In technischen Zeichnungen werden versteckte Kanten auch gestrichelt hinzugefügt.



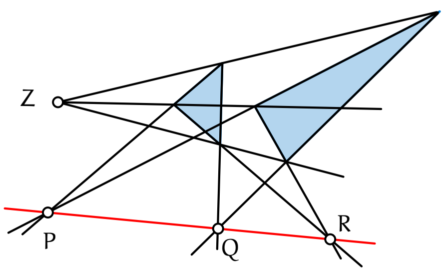


Bei Körpern, die ohnehin viele rechtwinklige Kanten aufweisen, ist die Darstellung besonders einfach und günstig für die sogenannte Vermassung, die Angabe von Längen und Winkeln, die für die Konstruktionsplanung wesentlich sind.

Definition 46 (Parallelprojektion, Schrägprojektion). Die *Parallelprojektion* ist eine Abbildung der Punkte des Raumes auf eine Ebene mit Hilfe paralleler projizierender Strahlen. Schneiden diese Strahlen die Bildebene unter einem spitzen Winkel, so heisst die Abbildung *schiefe Parallelprojektion* oder *Schrägprojektion*.

6.1.3 Satz von Desargues

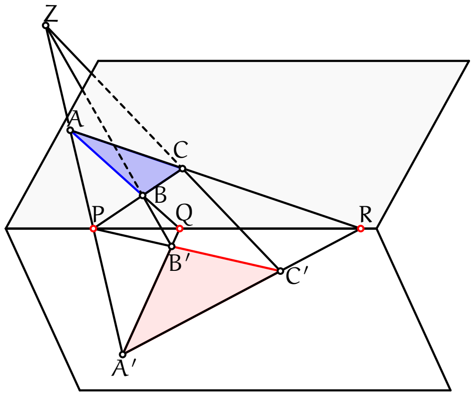
Dieser Satz aus dem 16. Jahrhundert ist sehr wichtig für die projektive Darstellung.

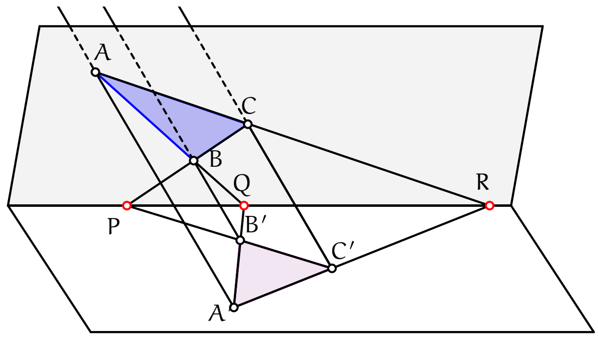


Zwei Dreiecke haben je zwei Ecken, deren Geraden sich in Z treffen. Sie müssen nicht ähnlich sein. Nun liegen die drei Schnittpunkte der entsprechenden Geraden durch die zwei Eckpunkte auf einer Geraden.

Satz 6.1 (Satz von Desargues). Wenn sich die Geraden durch zwei sich entsprechende Eckpunkte zweier in einer Ebene gelegener Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in einem Punkt Z schneiden und die sich entsprechenden verlängerten Seiten sich jeweils in Punkten P, Q, R schneiden, so liegen diese drei Punkte auf einer Geraden. Die Umkehrung gilt auch.

Dieser Satz gilt auch in der Projektion, für parallele und zentrische Abbildungen.

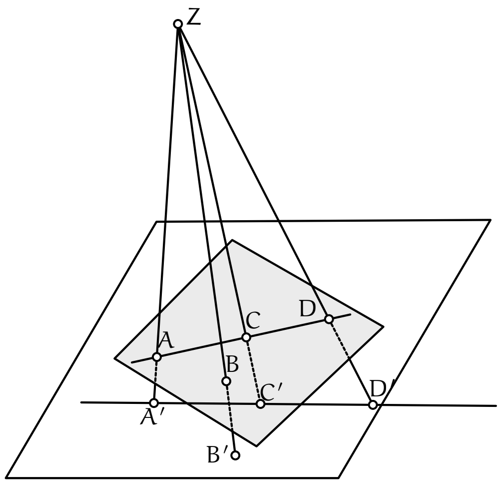


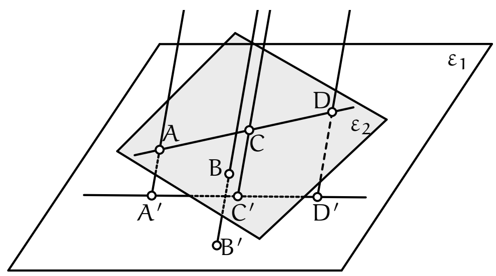


6.1.4 Gesetzmässigkeiten

Aus den zwei Abbildungen sieht man, dass in beiden Projektionsarten ein Punkt auf einen Punkt fällt und eine Gerade eine Gerade ergibt.

Parallelprojektion





Eigenschaften 6.2. Parallelprojektion

(1) Ein Punkt des Raumes wird auf einen Punkt abgebildet. (Punkte der Bildebene werden auf sich selber abgebildet.)

(2) Geraden im Raum werden auf Geraden abgebildet, ausser sie sind parallel zur Projektionsrichtung; dann ist ihr Bild ein Punkt (eingeschränkte Geradentreue).

(3) Parallele Geraden haben parallele Projektionen (ausser sie sind parallel zur Projektionsrichtung).

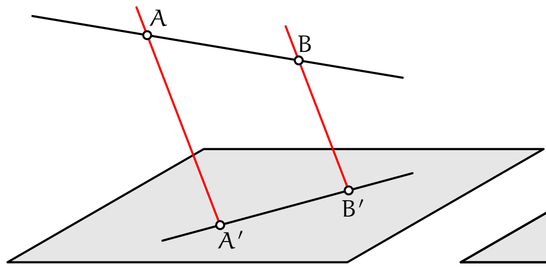
(4) Das Teilverhältnis eines Punktes in Bezug auf eine nicht in Projektionsrichtung verlaufenden Strecke bleibt erhalten.

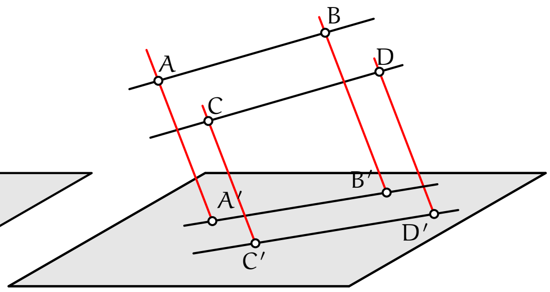
(5) Ein Vieleck, dessen Ebene zur Bildebene parallel ist, ist zu seiner Projektion kongruent.

(6) Die Projektion eines rechten Winkels mit einem zur Bildebene parallelen Schenkel ist im allgemeinen kein rechter Winkel mehr.

Anmerkung 6.3. Die Erhaltung von bestimmten Eigenschaften von Urbild und Projektion (Abbild) macht die Parallelprojektion zur Beschreibung von Körpern auf dem Papier sehr attraktiv, obwohl sie verzerrte Abbilder hervorbringt.

Die figürliche Darstellung der Eigenschaften, beginnen mit der Geradenabbildung und den Parallelen.

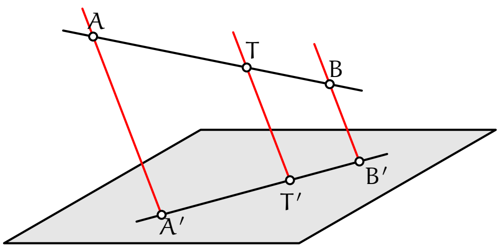


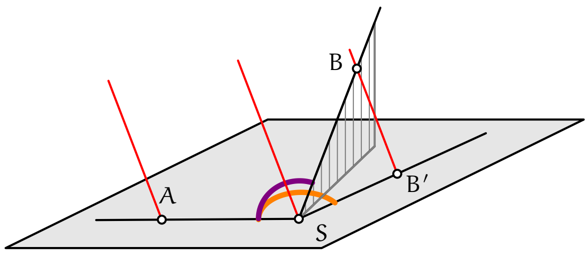


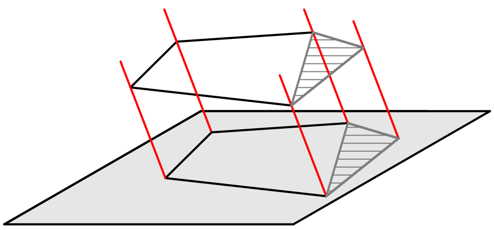
Die Unveränderlichkeit des Teilverhältnisses kann man mit dem Strahlensatz begründen. Es gilt

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{A'T'}}{\overline{T'B'}}$$

Das rechte Winkel nicht solche bleiben, ist schon von der Projektion eines Würfels bekannt. Nur wenn die Projektionsstrahlen in der Fläche des Stützdreiecks liegen, bleibt der rechte Winkel. Das Dreieck liegt in der Ebenen, die durch die Rotation von der Geraden durch S und B um die Achse AS.

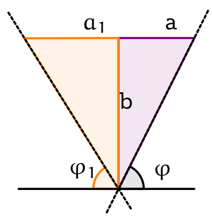


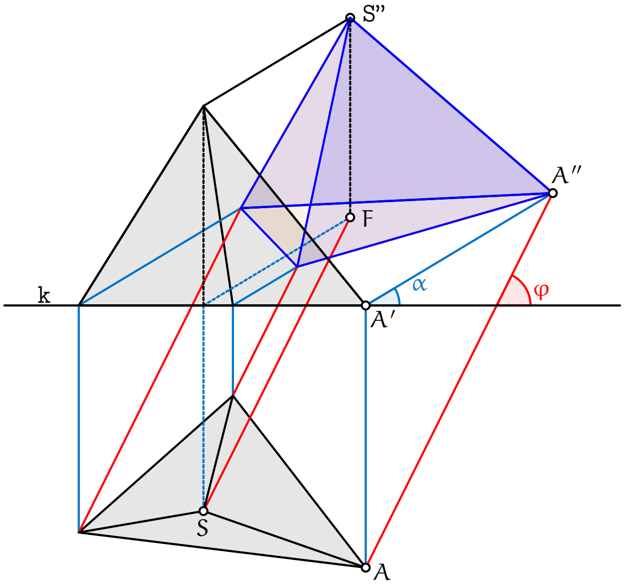




Durch die Projektion bilden die Kanten von projiziertem Vieleck und seinem Abbild parallele, gleichlange Seiten von Parallelogrammen. Daraus folgt mit dem Kongruensatz SSS, dass Teildreiecke deckungsgleich sind.
Nun zeigen wir das *Mustervorgehen* zur Zeichnung eines Schrägbildes. Es sind Grundriss und Aufriss gegeben. Zwei Parameter müssen gewählt werden: der Verzerrungswinkel α und der Verzerrungsfaktor q. Die Bedeutung von α ersieht man aus der Abbildung. Der Verzerrungsfaktor gibt das Verhältnis von Originallänge und Länge derselben Strecke in der Abbildung wieder.

Man kann sich ein Hilfsdreieck zeichnen, welches die Verzerrung darstellt. Für spite Verzerrungswinkel α wählt man a und b so, dass $\frac{a}{b} = q$. Für überstumpfe $q = \frac{a_1}{b}$. Wir benötigen dann Parallelen zu Hypothenuse für die Konstruktion.



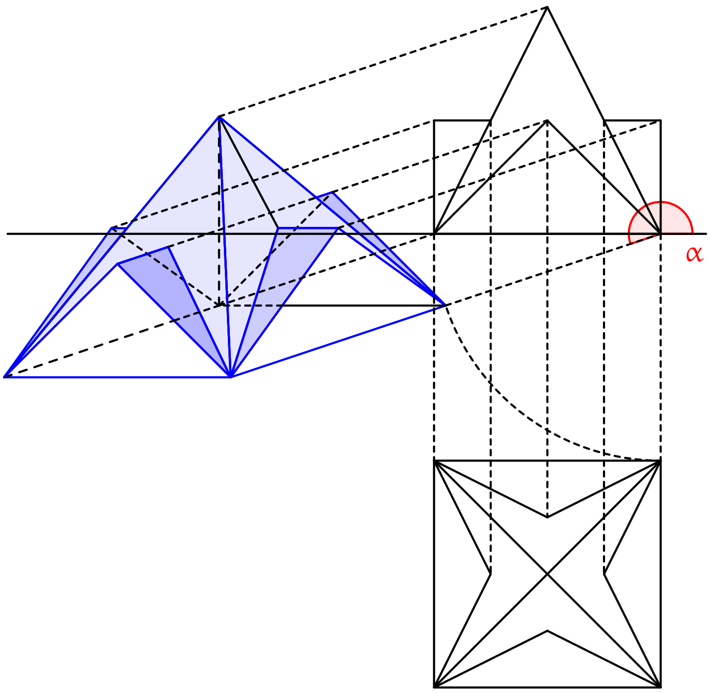


Als erstes verbinden wir vertikal die entsprechenden Punkt miteinander, also z.B. A und A' auf der Kante. Dann zeichnen wir in A' einen Strahl mit dem gewählten Verzerrungswinkel.

Als Drittes zeichnen wir durch A eine Parallele zum gewählte Verzerrungsverhältnis der Hilfskonstruktion und schneiden diese mit dem Strahl aus A'. Das ist der Punkt A''. Wir wiederholen dieses Verfahren mit allen Punkte. Die Punkte auf der Grundfläche werden so gefunden aber auch die Fusspunkte der Punkte, die nicht in dieser Ebene liegen. Auf den Fusspunkten kann man Vertikale errichten, und diese dann Geraden mit dem Verzerrungswinkel schneiden.

Man beachte: Wenn man einen spitzen Winkel für α wählt und das Schrägbild nach oben rechts gezeichnet wird, sieht man dieses “von hinten”.

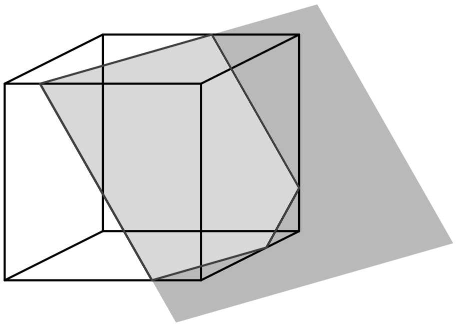
6.4 Übung Wir zeichnen das Schrägbild der Turmspitze, die durch einen Grund- und Aufriss gegeben sind. Der Verzerrungswinkel soll ca. 200° sein und der Verzerrungsfaktor q ist 1. Wie man sieht, wirkt mit diesem q die Erscheinung etwas flachgedrückt. ◁

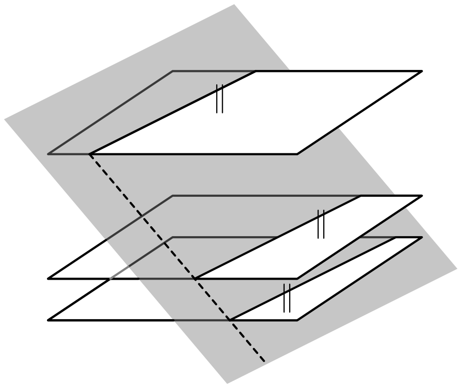


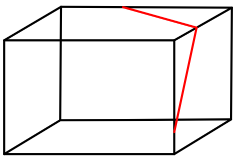
Anmerkung 6.5. Da eine weniger enge Beziehung zwischen projizierter Figur und Abbild als bei kongruenten oder ähnlichen Abbildungen, spricht man von Affinität, Verwandtschaft. Wir haben solche Transformationen in Abschn. 2.7 besprochen.

Körperschnitte

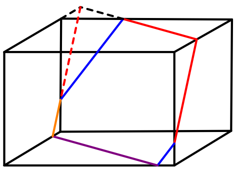
Die folgenden zwei Abbildungen zeigen den Schnitt von parallelen Ebenen durch eine Ebene. Die Schnittkanten an den parallelen Ebenen sind parallel.

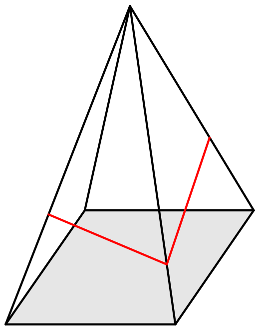






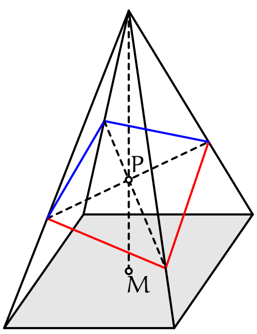
6.6 Übung Zeichne die fehlenden Schnittkanten ein. Die Kanten sind parallelen zu den schon eingezeichneten. Die Lösung sieht dann wie folgt aus. ◁





6.7 Übung Bestimme die fehlenden Schnittkanten an der regelmässigen Pyramide.

Hier sind die Flächen nicht parallel und somit die Schnittkanten ebenfalls nicht. Die Schnittebene schneidet die diametral gegenüberliegenden Punkte in P. Durch ihn läuft die zweite Diagonale bis zur Kante. ◁



Zentralprojektion

Drei Eigenschaften der Parallelprojektion gelten nicht für die Zentralprojektion.

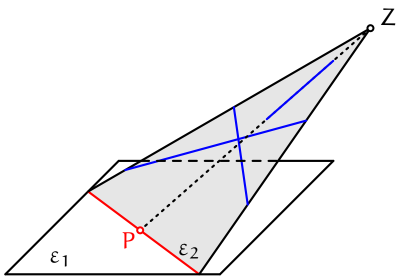
Eigenschaften 6.8. Zentralprojektion

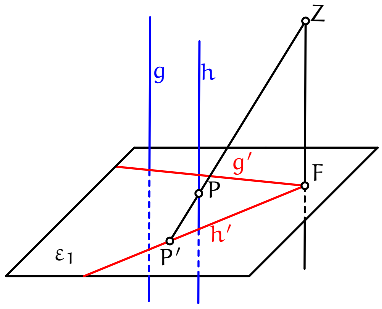
(1) Ein Punkt des Raumes wird auf einen Punkt abgebildet. (Punkte der Bildebene werden auf sich selber abgebildet.)

(2) Geraden im Raum werden auf Geraden abgebildet, ausser sie sind parallel zu einem Projektionsstrahl; dann ist ihr Bild ein Punkt (eingeschränkte Geradentreue).

(3) Die Projektion eines rechten Winkels mit einem zur Bildebene parallelen Schenkel ist im allgemeinen kein rechter Winkel mehr.

Im Abbild links sieht man, wie Geraden auf einer projizierenden Ebene auf die Schnittgerade abgebildet werden. Ist zudem eine Linie auf einem Projektionsstrahl, dann verschwindet die Linie in einem Punkt.

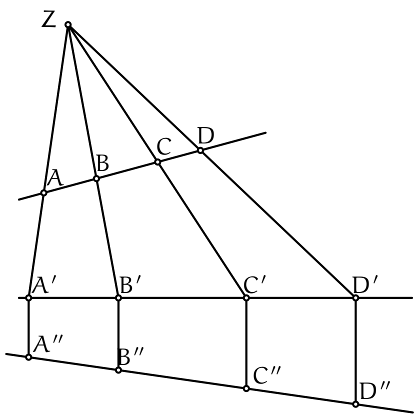




Im rechten Schaubild erkennt man, wie zwei parallele Geraden g und h auf zwei Geraden g' und h' projiziert werden, die durch den Fluchtpunkt F gehen. Parallelen sind nicht mehr parallel.

Das Doppelverhältnis

Eine gemeinsame Eigenschaft, eine Invariante der Projektionen, ist das Doppelverhältnis von Teilstrecken. Die Parallelprojektion ist im allgemeinen teilverhältnistreu, die Zentralprojektion nicht. Für vier Punkte auf einer Geraden gilt aber erstaunlicherweise folgendes.



Wir bezeichnen das doppelte Verhältnis mit q:

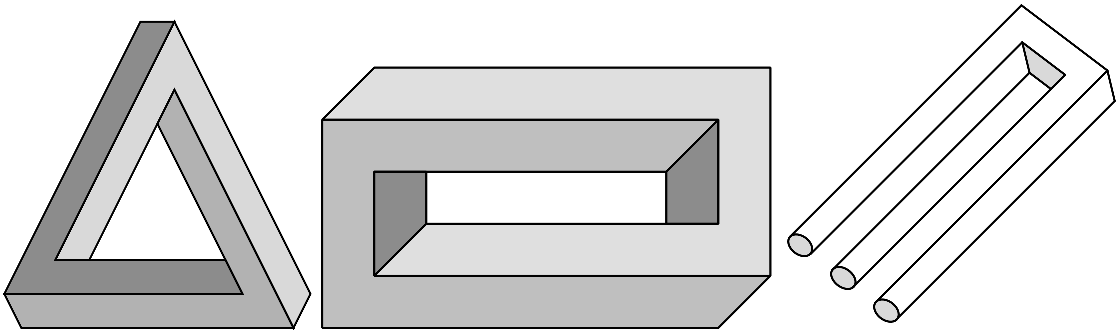
$$q = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Nun gilt der Satz: Das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden bleibt von der Projektion unberührt. Daraus folgt also, dass

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{C''A''}{C''B''} : \frac{D''A''}{D''B''}$$

Man beachte, dass man hier nicht Teilverhältnisse anschaut, sondern das Verhältnis von Verhältnissen.

6.1.5 Unmögliche Figuren



Die Teile der Figuren sind richtig dargestellt, aber die Verbindung der Teile ist nur auf dem Papier aber nicht in der Realität des Raumes möglich.

6.2 Netze, Abwicklungen, Auffaltungen

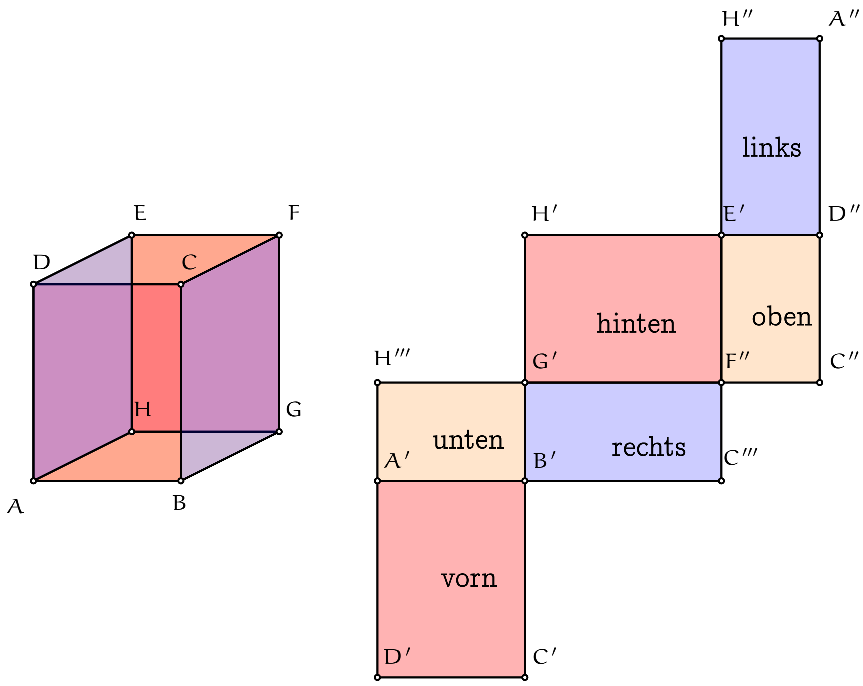
Eine *Abwicklung* eines Polyeders entsteht, wenn man den Körper so auf der Ebene abrollt, dass jede Fläche genau einmal auf der Ebene liegt.

Eine *Auffaltung* eines Polyeders entsteht, wenn man das Polyeder längs möglichst weniger Kanten aufschneidet und dann seine gesamte Oberfläche zu einem ebenen Flächenstück biegt. Aus einer Auffaltung kann man dann mit einer minimalen Anzahl von Klebekanten das Polyeder wieder zusammenfalten.

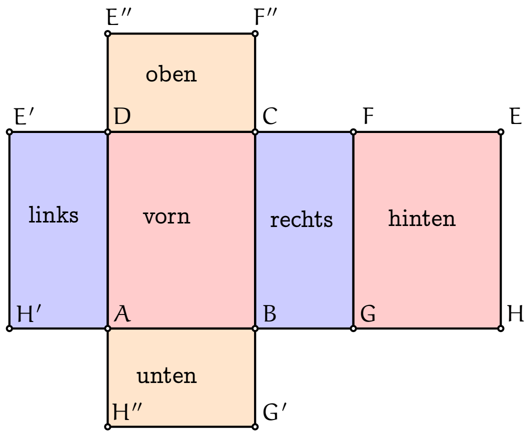
Eine Abwicklung ist stets auch eine Auffaltung, nicht aber umgekehrt: eine Auffaltung ist nicht gezwungenermassen eine Abwicklung.

Das entstehende Netz sind ist eine Anordnung von nicht überlappenden, kantenverbundenen Polygonen in der Ebene, die entlang der Kanten gefaltet werden können, um die Flächen des Polyeders zu werden.

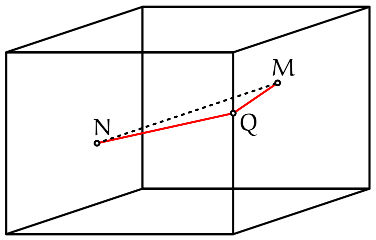
In der folgenden Abbildung ist ein Würfel abgewickelt.

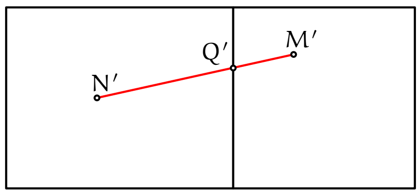


Der Quader wird zuerst auf die Vorderseite gelegt, dann nach hinten gekippt, dann nach rechts, wieder nach hinten, nach rechts und zuletzt nach hinten. So haben alle Flächen den Boden berührt.



Die Auffaltung ist einfacher, man schneidet einfach Kanten auf, bis das Gebilde flach hingelegt werden kann. Es gibt mehrere Möglichkeiten.





6.1 Übung Eine Ameise befindet sich auf einer Schachtel im Punkt M. Im Punkt N gibt es ein Loch, durch das sie hineingelangen könnte. Gesucht ist der kürzeste Weg zum Loch.

Wickelt man die Schachtel ab, so bleiben die Abstände unverändert. Auf der Abwicklung ist der kürzeste Weg die Gerade von $\overline{M'N'}$, die über die Ecke Q auf der Kante führt. Dieser Punkt ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden mit der Kante. Wir können dann den vertikalen Abstand von Q' zu Q übertragen. ◁

Diese Übung enthält ein sogenanntes *Optimierungsproblem*. Dabei sucht man ein Minimum, hier der kürzeste Weg. Optimierungsprobleme spielen in der Realität, z.B. in der Wirtschaft, eine sehr wichtige Rolle.

6.3 Oberflächen von Körpern

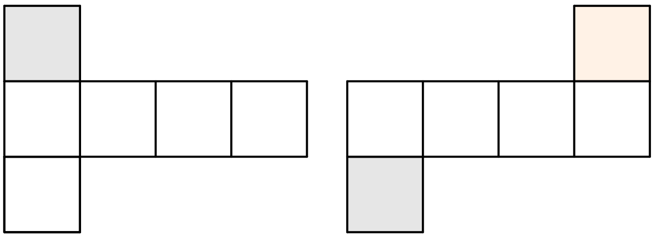
6.3.1 Polyeder

Die Oberfläche von Polyedern sind Polygone, die man auf Dreiecksform bringen kann. Die Flächenbestimmung von Dreiecken und Rechtecken kennen wir schon.

Würfel, Quader

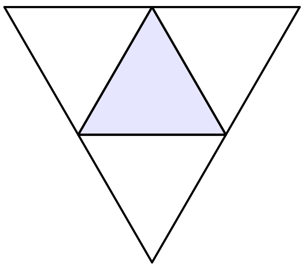
Die Abwicklung und Auffaltung des Quaders haben wir bereits dargestellt. Die Oberfläche besteht aus Rechtecken oder speziell auch Quadraten. Ein Quader mit den Seiten a, b und c besitzt die Oberfläche

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \qquad \text{, respektive} \qquad O = 6 \cdot a^2.$$



Das Netz des Würfels ist besonders einfach. Es existieren 10 verschieden Varianten. Z.B. kann man das eingefärbte Viereck um jeweils eine Position nach rechts verrücken.
Das gezeigte Netz links ist keine Abwicklung sondern eine Auffaltung. Das rechte Netz ist eine Abwicklung, denn den Würfel könnte man so über die Kanten rollen.

Tetraeder



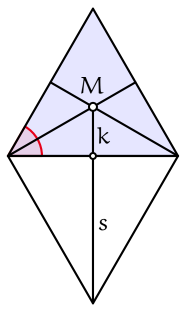
Das Tetraeder ist ein platonischer Körper mit vier gleichlangen Kanten. Die Flächen sind gleichseitige Dreiecke. Die Kantenlänge sei a. Dann folgt die Fläche eines Dreiecks zu $F_\triangle = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{a}{2}$, und alle vier Flächen

$$O = \sqrt{3} a^2.$$

Wie man erkennt, ist das Tetraeder eine spezielle Pyramide.

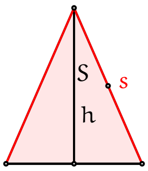
Die Höhe des Tetraeders ergibt sich aus der Höhe des Seitendreiecks s und dem Abstand k zwischen Fusspunkt und Mittelpunkt. Somit gilt $h^2 = s^2 - k^2$. Wir kennen $s = \frac{\sqrt{3}}{2} a$. Zudem sieht man an den ähnlichen Dreiecken, dass gelten muss $k : a/2 = a/2 : s$, womit $k = \frac{a^2}{4s} = \frac{2a^2}{4\sqrt{3}a} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Somit folgt $h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{9a^2 - a^2}{12} = \frac{2a^2}{3}$. Damit folgt

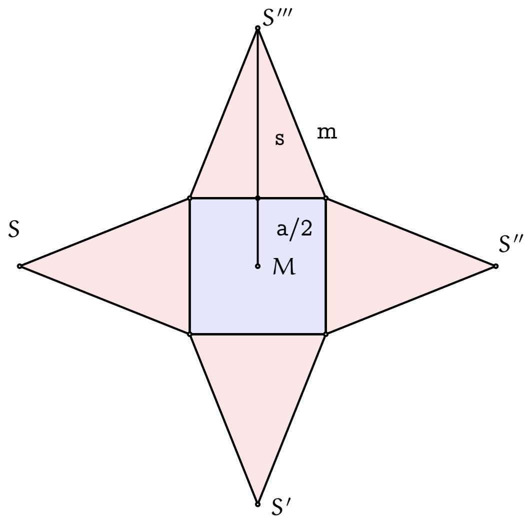
$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} a.$$



Pyramide

Wir betrachten die einfachste Pyramide, die gerade mit quadratischer Grundfläche. Alle vier Seitenflächen sind gleiche Dreiecke. Die verlängerten Höhenlinien gehen durch den Mittelpunkt M.

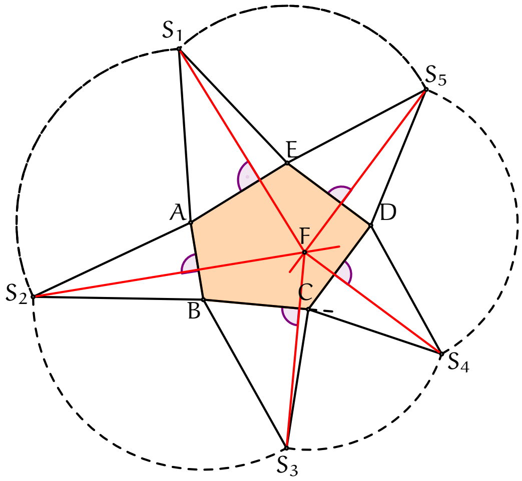




Die Höhe der Pyramide ist aus dem Netz nicht direkt abzulesen. Mit dem Pythagoras gilt mit der Bezeichnung der Abbildung für die Höhe h und die Länge der Kanten m:

$$h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} \quad , \quad m = \sqrt{s^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Über der Grundfläche kann man nicht beliebige Dreiecke zeichnen. Zum einen müssen die Seiten, die zusammen eine Kante bilden, gleich lang sein.

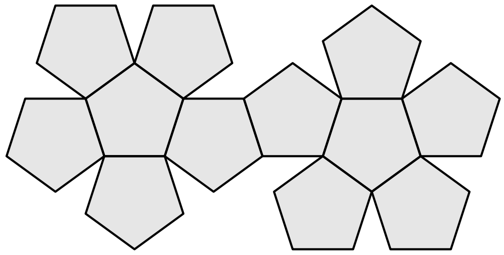


Klappt man die Seiten hoch, so müssen sich die Dreiecksspitzen in einem Punkt S, der Spitze der Pyramide treffen. Diese Bedingung impliziert, dass alle senkrecht zur entsprechenden Grundlinie durch die Spitzen S_j sich in einem Punkt schneiden. Es gilt somit:

Satz 6.1. Die Höhen der Seitendreiecke durch die Pyramidenspitze schneiden sich in der Netzfigur im Höhenfusspunkt F der Pyramide.

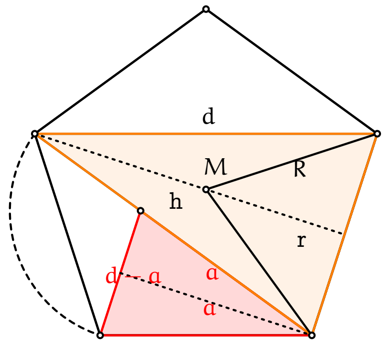
Dodekaeder

Die Berechnungen am Dodekaeder und am Ikosaeder sind meist langwierig und mühsam. Den Lesenden sei es überlassen, die Rechnungen nachzuvollziehen.



Um zur Flächenformel zu gelangen, kommt man um einiges Rechnen nicht umhin. Es wird ein gewisses Mass an Algebra vorausgesetzt. Ohne diese Kenntnisse muss man die Herleitung in 6.6 überspringen.

Im Fünfeck gelten folgenden Zusammenhänge mit den Bezeichnungen de r Abbildung:



$$d = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}) \qquad , \qquad h = \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+5}$$

Daraus der Umkreisradius

$$R = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$$

und der Inkreisradius

$$r = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Daraus folgt die Fläche A eines Fünfecks zu

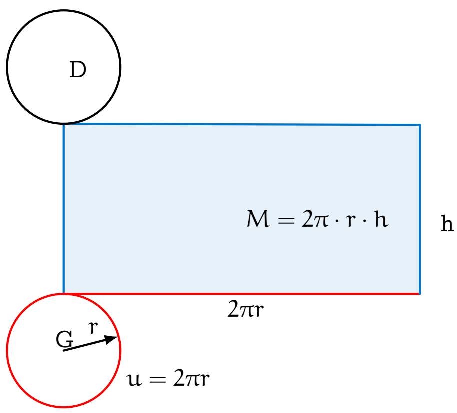
$$A = \sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Die Oberfläche des Dodekaeders besteht aus dem Zwölffachen davon:

$$O = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

6.3.2 Runde Körper

Zylinder



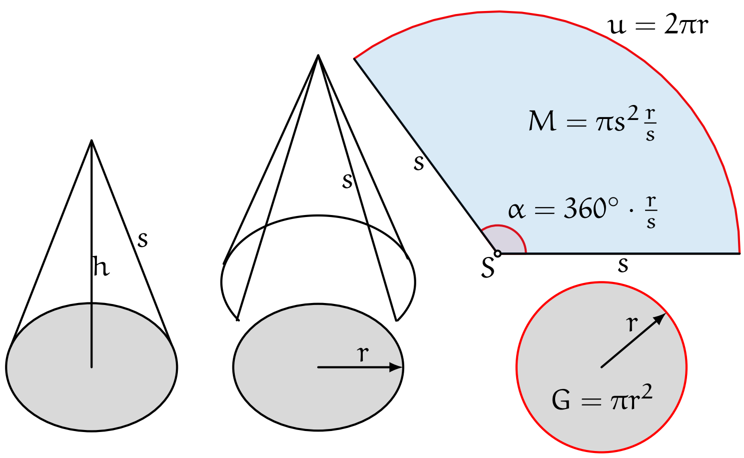
Die Oberfläche des Zylinders besteht aus Mantelfläche M zuzüglich Grund- G und Deckfläche D. Also $O = M + G + D$. Dabei sind $G = D = \pi r^2$ und $M = 2\pi r \cdot h$, also

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 = 2\pi r(r+h).$$

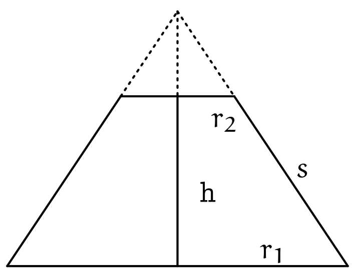
Kegel, Kegelstumpf

Vom Kegel sind die Höhe h und der Radius r der kreisförmigen Grundfläche gegeben. Die Grundfläche ist einfach $G = \pi r^2$. Der Umfang der Grundfläche ist $u = 2\pi r$. Dieser muss mit dem Rand des Mantels übereinstimmen. Der Radius des abgewickelten Mantels, ein Kreissektors, ist die Seitenlänge s. Mit dem Pythagoras gilt $s^2 = h^2 + r^2$ oder $s = \sqrt{h^2 + r^2}$. Der ganze Kreis hat die Fläche πs^2, der Sektor den Anteil im Verhältnis zu den Umfängen, d.h. $2\pi r : \pi s$ oder $r : s$. Somt folgt die Manteläche zu $M = \frac{r}{s}\pi s^2 = \pi r \cdot s$. Die Oberfläche ist die Summe von Mantelfläche und Grundfläche, also

$$O = \pi r^2 + \pi r \cdot s = \pi r(r + s).$$



Beim Kegelstumpf sind meist die Höhe und die zwei Radien von Grund- und Deckfläche gegeben. Die Höhe des Kegels sei H und die Seitenlänge des aufgesetzten Kegels sei s_1. Damit folgt die Mantelfläche des Stumpfes als Differenz $M = \pi r_1(s + s_1) - \pi r_2 s_1 = \pi s r_1 + \pi s_1(r_1 - r_2)$. Mit dem Strahlensatz gilt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{s+s_1}{s_1}$ und daraus $s_1 \frac{r_1}{r_2} = s + s_1$ und $s_1 = \frac{s}{r_1/r_2 - 1}$ oder $s_1 = \frac{s r_2}{r_1 - r_2}$. Eingesetzt folgt: $M = \pi s r_1 + \pi \frac{s r_2 (r_1 - r_2)}{r_1 - r_2} = \pi s r_1 + \pi s r_2 = \pi s(r_1 + r_2)$. Es ist zudem $s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$. Die gesamte Oberfläche ist somit:

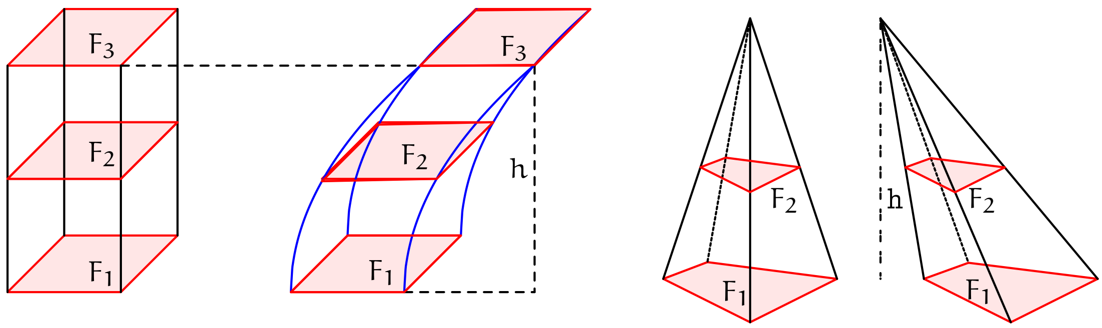


$$O = \pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)].$$

Wichtig 4. Die Oberflächen von nicht geraden zylinder- oder kegelförmigen Körpern ist relativ kompliziert. (Für den Umfang von Ellipsen gibt es keine exakte Lösung.) ⊣

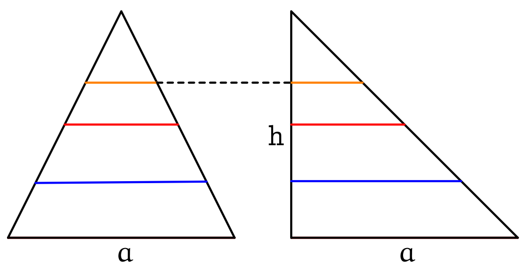
6.4 Volumen von Körpern mit Kanten

6.4.1 Prinzip von Cavalieri



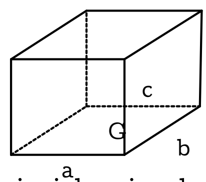
Satz 6.1. Prinzip von Cavalieri Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in gleichen Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.

Anmerkung 6.2. Wir wissen, dass die Fläche eines Dreiecks nur von Grundfläche und Höhe abhängig ist. Zwei Dreiecke mit gleicher Basis und gleicher Höhe haben in jedem Schnitt senkrecht zur Höhenlinie gleiche Strecken.



6.4.2 Das Quader

Das Volumen des Quaders ist durch die drei rechtwinkligen, senkrechten Kanten a, b, c gegeben zu:



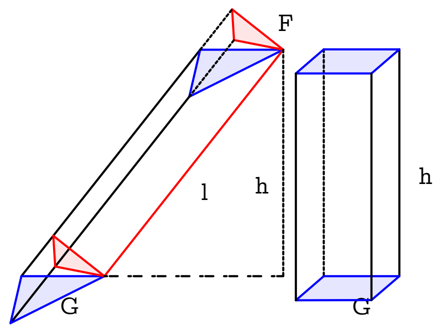
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Je nach Betrachtung kann man eine Fläche als Grundfläche wählen mit beispielsweise der Fläche $a \cdot b$, dann ist das Volumen das Produkt von Grundfläche mal Höhe, hier $h = c$.

6.4.3 Das Prisma

Das Prisma besteht aus zwei kongruenten Polygonen auf parallelen Ebenen, die durch parallel Kanten verbunden sind. Die Polygone können in Rechtecke verwandelt werden und diese können in ihren Ebenen verschoben werden bis die Kanten senkrecht auf den Ebenen stehen, ohne gemäss Prinzip ihr Volumen zu ändern. Entsteht ein Quader. Somit gilt einfach:

$$V = G \cdot h$$

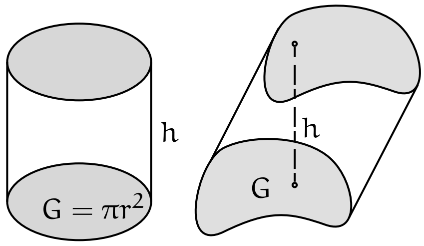


Schneidet man das Prisma senkrecht zu den Kanten, dann entsteht die Fläche F aus der das Volumen dann zu $V = l \cdot F$ folgt, wobei l die Kantenlänge ist.

6.4.4 Der Zylinder

Der Zylinder unterscheidet sich vom Prisma durch die Form der Deck- und Grundfläche. Die Form hat aber bis hierhin für das Volumen keine Rolle gespielt. Auch hier gilt für den geraden und den schiefen Zylinder:

$$V = G \cdot h$$



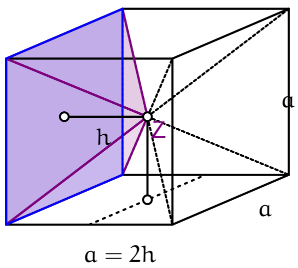
Mit $G = \pi r^2$ für den Kreiszylinder dann

$$V = 2\pi r^2 h.$$

6.4.5 Die Pyramide

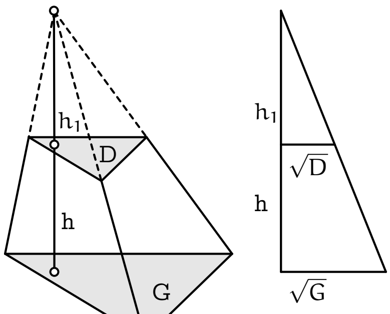
Wir bestimmen das Volumen einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Weil es gemäss Prinzip nur auf die gleiche Höhe ankommt, kann die Pyramidenspitze irgendwo auf der parallelen Ebene mit der Höhe als Abstand liegen. Weil es nur auf die Grundfläche ankommt, kann man eine beliebige Fläche in ein Quadrat verwandeln.

Der Würfel besteht aus 6 regelmässigen Pyramiden, für jede Würfelfläche eine. Somit ist das Voluem der Pyramide $V_P = \frac{1}{6}V_W$. Der Würfel hat das Volumen $V_W = a^3 = 2h \cdot a^2$. Gleichgesetzt folgt $V_P = \frac{2}{6}ha^2$. Dabei ist a^2 gerade die Grundfläche G. Somit folgt allgemein für die Pyramide mit Höhe h und Grundfläche G:



$$V = \frac{1}{3}h \cdot G.$$

Pyramidenstumpf



Der Pyramidenstumpf ist die Differenz zweier Pyramiden. Meist sind Deckfläche D, Grundfläche G und die Höhe h gegeben. Daraus muss man die Höhe der ganzen Pyramide und der aufgesetzten berechnen. Dazu verwendet man den Strahlensatz, wobei ja bei einer zentrischen Streckung die Flächen sich wie die Quadrate der Faktoren darstellen. Deshalb lautet der Strahlensatz $h_1 + h : \sqrt{G} = h_1 : \sqrt{D}$. Es folgt $(h_1 + h)\sqrt{D} = h_1\sqrt{G}$ und $h\sqrt{D} = h_1(\sqrt{G} - \sqrt{D})$ und endlich $h_1 = \frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G}-\sqrt{D}}$. Das Volumen ist die Differenz $V = \frac{1}{3}(G \cdot (h_1 + h) - D \cdot h_1) = \frac{1}{3}(Gh + h_1(G - D))$. Nun muss man wissen, dass gilt $G - D = (\sqrt{G} - \sqrt{D})(\sqrt{G} + \sqrt{D})$. Übersichtlicher:

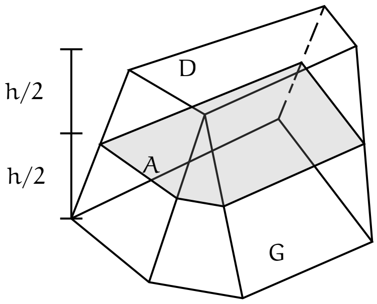
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(Gh + h_1(G - D)) = \frac{1}{3}(Gh + \frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G} - \sqrt{D}}(G - D)) = \frac{1}{3}(Gh + h\sqrt{D}(\sqrt{G} + \sqrt{D})) \\ &= \frac{1}{3}h(G + \sqrt{D}\sqrt{G} + D) \end{aligned}$$

Das Volumen ist also

$$V = \frac{1}{3}h(G + \sqrt{GD} + D)$$

Man beachte: Wenn $G = D$ ist, liegt ein Zylinder vor. Die Formel wird dann zu $V = 1/3h(G + G + G) = G \cdot h$.

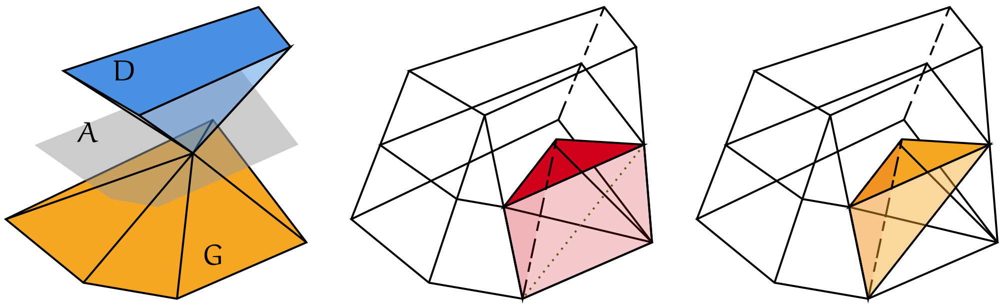
Prismatoid**



Das *Prismatoid*, auch Prismoid genannt, ist eine Verallgemeinerung des Pyramidenstumpfs. Hier sind zwar Deck- und Grundfläche ebenfalls parallel, aber die Polyeder sind nicht ähnlich. Die Formel benötigt die Fläche auf halber Höhe A. Damit wird die Volumenformel etwas abgeändert zu:

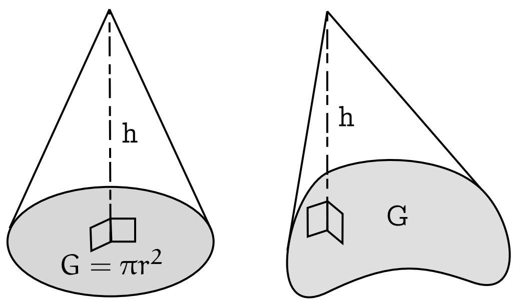
$$V = \frac{1}{6}h(G + 4A + D).$$

Die Seitenflächen des Prismatoids sind entweder Trapeze, Parallelogramme oder Dreiecke. Die Formel heisst *Kepler'sche Fassregel*.



Die Herleitung der Formel kann man sich folgendermassen vorstellen: Als Erstes wählt man auf der Mittelebene einen Punkt P. Von Grundfläche und Deckfläche aus bildet man zwei Pyramiden mit Spitze in P. Deren Volumen ist $Gh/2/3 + Dh/2/3$. Der Restkörper besteht aus Pyramiden mit der Seitenflächen als Grundfläche und einer unbekannten Höhe. Diese Pyramide besteht aus deren zwei, eine über und ein unter der Mittelfläche. Ein solche halbe, rot gezeichnet, kann man halbieren, indem man die Grundfläche halbiert (gepunktete Linie). Die eine dieser zwei kann man wiederum bestimmen als Fläche A_i mal halbe Höhe. A_i ist die Fläche des Dreiecks mit dem Punkt P und zwei Eckpunkten auf der Mittelfäche. Somit folgt also, dass jede Seitenfläche eine Pyramide darstellt mit dem Volumen von $4A_i \cdot h/(2 \cdot 3)$. Summiert man diese Volumen für alle i, d.h. die Fläche wird zu A, dann resultiert ein Volumen von $4A \cdot h/6$. Alle drei Teile zusammen ergeben $V = G\frac{h}{6} + D\frac{h}{6} + A\frac{4h}{6}$.

6.4.6 Der Kegel



Die Betrachtung des Kegels ergibt aufgrund der Vorarbeit bei der Pyramide mit dem Prinzip von Cavalieri sofort für das Volumen Grundfläche mal Höhe. Wenn der Kegel speziell eine kreisförmige Grundfläche mit Halbmesser r aufweist, dann gilt noch

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

Für den Kegelstumpf ist analog der Strahlensatz gültig, so dass folgt

$$V = \frac{1}{3}h(G + \sqrt{GD} + D)$$

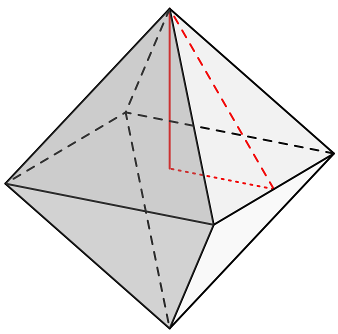
Der gerade mit kreisförmiger Grundfläche besitzt das Volumen

$$V = \frac{1}{3}h\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

6.4.7 Platonische Körper**

Tetraeder als Pyramide, Hexaeder der Würfel sind schon abgehandelt worden. Es bleiben Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Da alle diese Figuren sich durch gleichlange Kanten charakterisieren, ist es üblich, Flächen und Volumen durch die Kantenlänge auszudrücken.

Oktaeder



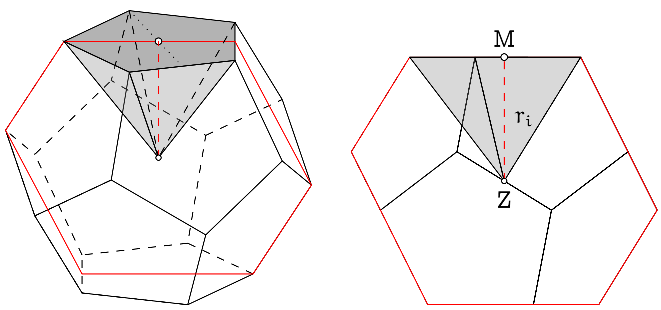
Das Oktaeder besteht aus zwei regelmässigen Pyramiden mit Grundfläche a^2 und der Höhe h. Diese errechnet sich nach zweimaliger Anwendung des Pythagoras. Denn die Höhe in einem regelmässigen Dreieck mit Kantenlänge a der Oberfläche ist $d = \sqrt{a^2 + a^2/4} = \sqrt{3}a/2$. Die Höhe der Pyramide ist dann $h = \sqrt{d^2 - a^2/4} = \sqrt{3a^2/4 - a^2/4} = \sqrt{1/2}a$. Das zweifache Pyramidenvolumen ist $V = 2\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}/2$ oder

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

Den Umkreisradius errechnet sich einfach zu $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Dodekaeder

Dieser Körper besteht aus 12 regelmässigen Fünfecken.



Das Volumen ergibt sich als Summe von 12 Pyramiden mit Flächen A und der Höhe r_i, dem sogenannten Innenkreisradius. Dieser beträgt $r_i = \frac{a}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}$ (siehe Kommentar 6.6). Die Fläche des Fünfecks, wie oben gezeigt, ist $A = \frac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$. Daraus ist $V = 12\cdot\frac{1}{3}Ar_i0$ oder schliesslich (siehe 6.6)

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

Die Oberfläche ist zwölf mal die Fünfecksfläche, also

$$O = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2.$$

Ikosaeder

$r_i = \frac{\sqrt{3}}{12}(3 + \sqrt{5}) \cdot a$, $A\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5}) \cdot a^3$$

Die Oberfläche ist erdenklich einfach, nämlich 20 mal die Dreiecksfläche des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a, $A = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$. Somit

$$O = 5\sqrt{3} \cdot a^2$$

6.5 Kugelberechnungen

6.5.1 Die Kugel

Das Volumen der Kugel lässt sich über das Prinzip von Cavalieri bestimmen.

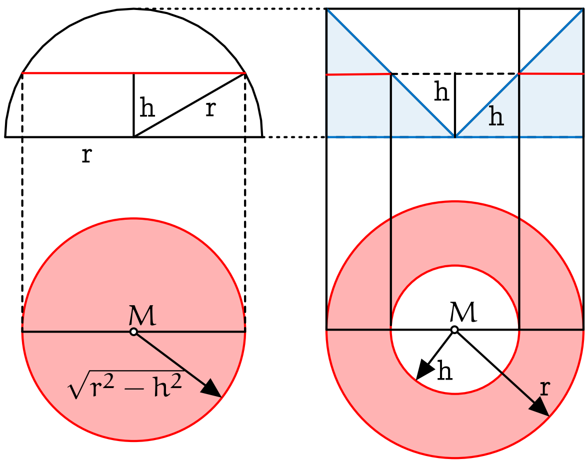


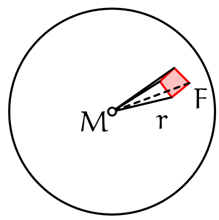
Abbildung 6.1

Dafür eignet sich ein gerader Zylinder, dem ein gerader Kegel herausgeschnitten wurde. In der Abbildung sieht man einen beliebigen Schnitt in der Höhe h. Bei der Halbkugel ist eine solche Fläche einfach mit dem Pythagoras bestimmbar. Der Radius in der Höhe h ist $R = \sqrt{r^2 - h^2}$ und die Fläche somit $F = \pi(r^2-h^2)$. Beim Zylinder hat der Kegel den Winkel 45° zur Horizontale. Somit ist der innere Radius in der Höhe h ebenfalls h. Der äussere Radius ist r. Somit folgt die Fläche zu $F = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$. Das Prinzip ist also erfüllt. Das Volume der Halbkugel ist also gleich dem Volumen ders Zylinder abzüglich dem Volumen des Kegels. Somit folgt $V = V_Z - V_K = \pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$. Zusammen, mit $h = r$ und verdoppelt $V_{\text{Kugel}} = 2[\pi r^3(1-1/3)]$ oder

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Die Bestimmung der Oberfläche der Kugel ist mit elemenataren Mitteln schwierig. Mit der später zu diskutierenden Infinitesimalrechnung wird es ganz einfach. Hier als Anstoss folgende Überlegung.

Wir denken uns eine Pyramide, deren Spitze im Kugelmittelpunkt liegt und deren Grundfläche ein sehr kleines Flächenstück F der Kugeloberfläche ausmacht. Das Volumen der Kugel kennen wir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, und das der Pyramide auch, $S = \frac{1}{3} r \cdot F$. Die Anzahl kleiner Pyramiden, die dasselbe Volumen aufweisen ist



$$q = \frac{\pi \frac{4}{3} r^3}{\frac{1}{3} r F} = \frac{4\pi r^2}{F}$$

Daraus folgt die Oberfläche der Kugel als

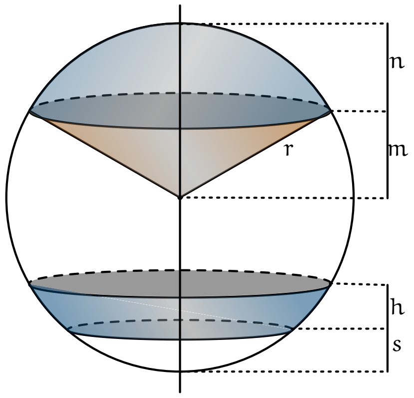
$$O = q \cdot F = 4\pi r^2$$

Durch die sehr kleine Fläche können wir annehmen, dass die Seitenlänge der Pyramide fast gleich ist mit dem Radius, welcher die Höhe der Pyramide darstellt.

6.5.2 Kugelteile

Die Berechnungen von Volumen und Flächen folgen einerseits durch das Prinzip von Cavalieri, anderseits durch einen "Trick" mit fast unendlich kleinen Flächen als Plausibilität. Später werden wir die Formeln mit der Infinitesimalrechnung herleiten können.

Kugelabschnitt, Kugelsegment, Haube, Kalotte



Der Kugelaschnitt oder -segment entsteht durch eine Schnittebene durch die Kugel. Seine Mantelfläche nennt man Haube oder Kalotte. Es gibt verschiedene Formeln, je nach dem, welche Angaben gegeben sind, nämlich die Radien oder die Höhen.
Mit der Vorarbeit und unter Wiederanwendung des Prinzips von Cavalieri kann man das Abschnittsvolumen als Differenz bestimmen (siehe Abb. 6.1). Das Volumen des Kugelteils ist als Zylinderanteil minus Kugelstumpf zu berechnen.

Als Zylindervolumen minus Kegelstumpfvolumen folgt: $\pi r^2 \cdot n - \frac{1}{3} n\pi(r^2 + rr_2 + r_2^2)$ mit $r_2 = r - n$. Damit folgt

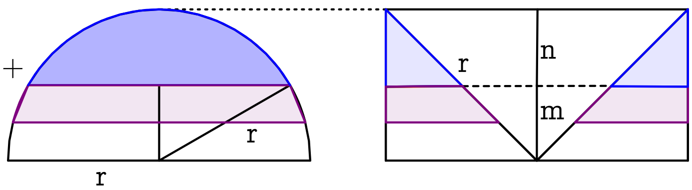


Abbildung 6.2

$$\begin{aligned}
V &= \pi r^2 \cdot n - \frac{1}{3} n\pi(r^2 + r(r-n) + (r-n)^2) \\
&= \pi r^2 \cdot n - \frac{1}{3} n\pi[r^2 + r^2 - rn + r^2 - 2rn + n^2] \\
&= \pi r^2 \cdot n - \frac{1}{3} n\pi[3r^2 - 3rn + n^2] \\
&= \frac{1}{3}\pi n[3rn - n^2] \\
&= \frac{1}{3}\pi n^2(3r - n)
\end{aligned}$$

Die Mantelfläche M und die Oberfläche O folgen aus der Vermutung, dass die Oberfläche proportional zum Volumenanteil ist. Wieder könnte man sich den Ausschnitt der Kugel als Summe kleinster Pyramiden mit Volume $Fr/3$ vorstellen. Dazu bestimmen wir das Verhältnis von Kugelausschnitt und Kugel. Der Ausschnitt ist, Vorgriff auf den Kugelausschnitt, $V_A = \frac{2}{3}\pi r^2 n$. Somit folgt mit den Formeln für die Kugel, $O = 4\pi r^2$ und $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ sodann

$$M = 4\pi r^2 \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 n}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 4\pi r^2 \frac{n}{2r} = 2\pi rn$$

Zusammengefasst also

$$M = 2\pi rn \qquad , \qquad O = 2\pi rn + \pi(r^2 - (r-n)^2) = 2\pi rn + \pi n(2r - n)$$

Kugelausschnitt, Kugelsektor

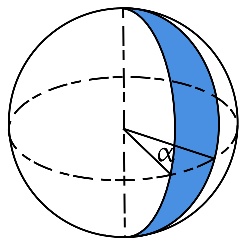
Da Volumen des Kugelsektors ist einfach das Volumen des Abschnitts plus das Volumen des angrenzenden Kegels. Also:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi n^2(3r - n) + \frac{1}{3}(r-n)\pi(r^2 - (r-n)^2) \\
&= \frac{1}{3}\pi n^2(3r - n) + \frac{1}{3}(r-n)\pi(2rn - n^2) \\
&= \frac{1}{3}\pi[3rn^2 - n^3 + 2r^2 n - rn^2 - 2rn^2 + n^3] \\
&= \frac{1}{3}\pi[2r^2 n] \\
&= \frac{2}{3}\pi r^2 n.
\end{aligned}$$

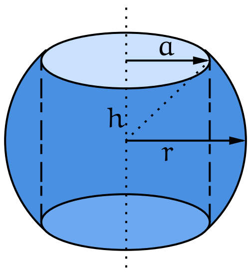
Kugelschicht, Kugelzone

Wir bemühen nochmals Abb. 6.2. Die Schicht hat dasselbe Volumen wie der Kegelstumpf mit Höhe h. Es ist $r_1 = r - s$ und $r_2 = r - s - h$. Somit

$$\begin{aligned}
V &= \pi r^2 h - \frac{1}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \\
&= \pi r^2 h - \frac{1}{3} h((r-s)^2 + (r-s-h)(r-s) + (r-s-h)^2) \\
&= \pi r^2 h - \frac{1}{3} h((r-s)^2 + (r-s)^2 - h(r-s) + (r-s)^2 - 2h(r-s) + h^2) \\
&= \pi r^2 h - \frac{1}{3} h[3(r-s)^2 - 3h(r-s) + h^2]
\end{aligned}$$



6.1 Übung Bestimmen wir Volumen und Oberfläche eines Kugelkeils mit Winkel $\alpha = 27°$. Den Kugelkeil kann man sich als Apfelstück vorstellen.
Die Lösung ist erdenklich einfach: Das Volumen ist anteilsmässig gegeben als $V = \frac{27}{360}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{10}\pi r^3$. Die Oberfläche ist zusammengesetzt: der Mantel als Anteil $4\pi r^2 \frac{27}{360}$ plus zweimal die halbe Kreisscheibe, also πr^2. Zusammen $O = 4\pi r^2 \frac{27}{360} + \pi r^2$ oder $V = \pi r^2[\frac{1}{5} + 1] = \frac{6}{5}\pi r^2$.
◁



6.2 Übung Gefragt wird nach dem Volumen des Kugelrings, wie in der Abbildung dargestellt.
Das gesuchte Volumen ergibt sich aus der Differenz von Vollkugel minus Zylinder und zwei Abschnitten. Die Höhe des Zylinders ergibt sich mit Pythagoras zu zweimal $s = h/2 = \sqrt{r^2 - a^2}$. Daraus das Zylindervolumen $V_1 = 2\pi a^2 \cdot s = 4\pi a^2 s$. Der Abschnitt hat die Volumenformel $V_2 = \frac{1}{3}\pi n^2(3r - n)$. Es ist $n = r - s$. Deshalb $V_2 = \frac{1}{3}\pi(r-s)^2(2r+s)$. Alles zusammen:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 - 2\pi a^2 s - 2\frac{1}{3}\pi[(r-s)^2(2r+s)] \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3 - 2\pi a^2 s - \frac{2}{3}\pi[(r^2 - 2sr + s^2)(2r+s)] \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3 - 2\pi a^2 s - \frac{2}{3}\pi[2r^3 - 4sr^2 + 2s^2 r + sr^2 - 2s^2 r + s^3] \\
&= \cancel{\frac{4}{3}\pi r^3} - 2\pi a^2 s - \frac{2}{3}\pi[\cancel{2r^3} - 3sr^2 + s^3] \\
&= -2\pi a^2 s - \frac{2}{3}\pi[-3sr^2 + s^3] \\
&= 2\pi s r^2 - 2\pi a^2 s - \frac{2}{3}\pi s^3 = 2\pi s(r^2 - a^2 - 1/3 s^2) = 2\pi s(s^2 - 1/3 s^2) \\
&= 2\pi\frac{2}{3}s^3 = \frac{4}{3}\pi s^3
\end{aligned}$$

oder mit a anstatt s:

$$V = \frac{4}{3}\pi\sqrt{r^2 - a^2}^3$$

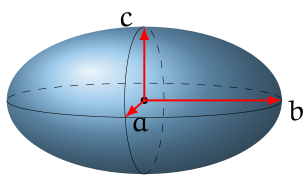
◁

6.5.3 Drehkörper

Drehkörper oder Rotationskörper entstehen, indem eine geschlossene Kurve oder eine offene, welche die Achse an beiden Enden berührt, um eine Achse vollständig rotiert wird. Die Kurve soll sich nicht schneiden. Das Kurvenstück heisst Erzeugende.

Ellipsoid

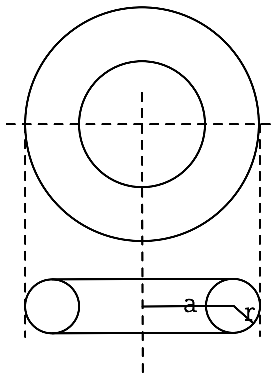
Wir haben bei der Ellipse gesehen, dass ihre Fläche durch die zwei Achsabschnitte gegeben ist, wobei jeder Abschnitt einen Radius ersetzt, also anstatt wie bei Kreis $r \cdot r$ wird $a \cdot b$ ersetzt. Beim Volumen ist es ähnlich, anstatt $r \cdot r \cdot r$ folgt $a \cdot b \cdot c$ oder vollständig:



$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Wir haben auch erwähnt, dass der Umfang der Ellipse nicht mit einer geschlossenen Formel angegeben werden kann. Das führt dazu, dass für die Oberfläche auch keine Formel existiert. Man benutzt Näherungen.

6.5.4 Torus



Ebenso hier wollen wir nur das Resultat angeben, denn die Berechnung gestaltet sich. Es gibt zwar die recht allgemeinen sogenannten Guldinischen Regeln. Sier erfordern Schwerpunkte und Erzeugende. Kurzum

$$V = 2\pi^2 ar^2 \quad , \quad O = 4\pi^2 ar.$$

Wir werden noch Methoden kennenlernen, mit denen man die hier unerledigten Aufgaben noch lösen kann.

** Die Plausibilität sagt, dass das Verhältnis von Fläche zu Volumen eines kleinsten Torusstücks der Höhe s (Bogenlänge) mit Fläche $f = 2\pi r \cdot s$ und Volumen $v = \pi r^2 \cdot s$ gleich ist zum Verhältnis des ganzen Körpers, also $f : v = F : V$. Daraus $F = \frac{f}{v}V$. Damit folgt durch Einsetzen:

$$F = \frac{2\pi rs}{\pi r^2 s} 2\pi^2 ar^2 = \frac{2}{r} 2\pi^2 ar^2 = 4\pi^2 ar.$$

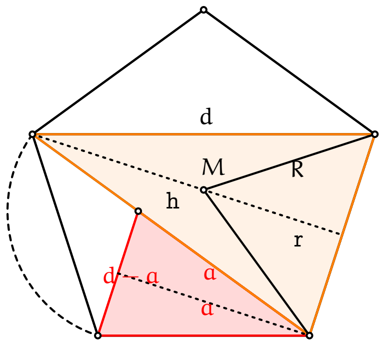
6.6 Zusammenfassung stereometrischer Formeln

Formel 6.1 (Volumen und Oberflächen).

Körper	Volumen F	Mantel M, Oberfläche O
Parallelepiped (Spat)	$G \cdot h$	$2 \cdot (ah_a + bh_b + ch_c)$
Quader	$a \cdot b \cdot c$	$2 \cdot (ab + ac + bc)$
Allgemeines Prisma	$G \cdot h$	$2G + M$
Zylinder	$\pi \cdot r^2 \cdot h$	$2\pi r \cdot (r + h)$
Pyramide	$\frac{1}{3}Gh$	$G + M$
Pyramidenstumpf	$\frac{1}{3}h\left(G + \sqrt{GD} + D\right)$	$G + D + M$
Prismatoid	$\frac{1}{3}h(G + 4A + D)$	–
Kegel	$\frac{1}{3}G$	$G + M$
gerader Kreiskegel	$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$	$(r \cdot \pi \cdot (r + s))$
gerader Kegelstumpf	$\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$	$\pi r_2^2 + \pi r_1^2 + \pi s(r_1 + r_2)$
Tetraeder	$\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$	$a^2\sqrt{3}$
Hexaeder (Würfel)	a^3	$6 \cdot a^2$
Oktaeder	$\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$	$2a^2\sqrt{3}$
Dodekaeder	$\frac{1}{4}a^3(15 + 7\sqrt{5})$	$3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$
Ikosaeder	$\frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$	$5a^2\sqrt{3}$
Kugel	$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	$4 \cdot \pi \cdot r^2$
Kugelsektor (Abschnitt)/Haube	$\frac{2}{3}\pi r^2 h$	$2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
Kugelsegment (Ausschnitt)	$\frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3r - h)$	$2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + \pi h^2(2r - h)^2$
Kugelschicht (Zone)	$\frac{1}{6}\pi \cdot h(3 \cdot a^2 + 3 \cdot b^2 + h^2)$	$\pi \cdot (2 \cdot r \cdot h + a^2 + b^2)$
Ellipsoid	$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c$	–
Torus	$2\pi^2 \cdot R \cdot r^2$	$4\pi^2 \cdot R \cdot r$

Längere Berechnungen

Fläche des regelmässigen Fünfecks



** Im Fünfeck erkennen wir die Ähnlichkeit des roten und des orangen Dreiecks. Deshalb sind die Seitenverhältnisse gleich. Es gilt: $d : a = a : (d-a)$. Durch Umformung folgt $d(d-a) = a^2$. Wir suchen d aus der Seite a. Somit $d^2 - ad = a^2$ oder $d^2 - ad + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = a^2$, mit der binomischen Formel dann $(d-\frac{a}{2})^2 = \frac{5}{4}a^2$. Weiter $d - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}a$ und $d = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}a$ womit $d = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$. Daraus folgt $h^2 = d^2 - \frac{a^2}{4} = (d-\frac{a}{2})(d+\frac{a}{2}) = \frac{a\sqrt{5}}{2}(2+\sqrt{5})\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}(2\sqrt{5}+5)$ und deshalb

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+5}.$$

Der Umkreisradius folgt aus der Heron'schen Flächenformel zu $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4F}$ mit den Seiten und der Dreiecksfläche. In unserem Fall mit $F = ah/2$ folgt mit den obigen Formeln für d und h

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{4}\frac{d^2 a}{ah/2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{a^2}{4}(1+\sqrt{5})^2}{\frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+5}} = \frac{a}{4}\frac{(1+\sqrt{5})^2}{\sqrt{2\sqrt{5}+5}} \\
&= \frac{a}{4}\frac{1+2\sqrt{5}+5}{\sqrt{2\sqrt{5}+5}} \cdot \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{2\sqrt{5}}}} \qquad |\text{erweitern mit} \sqrt{()} \\
&= \frac{a}{4 \cdot 5}\sqrt{5}(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5+2\sqrt{5}}) \\
&= \frac{2a}{4 \cdot 5}\sqrt{5(3+\sqrt{5})^2(2\sqrt{5}-5)} = \frac{a}{10}\sqrt{5(9+6\sqrt{5}+5)^2(5-2\sqrt{5})} \\
&= \frac{a}{10}\sqrt{5(14+6\sqrt{5}+5)(5-2\sqrt{5})} = \frac{2a}{4 \cdot 5}\sqrt{10(7+3\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} \\
&= \frac{a}{10}\sqrt{10[35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30]} = \frac{a}{10}\sqrt{10[5+\sqrt{5}]}
\end{aligned}$$

und somit

$$R = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$$

Der Inkreisradius ist gegeben aus $r = \frac{2F}{U}$ mit $U = a+b+c$ dem Umfang des Dreiecks, hier $U = 2d+a$. Somit

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{100}(50+10\sqrt{5}) - \frac{a^2}{4}} \\
&= \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}-25} = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Die Fläche des Fünfecks ist die Summe der fünf Dreiecke mit Höhe r und Grundseite a:

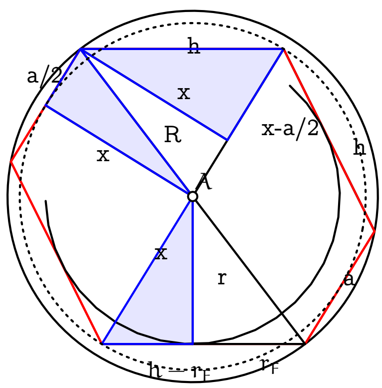
$$F = 5\frac{ra}{2} = 5a^2\frac{1}{20}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = a^2\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Damit die Oberfläche des Oktaeders als das Zwölffache

$$O = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Dodekaeder Aussen- und Innenradius

Dieser Körper fordert den grössten rechnerischen Aufwand, um Flächen und Volumen zu bestimmen. Das beginnt schon mit dem regelmässigen Fünfeck als Herausforderung.



Gemäss Zeichnung suchen wir die Grössen R und r. Der Weg führt über x. Bekannt sind schon h, a und r_F, der Innenradius der Fläche. Es gilt der Pythagoras

$$\begin{aligned}
h^2 &= x^2 + (x-a/2)^2 = x^2 + x^2 - ax + a^4 \\
&= 2(x^2 - ax/2) + a^2/4 \\
[\frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+5}]^2 &= 2[(x-a/4)^2 - a^2/16] + a^2/4 \\
\frac{a^2}{4}(2\sqrt{5}+5) &= 2(x-a/4)^2 + a^2\frac{1}{8} \\
\frac{a^2}{8}\left(4\sqrt{5}+10-1\right) &= 2(x-a/4)^2 \\
\frac{a^2}{16}\left(4\sqrt{5}+9\right) &= (x-a/4)^2 \qquad |\text{radizieren} \\
\frac{a}{4}\sqrt{4\sqrt{5}+9} &= x - a/4 \\
x &= \frac{a}{4}\sqrt{4\sqrt{5}+9} + \frac{a}{4} \\
&= \frac{a}{4}\left(\sqrt{4\sqrt{5}+9}+1\right)
\end{aligned}$$

Es gilt das nicht Offensichtliche:

$$9 + 4\sqrt{5} = (2+\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5)$$

Damit

$$x = \frac{a}{4}(3+\sqrt{5})$$

Nun folgt für R mit Pythagoras

$$\begin{aligned}
R^2 &= x^2 + a^2/4 = \frac{a^2}{16}\left((3+\sqrt{5})^2 + 4\right) \\
&= \frac{a^2}{16}\left(9 + 6\sqrt{5} + 5 + 4\right) \\
R &= \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Und nun der Innenradius r mit $h = \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+5}$ und $r_F = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ (siehe 6.6):

$$\begin{aligned}
r^2 &= R^2 - (h - r_F)^2 \\
&= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \left[\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right]^2 \\
&= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \frac{a^2}{4}\left[\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right]^2 \\
&= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \frac{a^2}{4}\left[(5+2\sqrt{5} + \frac{1}{25}(25+10\sqrt{5}) - \frac{2}{5}\sqrt{(5+2\sqrt{5})(25+10\sqrt{5}}\right] \\
&= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \frac{4a^2}{16}\left[(6 + \frac{12}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{125+50\sqrt{5}+50\sqrt{5}+100}\right]
\end{aligned}$$

Der Ausdruck $125 + 50\sqrt{5} + 50\sqrt{5} + 100 = 225 + 100\sqrt{5}$ ist ein Quadrat von $10 + 5\sqrt{5}$, denn $(10+5\sqrt{5})^2 = 100 + 100\sqrt{5} + 125$. Also

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \frac{4a^2}{16}\left[(6 + \frac{12}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}(10+5\sqrt{5})\right] \\
&= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5} - 4[6 - 4 + \frac{2}{5}\sqrt{5}]) \\
&= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5} - 8 - \frac{8}{5}\sqrt{5}) \\
&= \frac{a^2}{16}(10 + \frac{30-2}{5}\sqrt{5}) \\
&= \frac{a^2}{16\cdot 5}(50+22\sqrt{5}) \\
&= \frac{a^2}{16\cdot 25}(250+110\sqrt{5})
\end{aligned}$$

Damit folgt die Wurzel

$$r = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}.$$

Volumen Dodekaeder

Das Volumen ergibt sich als Summe von 12 Pyramiden mit Flächen A und der Höhe r_i, dem sogenannten Innenkreisradius. Dieser beträgt $r_i = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$ (siehe Kommentar 6.6). Die Fläche des Fünfecks, wie oben gezeigt, ist $A = \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$. Daraus ist $V = 12 \cdot \frac{1}{3}Ar_i0$ oder

$$\begin{aligned}
V &= 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2 \cdot \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}} \\
&= \frac{a^3}{2}\sqrt{\frac{1}{10}[(25+10\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})]} \\
&= \frac{a^3}{2}\sqrt{\frac{1}{10}[625+275\sqrt{5}+250\sqrt{5}+110\cdot 5]} \\
&= \frac{a^3}{2}\sqrt{\frac{1}{10}[1175+525\sqrt{5}]} = \frac{a^3}{4}\sqrt{\frac{4}{10}[25(47+21\sqrt{5})]} \\
&= \frac{a^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Nun kann man raten, ob der Ausdruck in der Wurzel als $(x+y\sqrt{5})^2$ darstellbar ist. Der mittlere Term folgt zu $2xy\sqrt{5} = 210\sqrt{5}$. Eine Faktorisierung ist $210\sqrt{5} = 2 \cdot 15 \cdot 7\sqrt{5}$. Damit folgen z.B.

$x^2 = 15^2 = 225$ und $y^2 = 7^2\sqrt{5}^2 = 49 \cdot 5 = 245$ und $x^2 + y^2 = 470$. So haben wir gefunden: $470 + 210\sqrt{5} = (7\sqrt{5} + 15)^2$. Woraus schliesslich

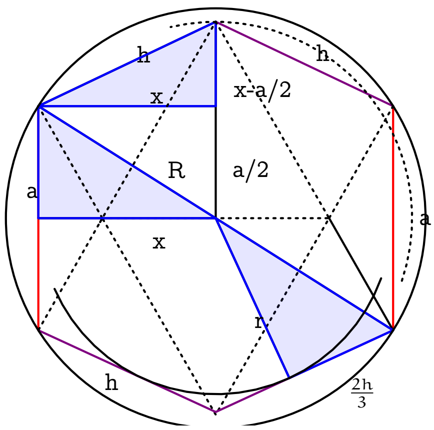
$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

Die Oberfläche ist zwölf mal die Fünfecksfläche, also

$$O = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2.$$

Volumen Ikosaeder

Die Berechnungen laufen ähnlich ab wie beim Dodekaeder, d.h. man braucht den Inradius aus dem Aussenradius. Das gleichseitige Dreieck ist aber etwa einfacher als das Fünfeck.
Wir stellen auch hier fest, dass es drei spezielle Kugeln gibt. Zum einen die Umkugel, welche durch die vom Mittelpunkt entferntesten Ecken geht mit R. Die Inkugel, die die nächsten Flächen berührt mit r und die dritte, welche die Kanten beinhaltet mit Radius x. Ein Schnitt zeigt das Sechseck, das aus zwei Kanten a und vier Mittellinien des Dreiecks h gekennzeichnet ist. R geht durch die Ecken der Kanten a und g, x durch h und h und r steht senkrecht auf h.



Wir beginnen mit der Hilfsgröss x, wobei $h = \sqrt{3}a/2$ ist:

$$\begin{aligned}
h^2 &= x^2 + (x - a/2)^2 \\
\frac{3}{4}a^2 &= 2x^2 - ax + \frac{a^2}{4} \\
\frac{1}{2}a^2 &= 2[(x - a/4)^2 - a^2/16] \\
\frac{1}{2}a^2 + a^2/8 &= 2(x - a/4)^2 \\
\frac{a^2}{8}(4 + 1) &= 2(x - a/4)^2 \\
\frac{a^2}{16}(5) &= (x - a/4)^2 \\
a\frac{\sqrt{5}}{4} &= x - a/4 \\
x &= a\frac{\sqrt{5}}{4} + a/4 = a\frac{1 + \sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

Mit Pythagoras folgt für R:

$$\begin{aligned}
R^2 = x^2 + (a/2)^2 &= a^2\frac{(1 + \sqrt{5})^2}{16} + a^2/4 \\
&= a^2\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5)^2}{16} + \frac{4a^2}{16} \\
&= a^2\frac{(10 + 2\sqrt{5})^2}{16}
\end{aligned}$$

Damit

$$R = a\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Und für den Innenradius Folgendes. Man beachte, dass die Inkugel die Dreiecksfläche auf der Höhenlinie im Schwerpunkt des Dreiecks berührt, der $1/3h$ von der Basis und $2/3h$ von der Spitze des Dreiecks entfernt liegt.

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - (2h/3)^2 \\ &= a^2 \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{4}{9}3a^2/4 \\ &= a^2 [\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{3}] \\ &= a^2 \frac{1}{48} [30 + 6\sqrt{5} - 16] \\ &= a^2 \frac{1}{48} [14 + 6\sqrt{5}] \end{aligned}$$

Mit der Identität $14 + 6\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})^2$ folgt

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 \frac{1}{48} (3+\sqrt{5})^2) \\ r &= a \frac{\sqrt{3}}{12} (3+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Nun berechnen wir eine der 20 Pyramiden aus Seitenfläche($A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ mal Innenradius durch 3:

$$\begin{aligned} V &= 20\frac{1}{3} a \frac{\sqrt{3}}{12} (3+\sqrt{5}) (\frac{a^2\sqrt{3}}{4}) \\ &= a^3 \frac{20 \cdot 3}{3 \cdot 12 \cdot 4} \frac{1}{12} (3+\sqrt{5}) (\frac{1}{4}) \\ &= a^3 \frac{5}{12} (3+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Die Oberfläche ist einfach 20 Mal die Dreiecksfläche

$$O = 20\sqrt{3}a^2/4 = 5\sqrt{3}a^2.$$

Anmerkung 6.2. In vielen praktischen Aufgaben wird mit Körpern aus Beton, Stein, Holz oder Stahl gerechnet, sowie Füllungen von Hohlkörpern mit Flüssigkeit. Dabei wird die Masse (leider auch als Gewicht bezeichnet) ins Spiel gebracht. Die Verbindung von Volumen und Masse wird über die Dichte, auch spezifisches Gewicht genannt, hergestellt. Die Dichte ist eine Materialeigenschaft, die in kg/m^3 angegeben wird. Die Dichte ist die Masse in kg eines Volumens von m^3. Ein Kubikmeter Wasser hat eine Masse von 1000kg. Die Dichte von Wasser ist $1000kg/m^3$. Man kann sie auch zu $1g/cm^3$ darstellen.

Aufgaben

0.3 Bestimme das Volumen einer Pyramide der Höhe $h = 12$ mit der Grundfläche $G = 100$.

3 Gemäss Formel folgt $V = \frac{1}{3}hG = 100 \cdot 12/3 = 400$.

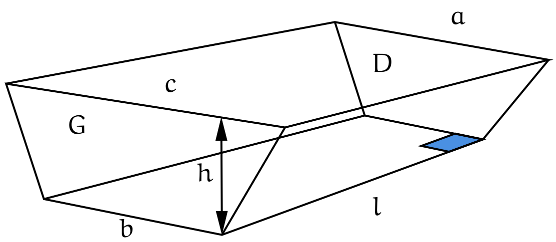
0.4 Ein gerades vierseitiges Prisma hat 9 Liter Inhalt. Seine Grundfläche ist ein Rechteck von 15 cm mal 18 cm Seitenlänge. Berechne die Oberfläche.

4 Das Volumen von 9 Liter entspricht $9 \cdot 10^3 cm^3 = 9000 cm^3$. Die Höhe ist $h = 9000/18/15 = 100/3 \approx 33.33$

0.5 Eine Milchpackung ist ein Tetrader. Wie gross ist die Kantenlänge bei einem Volumen von 1 Liter?

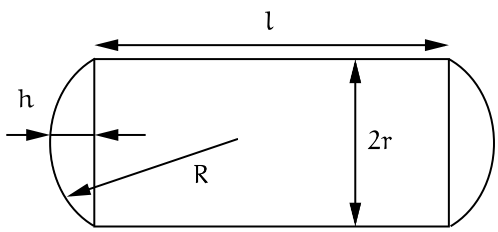
5 Das Tetraeder ist eine Pyramide mit Volumen $V = \sqrt{2} \cdot \frac{a^3}{12} = 1000$. Somit ist die Kantenlänge $a = \sqrt[3]{\frac{12000}{\sqrt{2}}} = 20.4cm$.

0.6 Bestimme das Volumen des Beckens. Grund- und Deckfläche sind parallel mit Abstand $l = 45$. Es misst $a = 12$, $b = 24$, $c = 36$ und $h = 16$.



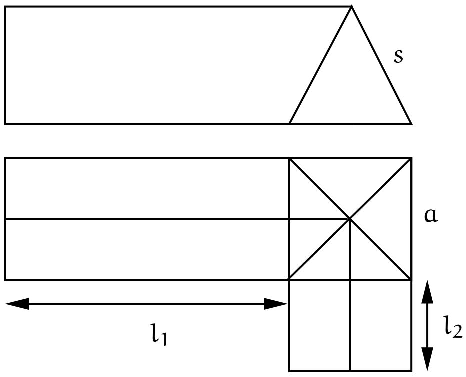
6 Wir haben einen Pyramidenstumpf vor uns mit Grundfläche G, Deckfläche D und Höhe l. G und D sind ähnlich. Für das Trapez G folgt $G = h\frac{b+c}{2} = 16 \cdot 30 = 480$. Weil a proportional zu c ist und gilt $q = a/c = 1/3$ folgt $D = G/q^2 = G/9 = 60$. Sodann die Formel für Pyramidenstümpfe $V = \frac{1}{3}l(G + \sqrt{GD} + D) = \frac{45}{3}(480 + 60 + \sqrt{60 \cdot 480}) = 15(540 + \sqrt{60 \cdot 8 \cdot 60}) = 15(540 + 60\sqrt{8}) = 15(540 + 120\sqrt{2}) \approx 10646$.

0.7 Bestimme das Volumen des Tanks. Er besteht aus einem Zylinder und zwei Kugelabschnitten. Es ist $r = 1.2m$, $l = 7m$, $R = 8m$ und $h = 0.4m$. Wir gross ist die Masse, wenn er mit Milch mit Dichte $1030kg/m^3$ gefüllt wird?

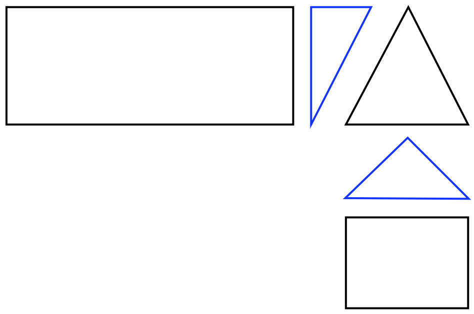


7 Der Zylinder hat das Volumen $V_1 = \pi r^2 l = \pi 1.2^2 7 = \pi 1.44 \cdot 7 = \pi 10.08 \approx 31.67\text{m}^3$. Eine Haube fasst gemäss Formel $V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 h$. Dabei bestimmt sich h als $h = R - s$ mit $s^2 = R^2 - r^2$ oder $s = \sqrt{64 - 1.44} = \sqrt{62.56} \approx 7.909$. Also $h = 8 - 7.909 \approx 0.091\text{m}$. Daher $V_2 = \frac{2}{3}\pi 64 \cdot 0.091 \approx 1.220$. Gesamthaft $V = V_1 + 2V_2 = 31.67 + 2 \cdot 1.22 = 31.67 + 2.44 = 34.11\text{m}^3$.

0.8 Bestimme das Volumen des Dachstuhls. Zuerst mit Variablen, dann mit Werten. Es ist $s = 10\text{m}$, $a = 12\text{m}$, $l_1 = 50\text{m}$ und $l_2 = 15\text{m}$.



8 Den ganzen Dachstuhl kann man sich in 5 Elemente aufgeteilt denken. Links beginnend ein Prisma der Höhe l_1. Dann ein eine Pyramide als Übergang (blau), die quadratische Pyramide, wieder eine Pyramide wie vorhin und nochmals ein Prisma.

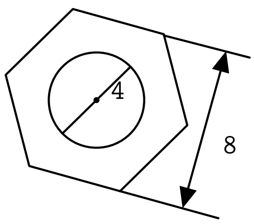


Das erste Prisma mit $G = a \cdot h/2 = a\sqrt{s^2 - (a/2)^2}$. In Zahlen $G = 12 \cdot \sqrt{100 - 36}/2 = 6 \cdot 8/2 = 24$. Das Prisma hat das Volumen $V_1 = G \cdot l_1 = 24 \cdot 50 = 1200$. Die blaue Pyramide hat ebenfalls die Grundfläche G, die Höhe $h = a/2 = 6$. Damit das Volumen $V_2 = Gh/3 = 144/3 = 48$. Die quadratische Pyramide umfasst das Volumen $V_3 = a^2\sqrt{s^2 - (a/2)^2}/3 = 144 \cdot 8/3 = 48 \cdot 8 = 384$. Dann $V_4 = V_2$. Das letzte Prisma hat $V_5 = G \cdot l_2 = 24 \cdot 15 = 360$. Zusammen $V = V_1 + 2V_2 + V_3 + V_5 = 1200 + 2 \cdot 48 + 384 + 360 = 1200 + 96 + 384 + 360 = 2040$.

0.9 Eine Kugel hat ein Volumen von 1m^3. Wie gross ist seine Oberfläche?

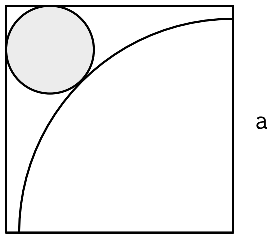
9 Die Formel sind $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$. Auflösen nach r gibt $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ und eingesetzt $O = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}^2 = \sqrt[3]{4^3\pi^3 \frac{9V^2}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{4\pi 9V^2} = \sqrt[3]{36\pi V^2}$. Mit Zahlen $O = \sqrt[3]{36\pi} \approx 4.84\text{m}^2$.

0.10 Zur Herstellung von Schraubenmuttern verwendet man Rohlinge, sechseckförmige Stücke mit einer Breite von 8mm, eine Bohrung von 4mm Durchmesser und einer Höhe von 5mm. Die Dichte des Stahls ist 7800kg/m^3. Wieviele solcher Teile lassen sich mit 15kg Stahl herstellen?



10 Wir berechnen das Volumen der Mutter als Differenzkörper von sechseckigem Prisma und Zylinder (im Innern). Für das Prisma gilt $V_1 = Gh$ mit $G = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}64$ und $V_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}64 \cdot 5 = 480\sqrt{3}$. Der Zylinder hat das Volumen $V_2 = \pi r^2 \cdot h = \pi 4 \cdot 5 = 20\pi$. Als Differenz $V = V_1 - V_2 = 480\sqrt{3} - 20\pi = 768.55$. Einheit ist hier $(mm)^3$. Die Anzahl ergibt sich aus $N = \frac{15kg}{768.55mm^3 \cdot 7800kg/m^3} = \frac{15kg}{768.55mm^3 \cdot 7.8g/cm^3}$. Wir müssen die Einheiten vereinheitlichen, z.B. mit Längen in cm und Masse g. $N = \frac{15000g}{0.76855cm^3 \cdot 7.8g/cm^3} = \frac{15000}{5.995} \approx 2500$.

0.11 Im Quadrat mit Seite a ist die Abwicklung eines Kegels ersichtlich. Wie gross ist dessen Volumen?



11 Der Umfang des kleinen Kreises mit Radius r, der Grundfläche, muss gleich sein der Länge des Viertelkreisbogens. Die Höhe des Kegels ergibt sich aus der Mantellänge s mit dem Pythagoras. Die Höhe ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$. Von der oberen linken Ecke bis zum Berührungspunkt hat man die Länge $r\sqrt{2}+r$. Es muss also gelten für die Diagonale der Länge $\sqrt{2}a = s + r(1 + sqrt2)$. Die zweite Bedingung ist der Umfang: $\frac{1}{4}2\pi s = 2\pi r$, womit $\frac{1}{4}s = r$ und $s = 4r$. Eingesetzt in die Diagonalbedingung folgt $\sqrt{2}a = 4r + (r1 + \sqrt{2}) = r(5 + \sqrt{2})$. Somit

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}}$$

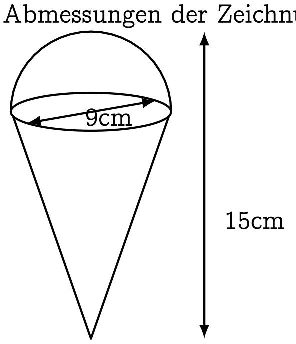
0.12 ** Eine Pyramide mit Höhe $h = 11cm$ hat als Grundfläche ein $100cm^2$ grosses regelmässiges 5-Eck. Wie gross ist die Mantel- und Oberfläche?

12 Aus der Grundfläche berechnen wir die Kantenlänge des Fünfecks. Es gilt $G = a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 100$. Damit $a = \frac{100}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}} = \frac{100}{6.882} = 14.53$. Die Höhe H der dreieckigen Seitenfläche folgt mit dem Pythagoras, wobei die Pyramidenhöhe h und der Inkreisradius $r = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ die Katheten bilden. Somit

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{100}(25 + 10\sqrt{5}) = 121 + \frac{14.53^2}{100}(25 + 10\sqrt{5}) = 121 + 100 = 221$$

Daraus folgt $H \approx \sqrt{221} = 14.87$. Die Mantelfläche ist $M = 5 \cdot H \cdot a/2 = 5 \cdot 14.87 \cdot 14.53/2 = 540.15$. Zur Oberfläche fehlt noch die Grundfläche $G = 100$, also $O = 640.15$.

0.13 Bestimme die Masse des Senklots (Senkblei) mit einer Dichte von $14g/cm^3$, Es besteht aus einer Halbkugel und einem Kegel mit den Abmessungen der Zeichnung.



13 Der Körper besteht aus einer Halbkugel mit Volumen $V_1 = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{2\pi}{3}(4.5)^3 = 190.85$ und Kegel mit $V_2 = \frac{1}{3}hG = \frac{1}{3}10.5\pi 4.5^2 = 223$, zusammen $V = 413.85cm^3$. Die Masse ist $m = 413.85 \cdot 14 = 5793.7$ oder $5.794kg$.

Index