Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Teil III
Algebra

6. März 2022

Vorwort

Das vorliegende Werk ist das zweite, das innerhalb dieses Projektes fertiggestellt wurde.
Algebra auf der Mittelschulstufe befasst sich vor allem mit dem Lösen von Gleichungen mit speziellem Gewicht auf den Polynomen. Früher sprach man auch vom Buchstabenrechnen als Erweiterung des Rechnens mit Zahlen, das man Arithmetik nennt. Quadratische Gleichungen kommen sehr häufig in anderen Zusammenhängen vor.
Es gibt eine Korrespondenz zwischen Gleichungen und Funktionen. Wir haben hier aber diese zwei Aspekte getrennt gehalten. Damit geht eine gewisse Wiederholung einher, die nicht ganz ungewollt ist.
Den Stoff von niederer und höherer Mathematik für die Matura muss man sich zirkulär aneignen, denn ein strikt linearer Aufbau ist nicht möglich. Man sollte den Stoff zweimal zu durchlaufen, um alles verstehen zu können. Natürlich hat der Autor darauf geachtet, so wenige wie möglich vorauszusetzen.
Auch hier können wir nur feststellen, dass es keinen einfachen Weg zur Mathematik gibt entgegen möglicher anders lautender Werbung. Mathematik ist Arbeit für alle. Die Hartnäckigen sind die möglichen Champions. Es ist nur ganz wenigen gegönnt, Mathematik im Flug zu erlernen. Dies sollte eher motivieren als abschrecken. Arbeit bringt Früchte.
Viel Erfolg.

Feldmeilen, 6. März 2022 *Claudio Franzetti*

Organisationshilfe

- * (oder blauer Text) bedeutet Stoff für das "erweitertes Niveau" gemäss Reglement
- ** Zusatzstoff für besonders Interessierte

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Algebra

Kapitel 10

Lineare Gleichungen, Ungleichungen, Betrag

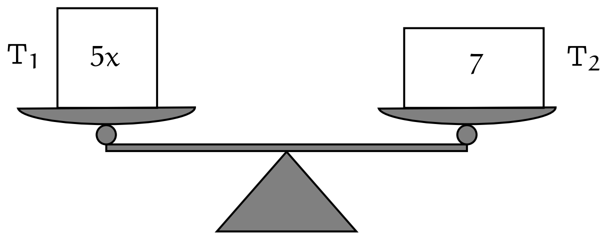
10.1 Begriffe

Wir beginnen mit einer Definition. Natürlich wissen wir, dass eine Gleichung wie eine Waage funktioniert, die man im Gleichgewicht halten muss.

Definition 1. Eine *Gleichung* ist eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme, die mit Hilfe des Gleichheitszeichens ("=") symbolisiert wird. Formal:

$$T_1 = T_2$$

wobei der Term T_1 die linke Seite und der Term T_2 die rechte Seite der Gleichung genannt wird.



Gleichungen können verschiedene Bedeutungen haben. Zum einen können sie "Identitäten" meinen, also wie in $a = a$, die immer wahr sind. Zum anderen können sie eine Bedingung für Variablen darstellen, so dass die richtige Belegung der Variablen die Gleichung wahr macht. Diese Variablen sind die Lösungen der Gleichung. Diser Typ Gleichung nennt sich *Bestimmungsgleichung*. Gleichungen können auch unwahr sein, z.B. $0 = 1$. Wenn sie immer falsch sind, nennt man dies einen Widerspruch.

10.1.1 Äquivalenzumformung

Definition 2. Eine Äquivalenzumformung ist die Umformung einer Gleichung bzw. Ungleichung, die den Wahrheitswert der Aussage unverändert lässt. Zeichen $\Leftrightarrow$.

Anmerkung 10.1. Die Aequivalenzumformung betrifft linke und rechte Seite der Gleichung. Wenn nur eine Seite umgeformt wird, spricht man von *Termumformumg*.

10.2 Beispiel Die Gleichung $x + 5 = 7$ wird mit der Aequivalenzumformung -5, auch mit einem Strich gefolgt von der Operation dargestellt,

$$x + 5 = 7 \qquad | - 5$$

zu $x = 2$. Somit kann man schreiben:

$$(x + 5 = 7) \Leftrightarrow (x = 2).$$

$\lhd$

Eigenschaften 10.3. Aequivalenzumformungen von Gleichungen

- Addiere oder subtrahiere dieselbe reelle Zahl zu oder von beiden Seiten der Gleichung,
- multipliziere oder dividiere beide Seiten der Gleichung mit oder durch dieselbe reelle Zahl (ungleich Null),
- Ersetze beide Seiten durch ihr Reziprokes.
- Wende eineindeutige Funktion an.

10.4 Beispiel

$$a = b \qquad \Leftrightarrow \qquad a + c = b + c \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

Die Variablen a, b etc. vertreten Terme, die etwa so aussehen könnten:

$$8(\frac{1}{2}x - 1) = 2(x - 1) + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad c \cdot \left[8(\frac{1}{2}x - 1)\right] = c \cdot \left[2(x - 1) + 3\right]$$

$$\Leftrightarrow \qquad A + \left[8(\frac{1}{2}x - 1)\right] = A + \left[2(x - 1) + 3\right]$$

$\lhd$

Eigenschaften 10.5. Aequivalenzumformungen von Unleichungen

- Addiere oder subtrahiere dieselbe reelle Zahl zu oder von beiden Seiten der Ungleichung,
- multipliziere oder dividiere beide Seiten der Gleichung mit oder durch dieselbe *positive* reelle Zahl,
- multipliziere oder dividiere beide Seiten der Gleichung mit oder durch dieselbe *negativen* reelle Zahl und ändere die Ordnungsrelation,
- Ersetze beide Seiten durch ihr Reziprokes und ändere die Ordnungsrelation.

10.6 Beispiel

$$a \geqslant b \qquad \Leftrightarrow \qquad a + c \geqslant b + c \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c} \quad \text{mit} \quad c < 0.$$

$\lhd$

Anmerkung 10.7. Wir unterscheiden von der *Aequivalenzumformung* (ÄU), bei der beide Seiten gleichzeitig transformiert werden, die *Termumformung* (TU), bei der nur ein Term auf einer Seite transformiert wird. Man könnte für ÄU schreiben

$$f(x) = g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x) = G(x)$$

und für die Termumformung TU

$$f(x) = g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = G(x).$$

10.1.2 Gewinn- und Verlustumformung

Gewinn- und Verlustumformung sind keine Aequivalenzumformungen.

Definition 3. Eine *Gewinnumformung* ist eine Umformung, bei der Lösungen hinzukommen können. Man nennt diese falschen Lösungen *Scheinlösungen*.

Wichtig 1. ☠ Lösungen nach Gewinnumformungen müssen durch Testen eliminiert werden. Gewinnumformungen sind erlaubt. ⊣

Wie entstehen Scheinlösungen? Hier die zwei verantwortlichen Verfahren.

Gleichung	Ungleichung
1. Erweiterung des Definitionsbereiches der Funktion	1. Erweiterung des Definitionsbereiches
2. Anwenden einer nicht eineindeutigen Funktion (z.B. Quadrieren)	–

10.8 Beispiel Das Quadrieren ist das berühmteste Beispiel. Wenn $x = -2$ ist und wir formen um, indem wir beiderseits das Quadrant nehme, so resultiert $x^2 = 4$. Nun wissen wir, dass $\sqrt{x^2} = \pm 2$ ist. Die $+2$ ist eine Scheinlösung. Anstelle des Aequivalenzpfeils $\Leftrightarrow$ schreibt man nur:

$$(x = -2) \Rightarrow (x^2 = 4) \not\Rightarrow (x = -2)$$

◁

Definition 4. Bei einer *Verlustumformung* gehen Lösungen verloren,

Wichtig 2. Verlustumformungen sind nicht erlaubt. ⊣

Wie kann es zu Verlustumformungen kommen? Hier ein paar Hinweise.

Gleichung	Ungleichung
1. Einschränken des Definitionsbereiches der Funktion	1. Einschränken des Definitionsbereiches
2. Falsches Anwenden von Rechengesetzen	2. Falsches Anwenden von Rechengesetzen
–	3. Das Anwenden einer nicht streng monotonen Funktion

Für Ungleichungen müssen Umformungen mit streng monotonem Verhalten angewendet werden. Streng monoton heisst, entweder steigend, dass $f(x) > f(y)$ wenn $x > y$ oder fallend, wenn $f(x) > f(y)$ wenn $x < y$ gilt. In diesem Fall muss man das Ungleich-Zeichen umdrehen. Die Funktion $f(x) = -x$ ist eine Multiplikation mit (-1). Sie ist streng monoton fallend, das Zeichen muss man umdrehen.

10.2 Lineare Gleichung

Die sogenannte lineare Gleichung ist die einfachste aus einer grossen Familie von Gleichungstypen.

Definition 5. Eine *lineare Gleichung* einer Variablen x kann als

$$a \cdot x = b$$

geschrieben werden, wobei der reelle Koeffizient $a \neq 0$ und a und die reelle Grösse b nicht von x abhängen.

Anmerkung 10.1. Die Form $ax = 0$ nennt man *homogen*.

Anmerkung 10.2. In einer linearen Gleichung ist der Exponent der Variablen x gleich 1.

Anmerkung 10.3. Eine lineare Gleichung mehrerer Variablen, z.B. von x, y und z, hat folgende Form:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_x + a_0 = 0$$

Mit einer Gleichung kann man nicht alle Variablen bestimmen.

10.4 Rezept Die lineare Gleichung wird gelöst, indem man x isoliert:

(1) Bringe alle Terme, die x enthalten auf eine Seite, alle anderen auf die andere Seite.

(2) Bestimme den Koeffizienten von x und dividiere beide Seiten durch ihn.

10.5 Übung Wir lösen nach x in der Gleichung $3x - 6 = 7x + 4$. Wir entschliessen uns, alle Terme mit x nach links und alle anderen Terme nach rechts zu bringen. Gemäss den Regeln für die Aequivalenzumformung dürfen wir auf beiden Seiten addieren und subtrahieren. Wir subtrahieren, so dass auf der rechten Seite die x-Terme verschwinden. Dies gelingt mit $-7x$. Links folgt dann $3x - 6 - 7x = -4x - 6$ und rechts $7x - 7x + 4 = 4$, also

$$3x - 6 = 7x + 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad -4x - 6 = 4$$

Jetzt addieren wir beidseits 6, so dass auf der linken Seite nur noch Terme mit x stehen, also

$$-4x - 6 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad -4x = 10$$

Jetzt haben wir die Form $ax = b$. Wir dividieren beide Seiten durch -4 und erhalten

$$-4x = 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{10}{4}.$$

Falls man nur einen Term umformt, spricht man von Termumformung. Hier könnte man anstatt $-10/4$ auch $-5/2$ oder -2.5 schreiben. $\triangleleft$

10.6 Übung Wir lösen die Gleichung $a(4 - y) = 8y$ nach y auf. Zuerst Termumformung links

$$a(4 - y) = 4a - ay = 8y$$

Dann Aequivalenzumformung mit Addition von ay

$$4a - ay = 8y \qquad \Leftrightarrow \qquad 4a = 8y + ay$$

Termumformung rechts, d.h. y ausklammern

$$4a = 8y + ay \qquad \Leftrightarrow \qquad 4a = y(8+a)$$

Division durch $(8+a)$ beidseits und Seiten vertauschen

$$4a = y(8+a) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{4a}{8+a}$$

◁

10.7 Übung Gesucht ist x aus $\dfrac{3x-1}{2} = x\sqrt{50}+4$. Bruch beseitigen mit ÄU $|\cdot 2$ und Termumformung rechts (ausmultiplizieren)

$$\frac{3x-1}{2} = x\sqrt{50}+4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x-1 = 2(x\sqrt{50}+4) \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x-1 = 2x\sqrt{50}+8$$

Zuerst alle x-Terme nach links mit ÄU $|-2x\sqrt{50}$ und dann ÄU $|+1$

$$3x-1 = 2x\sqrt{50}+8 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x-1-2x\sqrt{50} = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x-2x\sqrt{50} = 8+1$$

Termumformungen beiderseits und Division durch $| \div (3-2\sqrt{50}$:

$$3x-2x\sqrt{50} = 8+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(3-2\sqrt{50}) = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{9}{3-2\sqrt{50}}.$$

◁

10.8 Übung Wir schreiben die Aequivalenzumformung nun einfach neben die Urspungsgleichung. Wir suchen t aus $3-1.7t = \dfrac{t}{4}$.

$$\begin{aligned} 3-1.7t &= \frac{t}{4} && |\cdot 4 \\ 12-6.8t &= t && |+6.8t \\ 12 &= 7.8t && |\div 7.8 \\ t &= \frac{12}{7.8} = 1.539 \end{aligned}$$

Anstatt $\frac{12}{7.8}$ könnte man auch $\frac{120}{78}$ schreiben und kürzen $\frac{120}{78} = \frac{60}{39} = \frac{20}{13}$. ◁

10.9 Übung Gesucht ist x aus

$$\frac{a^2x-b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a} = a$$

Wir notieren, dass $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sein darf. Der Hauptnenner ist ab, mit dem multipliziert wird.

$$\begin{aligned} \frac{a^2x-b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a} &= a && |\cdot ab \\ b(a^2x-b^2) - a(a(b-ax)) + b(b^2) &= a^2b && |TU \\ a^2bx - b^3 - a^2b + a^3x + b^3 &= a^2b && |TU \\ x(a^2b+a^3) - b^3 - a^2b + b^3 &= a^2b && |TU \\ x(a^2b+a^3) - a^2b &= a^2b && |+a^2b \\ x(a^2b+a^3) &= 2a^2b && |\div(a^2b+a^3) \\ x &= \frac{2a^2b}{a^2b+a^3} && |TU \\ x &= \frac{2b}{b+a} \end{aligned}$$

◁

Zu den linearen Gleichungen gibt es auch haufenweise Textaufgaben. Eine Illustration ist die folgende.

10.10 Übung Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 7. Dividiert man die zweite durch die erste, so erhält man 2 Rest 7. Wie heissen die beiden Zahlen? Wir nennen die Zahlen a und b. Aus der ersten Angabe folgt $a : b = 3 : 7$. Das ist äquivalent zu $7a = 3b$. Sodann ist $b/a = 2 + R$ oder korrekt $b = 2a+7$ oder äquivalent $3b = 6a+21$. Anstatt $3b$ setzen wir $7a$ und erhalten $7a = 6a + 21$. Daraus $a = 21$ und damit folgt $b = 49$. Zur Kontrolle $49/21 = 2 + R_7$. ◁

Beliebte Aufgaben zu linearen Gleichungen beinhalten Geschwindigkeits - und Längen-Probleme. Dies erklärt sich aus der physikalischen Formel für die Geschwindigkeit v, der Strecke s und der Zeit t gemäss

$$s = v \cdot t$$

Häufig wird v auch als Durchschnittsgeschwindigkeit bezeichnet.

10.11 Übung Bei einem Skilanglauf startet der spätere Sieger 1.5 Minuten hinter dem Meister des vergangenen Jahres. Nach wieviel Kilometern überholt er diesen, wenn seine Durchschnittsgeschwindigkeit 5 m/s und die des zu Überholenden 4.8 m/s beträgt?
Wenn sie sich treffen, wird der erste Läufer t_1 lang gelaufen sein und der zweite $t_2 = t_1 - 90$ in Sekunden. Die Strecke ist gleich, also $s = v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 = v_2(t_1 - 90)$. Damit gelangen wir zur linearen Gleichung $4.8t = 5(t - 90)$. Umgeformt $(5 - 4.8)t = 450$ und $t = 2250$. Damit ist $s = 2250 \cdot 4.8 = 10800$, also 10.8 Kilometer. ◁

10.12 Übung Die Mutter eines Schülers ist viereinhalbmal so alt wie ihr Sohn. Beide zusammen sind 27 Jahre jünger als der einundsiebzigjährige Grossvater des Schülers. Wie alt sind Mutter und Sohn?
Wir bezeichnen das jeweilige Alter mit S und M. Es gilt $M = 4.5S$ und $S+M = 71-27 = 44$ oder $S + 4.5S = 44$ und $5.5S = 44$. Daraus $S = 44/5.5 = 8$. Der Sohn ist 8 Jahre alt, die Mutter 36 $(= 4.5 \cdot 8)$. ◁

10.13 Übung Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän? Viele Grundschüler sind der Meinung, der Kapitän sei 36 Jahre alt. ◁

10.14 Übung Wir lösen die Gleichung nach y auf: $8y\sqrt{3} + 1 = 7 - \sqrt{12}(5 - y)$. Es ist:

$$\begin{aligned}
8y\sqrt{3} + 1 &= 7 - \sqrt{12}(5 - y) && |\mathrm{TU} \\
8y\sqrt{3} + 1 &= 7 - 5\sqrt{12} + y\sqrt{12} && | - y\sqrt{12} \\
8y\sqrt{3} - y\sqrt{12} + 1 &= 7 - 5\sqrt{12} && | - 1 \\
8y\sqrt{3} - y\sqrt{12} &= 6 - 5\sqrt{12} && |\mathrm{TU} \\
y(8\sqrt{3} - \sqrt{12}) &= 6 - 5\sqrt{12} && | \div (8\sqrt{3} - \sqrt{12}) \\
y &= \frac{6 - 5\sqrt{12}}{8\sqrt{3} - \sqrt{12}}
\end{aligned}$$

◁

10.3 Lineare Ungleichungen

Der Unterschied bei der Umformung von linearen Gleichungen und Ungleichungen besteht im Unterschied der Aequivalenzumformungen, wie sie in den Eigenschaften ?? und 10.5 beschrieben sind. Also in der Umkehrung der Ordnungsrelation, z.B. $\leqslant$ bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl. Da bei der Buchstabenrechnung mit Variablen der

Wert nicht oder noch nicht bekannt ist, muss man eine Fallunterscheidung vornehmen. Fall 1: der Divisor oder Faktor ist positiv, Fall 2: er ist negativ.

Ordnungsrelationen können auch mehr als zwei Terme umfassen, also z.B. $a < x + b \leqslant 4x + 1$. Dann kann die Lösung aus mehreren Intervallen bestehen.

10.1 Übung Es liegt die folgende Ungleichung an: $\frac{7-8x}{2} \geqslant 4x + 1$. Gesucht ist die Lösungsmenge von x.

$$\begin{aligned}
\frac{7-8x}{2} &\geqslant 4x+1 \qquad |\cdot 2\\
7-8x &\geqslant 2(4x+1) \qquad |\mathrm{TU}\\
7-8x &\geqslant 8x+2 \qquad |-7\\
-8x &\geqslant 8x-5 \qquad |-8x\\
-16x &\geqslant -5 \qquad |\cdot(-1)\\
16x &\leqslant 5 \qquad |\div 16\\
x &\leqslant 5/16
\end{aligned}$$

Man beachte die Änderung der Relation. Als Intervall geschrieben: $x \in (-\infty, 5/16]$. $\triangleleft$

10.2 Übung Als nächstes betrachten wir $\frac{3}{4} \leqslant \frac{7-q}{2} < 6$. Die Aquivalenzumformungen betreffen hier 3 Terme und nicht 2 wie bisher. Aber es gibt nur einen Term mit der Unbekannten.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} \leqslant \frac{7-q}{2} &< 6 \qquad |\cdot 2\\
\frac{6}{4} \leqslant 7-q &< 12 \qquad |-7\\
\frac{6}{4} - 7 \leqslant -q &< 5 \qquad |\cdot(-1)\\
7 - \frac{6}{4} \geqslant q &> -5 \qquad |\mathrm{TU}\\
5.5 \geqslant q &> -5
\end{aligned}$$

Die Variable q liegt in $(-5, 5.5]$. $\triangleleft$

10.3 Übung Wir betrachten die Ungleichung $2w - 1 \leqslant 4 - w < 6w + 1$. Die Variable w tritt in allen Termen auf. Es ist also nicht möglich, die Variable zu isolieren. Es ist aber zulässig, die mehrfache Ungleichung in zwei aufzuspalten, und dann die Lösungen zusammen zu führen. Wir betrachten somit $2w - 1 \leqslant 4 - w$ und $4 - w < 6w + 1$.

$$\begin{aligned}
2w-1 &\leqslant 4-w \qquad |+w\\
3w-1 &\leqslant 4 \qquad |+1\\
3w &\leqslant 5 \qquad |\div 3\\
w &\leqslant \frac{5}{3} = 1.66
\end{aligned}$$

Die zweite

$$\begin{aligned} 4 - w &< 6w + 1 \qquad | + w, -1 \\ 4 - 1 &< 7w \qquad | + w, -1 \\ 4 - 1 &< 7w \qquad | \div 7 \\ w &> \frac{3}{7} = 0.429 \end{aligned}$$

Zusammen $\frac{5}{3} \geqslant w > \frac{3}{7}$ oder $w \in (3/7, 5/3]$. $\triangleleft$

10.4 Betrag

Es gibt mehrere Arten von Definitionen des Betrags (oder Absolutbetrags). Die eine ist der Abstand auf der Zahlengerade eines Wertes vom Nullpunkt, die andere eine Fallunterscheidung. Für die Mechanik des Rechnens ist letztere vorzuziehen.

Definition 6. Der *Betrag* einer reellen Zahl x ist gegeben als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geqslant 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Anmerkung 10.1. Der Betrag von x wird auch als Abstand von x auf der Zahlengerade vom Nullpunkt definiert. Der Abstand zweier Zahlen x und c ist dann $|x - c|$.

Wichtig 3. Der Betrag $|x|$ ist nie eine negative Zahl. ⊣

Anmerkung 10.2. Wenn in einer Gleichung $|x|$ gegeben ist, muss man für die Lösung die zwei Fälle x und $-x$ betrachten.

10.3 Übung Wir betrachten den Ausdruck $|7-5|$. Es ist $|7| = 7$ und $|5| = 5$. Aber $|7-5| = |2| = 2$. Das entspricht auch der Distanz von 7 und 5 auf der Zahlengerade. $\triangleleft$

Für Beträge gelten eigene Rechenregeln, die wir hier angeben.

Eigenschaften 10.4. Betragsrechnung Es sind a, b und x reelle Zahlen und n ist eine ganze Zahl.

- Produktregel $|ab| = |a| \cdot |b|$
- Potenzregel $|a^n| = |a|^n$, falls a^n definiert
- Quotientenregel $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, für $b \neq 0$
- Dreiecksungleichung $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

10.4.1 Betragsgleichung

Betragsgleichungen enthalten mindestens einen Term als Betrag. Aus der Definition wissen wir, dass $|x|$ sowohl für x als auch für $-x$ steht. Um x zu finden, muss man deshalb $|x|$ durch $\pm x$ ersetzen. Es entstehen zwei Gleichungen.

10.5 Übung Wir suchen die Lösung, besser die Lösungen, von $|x+3| = 5$. Wir möchten den Betrag los werden und müssen deshalb die zwei Fälle betrachten: Fall 1: $x+3=5$ und Fall 2: $x+3=-5$. Fall 1 birgt die Lösung $x_1 = 2$ und der andere Fall ergibt $x_2 = -8$. Das sind die zwei Lösungen. ◁

Wir notieren uns die Implikationen der Definition für die Gleichungen.

Eigenschaften 10.6. Betragsgleichungen

Es sind x, y und c reelle Zahlen.

- $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- $c > 0$, $|x| = c$ genau dann, wenn $x = c$ oder $x = -c$.
- Für $c < 0$, $|x| = c$ gibt es keine Lösung.
- $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$.

Für die Lösung von Betragsgleichungen kann man folgende Strategie verfolgen

10.7 Rezept Lösen von Betragsgleichungen

(1) Isoliere den Betragsterm, sodass die Form $|x| = c$ entsteht.

(2) Wende die Eigenschaften 10.6 an.

10.8 Übung Wir lösen folgende Gleichung: $\frac{3-|y+5|}{2} = 1$. Wir isolieren den Betragsterm:

$$\begin{aligned} \frac{3-|y+5|}{2} &= 1 && |\cdot 2 \\ 3-|y+5| &= 2 && |-3, \cdot(-1) \\ |y+5| &= 1 && | \end{aligned}$$

Aufspaltung in zwei Gleichungen

$$y+5 = 1 \qquad \text{und} \qquad y+5 = -1$$

Die beiden Lösungen sind $y_1 = -4$ und $y_2 = -6$. ◁

10.9 Übung Es ist gegeben $|3 - x\sqrt[3]{12}| = |4x+1|$. Wir müssen nichts umformen und können direkt die Eigenschaften anwenden, und das heisst hier die zwei Gleichungen formulieren:

$$(3 - x\sqrt[3]{12}) = (4x+1) \qquad \text{und} \qquad (3 - x\sqrt[3]{12}) = -(4x+1)$$

Die Terme mit x nach links, die anderen nach rechts führt zu

$$-4x - x\sqrt[3]{12}) = -2 \qquad \text{und} \qquad 4x - x\sqrt[3]{12}) = -4$$

und weiter über

$$-x(4 + \sqrt[3]{12}) = -2 \qquad \text{und} \qquad x(4 - \sqrt[3]{12}) = -4$$

zu

$$x_1 = \frac{2}{4+\sqrt[3]{12}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-4}{4-\sqrt[3]{12}}$$

◁

10.10 Übung Wir suchen die Lösungen von $|w-1|-3|w+1|=0$. Die Produktregel besagt, dass $3|w+1|=|3||w+1|=|3w+3|$. Damit folgt

$$|w-1|=|3w+3|$$

Daraus die zwei Gleichungen $w-1=3w+3$ und $w-1=-3w-3$. Die Lösungen sind $2w=-4$, also $w_1=-2$ und $4w=-2$ und $w_2=-1/2$. ◁

10.4.2 Betragsungleichung

Angenommen wir treffen auf die Ungleichung $|x|<5$. Mit der alternativen Definition als Abstand vom Nullpunkt der Zahlengerade wird einsichtig, dass alle Punkte gemeint sind, die eine kleinere Distanz als 5 aufweisen. Dies sind die Punkte x für die gilt $-5<x<5$. Für eine Ungleichung $|x|>5$ sind alle Punkte gemeint, die weiter als 5 vom Ursprung entfernt sind. In positiver Richtung $x>5$ und in negativer $x<-5$. Das sind zwei Intervalle $(\infty,-5)$ und $(5,\infty)$. Vereint schreibt man $(\infty,-5)\cup(5,\infty)$.
Verallgemeinernd findet man folgende Eigenschaften.

Eigenschaften 10.11. Betragsungleichungen Mit der reellen Zahl c gilt

- Für $c>0$, $|x|<c$ ist äquivalen zu $-c<x<c$
- Für $c\leqslant 0$, $|x|<c$ hat keine Lösung
- Für $c>0$, $|x|>c$ ist äquivalen zu $x<-c$ oder $x>c$.
- Für $c\leqslant 0$, $|x|>c$ gilt für alle reellen Zahlen x

10.12 Rezept Lösen von Betragsgunleichungen

(1) Isoliere den Betragsterm auf einer Seite der Ungleichung

(2) Wende die Eigenschaften 10.11 an.

10.13 Übung Bestimmen wir doch $\frac{4-2|2x+1|}{4}\geqslant-\sqrt{3}$. Wir betrachten den Ausdruck $|2x+1|$ wie eine Variable, die wir isolieren, also

$$\begin{aligned}
\frac{4-2|2x+1|}{4} &\geqslant -\sqrt{3} && |\cdot 4\\
4-2|2x+1| &\geqslant -4\sqrt{3} && |-4,\div 2\\
-|2x+1| &\geqslant -2\sqrt{3}-2 && |\mathrm{TU}\\
-|2x+1| &\geqslant -2(\sqrt{3}+1) && |\cdot(-1)\\
|2x+1| &\leqslant 2(\sqrt{3}+1)
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die zwei Gleichungen $2x+1\leqslant 2(\sqrt{3}+1)$ und $-(2x+1)\leqslant 2(\sqrt{3}+1)$. Aus der ersten folgt $x\leqslant\sqrt{3}+1-1/2$. Aus der zweiten $2x+1\geqslant-2(\sqrt{3}+1)$ und $x\geqslant-(\sqrt{3}+1)-1/2$. Alles zusammen ergibt $-(\sqrt{3}+3/2)\leqslant x\leqslant\sqrt{3}+1/2$. ◁

10.14 Übung Zuletzt bestimmen wir $|\frac{8-4x}{3}|<e$. Mit der Quotientenregel folgt

$$\left|\frac{8-4x}{3}\right|=\frac{|8-4x|}{|3|}<e$$

Mit $|3| = 3$ und $|8 - 4x| = |4(2 - x)| = 4|2 - x|$ folgt

$$\frac{4}{3}|2 - x| < e \qquad \text{und} \qquad |2 - x| < \frac{3}{4}e$$

Daraus folgen die zwei Ungleichungen

$$2 - x < \frac{3}{4}e \qquad \text{und} \qquad x - 2 < \frac{3}{4}e$$

und weiter

$$x > -(\frac{3}{4}e - 2) \qquad \text{und} \qquad x < \frac{3}{4}e + 2$$

und endlich zusammen

$$-(\frac{3}{4}e - 2) < x < \frac{3}{4}e + 2.$$

◁

Aufgaben

2.15 Bestimme die Unbekannte

(a) $x - 3 = 0$ **(b)** $14 = x + 4$ **(c)** $2x = \frac{2}{5}$ **(d)** $x + 3a = 6a$ **(e)** $ax + c = c$

(f) $\frac{x}{a-b} = 1$ **(g)** $x - 19 = 5x + 23$ **(h)** $3 - 4x = 5 - 2x - 16$ **(i)** $7x - 10 = 15 - (x - 14)$

(j) $(x+1)(x+7) = (x+2)(x+3)$ **(k)** $(3x-2)(2+3x) - [4 - 5(x-1)] \cdot x = 9x^2$

(l) $15(2x+7) = 0$

15 **(a)** Wir addieren beidseits 3 und erhalten $x = 3$.

(b) Wir subtrahieren auf beiden Seiten 4 und erhalten $x = 10$

(c) Division durch 2 ergibt $x = 1/5$.

(d) Subtraktion von $3a$ ergibt $x = 3a$.

(e) Subtraktion von c gibt $ax = 0$. Falls $a \neq 0$ ist, muss $x = 0$ sein.

(f) Multiplikation mit $a - b$ führt zu $x = a - b$.

(g) Die Unbekannte isolieren führt zu $-10 - 23 = 4x$ und $4x = 33$ woraus $x = 33/4$.

(h) Terme mit x nach rechts, Zahlen nach links führt zu $3 - 5 + 16 = -2x - 4x$ oder $14 = 2x$ woraus $x = 7$.

(i) Klammer aufheben: $7x - 10 = 15 - x + 14$. Isolieren: $7x + x = 29 + 10$ oder $8x = 39$ woraus $x = 39/8$.

(j) Ausmultiplizieren gibt $\cancel{x^2} + 7x + x + 7 = \cancel{x^2} + 3x + 2x + 6$, zusammenfassen $8x + 7 = 5x + 6$ oder $3x = -1$ woraus $x = -1/3$.

(k) Ausmultiplizieren $6x+9x^2-4-6x-[4-5x+5] = 9x^2$, x^2 subtrahieren $6x-4-6x-[4-5x+5] = 0$, zusammenfassen $-4-4+5x-5 = 0$ oder $5x - 13 = 0$, $5x = 13$, $x = 13/5$.

(l) Nach dem Nullproduktsatz muss entweder der eine Faktor oder der andere oder beide 0 sein. 15 ist nicht null, deshalb ist $(2x+7) = 0$ und somit $2x = -7$ und $x = -7/2$.

2.16 Ebenso löse die folgenden Gleichungen

(a) $4x = 2x + 0.5$ **(b)** $0.06 = 2x + 0.4$ **(c)** $\frac{x}{5} - 2 = 0.2$ **(d)** $\frac{x}{4} + \frac{-x}{5} + \frac{1}{10} = 0$

(e) $\frac{8x-15}{12} + \frac{3x+18}{15} = 2$ **(f)** $\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{24}$ **(g)** $\frac{2}{x} = \frac{x-3}{3x} - \frac{x+5}{4x}$

(h) $\frac{79}{2(x-3)} - \frac{105}{x} = 0$ **(i)** $3x - 4 = 2 - 4(x-3)$ **(j)** $\sqrt{50}y = \frac{6-\sqrt{8}y}{3}$

(k) $4 - (2x+1) = \frac{x\sqrt{7}}{9}$ **(l)** $\frac{4}{10x-5} = \frac{x-3}{6x^2+x-2}$

16 **(a)** $4x = 2x + 0.5$ umgeformt $(-2x)$ ergibt $2x = 0.5$ geteilt $x = 0.25$.

(b) Minus 0.4 beidseits führt zu $2x = -0.36$ geteilt durch 2: $x = -0.18$.

(c) Mal 5: $x - 10 = 1$, daraus $x = 11$.

(d) Hauptnenner 20, multiplizieren: $5x - 4x + 2 = 0$ und $x + 2 = 0$ daraus $x = -2$.

(e) Nenner sind $12 = 3 \cdot 4$ und $15 = 3 \cdot 5$. Deshalb linken Bruch mit 5 erweitern und rechten mit 4. $\frac{5(8x-15)}{5 \cdot 12} + \frac{4(3x+18)}{4 \cdot 15} = 2$ oder $\frac{40x-75)}{60} + \frac{12x+72)}{60} = 2$ mit 60 multiplizieren $40x - 75 + 12x + 72 = 120$, vereinfacht $52x - 3 = 120$ und $52x = 117$ woraus $x = 117/52$.

(f) Hauptnenner bestimmem zu $24x$, damit multiplizieren $\frac{24x}{3x} - \frac{24x}{4x} = \frac{24x}{24}$ und kürzen $8 - 6 = x$ und somit $x = 2$.

(g) Hauptnenner ist $12x$, damit multiplizieren $\frac{2 \cdot 12x}{x} = \frac{12x(x-3)}{3x} - \frac{12x(x+5)}{4x}$, kürzen $24 = 4(x-3) - 3(x+5)$, ausklammern $24 = 4x - 12 - 3x - 15$ vereinfachen $24 = x - 27$ und $x = -3$.

(h) Hauptnenner $2(x-3)x$. Entweder damit multiplizieren und kürzen oder direkt übers Kreuz multiplizieren (alles in einem Schritt für genau zwei Brüche), also $79 \cdot x - 105 \cdot 2(x-3) = 0$. Vereinfachen $x(79 - 210) + 210 \cdot 3 = 0$ oder $-131x + 630 = 0$ und $131x = 630$ woraus $x = 630/131$.

(i) Ausmultiplizieren führt zu $3x - 4 = 2 - 4x + 12$. Unbekannte isolieren $7x = 18$ woraus $x = 18/7$.

(j) (Wurzeln sind auch nur Zahlen!) Mit 3 multiplizieren $3\sqrt{50}y = 6 - \sqrt{8}y$, y isolieren und ausklammern $3\sqrt{50}y + \sqrt{8}y = 6$ und $y(3\sqrt{50} + \sqrt{8}) = 6$. Durch Vorfaktor von y dividieren $y = \dfrac{6}{3\sqrt{50} + \sqrt{8}}$.

(k) Wir multiplizieren mit 9, um den Bruch zu eliminieren $9 \cdot 4 - 9 \cdot (2x + 1) = x\sqrt{7}$. Ausrechnen $36 - 18x - 9 = x\sqrt{7}$, isolieren der Unbekannten $36 = x\sqrt{7} + 18x = x(\sqrt{7} + 18)$ und somit $x = \dfrac{36}{\sqrt{7} + 18}$.

(l) Es hat genau 2 Brüche, so dass man "übers Kreuz" multiplizieren kann und dann nur die Zähler berücksichtigt. Damit $4(6x^2 + x - 2) = (x - 3)(10x - 5)$, ausmultiplizieren $24x^2 + 4x - 8 = 10x^2 - 5x - 30x + 15$. Gleichartige Terme, d.h. x und x^2, zusammenfassen $14x^2 + 39x - 7 = 0$ Das ist zwar eine vereinfachte Gleichung aber keine lineare. Hier gehts nicht mehr weiter.

2.17 Löse nach x oder y etc. auf

(a) $cx - d = 7d$ **(b)** $rx - f = 2f + x$ **(c)** $qx - x = q^2 - 1$ **(d)** $a(x - b) = 0$

(e) $qx = rx + x + 1$ **(f)** $\dfrac{ax}{m} = am + a$ **(g)** $5x = 3x + \dfrac{4}{a} - \dfrac{2}{b}$ **(h)** $\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{b} = 0$

(i) $\dfrac{a}{1 - y} = \dfrac{b}{1 + y}$ **(j)** $acx/2 + c = bcx/2$ **(k)** $\dfrac{x + b}{x + \dfrac{x}{b}} = 1$

17 **(a)** d addieren: $cx = 8d$, durch c teilen gibt die Lösung $x = \frac{8d}{c}$.

(b) x-Terme auf eine Seite, Variablen auf die andere $rx - x = 2f + f$ oder $x(r - 1) = 3f$. Daraus mit $r - 1$ teilen: $x = \frac{3f}{r-1}$.

(c) x ausklammern $x(q - 1) = q^2 - 1$. Daraus $x = \frac{q^2-1}{q-1}$. Wenn die binomische Formel $(q^2 - 1) = (q - 1)(q + 1)$ bekannt ist, kann man weiter vereinfachen zu $x = q + 1$.

(d) Nullproduktsatz: Faktoren müssen null sein. Also folgt entweder $a = 0$ (wollen wir ausschliessen) und $x - b = 0$ und damit $x = b$.

(e) Alle gleichartigen Terme sammeln: $qx - rx - x = 1$, x ausklammern $x(q - r - 1) = 1$, teilen $x = \dfrac{1}{q - r - 1}$.

(f) Alle Terme enthalten a, durch a teilen: $\dfrac{x}{m} = m + 1$, mit m multiplizieren $x = m^2 + m$, fertig.

(g) Terme in x links sammeln: $5x - 3x = 2x = \frac{4}{a} - \frac{2}{b}$. Durch 2 dividiern $x = \frac{2}{a} - \frac{1}{b}$

(h) Wenn eine Differenz 0 ist, mussen Subtrahend und Minuend gleich sein. D.h. entweder ist $a = b$, dann kann x beliebig sein, oder $a \neq b$, dann gibt es keine Lösung für x.

(i) Hauptnenner $(1 - y)(1 + y)$ multiplizieren und Zähler gleichsetzen $a(1 + y) = b(1 - y)$ ausmultiplizieren $a + ay = b - by$, ordnen $ay + by = b - a$ oder $y(a + b) = b - a$, durch $a + b$ dividieren ergibt $y = \frac{b-a}{a+b}$.

(j) Mit 2 multiplizieren und durch c teilen: $ax + 2 = bx$, x-Terme auf eine Seite $ax - bx = -2$, ausklammern $x(a - b) = -2$, durch $a - b$ teilen $x = -2/(a - b) = 2/(b - a)$.

(k) Term links mit b/b erweitern: $\dfrac{b(x + b)}{b(x + \dfrac{x}{b})} = 1$ und $\dfrac{b(x + b)}{bx + x} = 1$, mit $bx + x$ multiplizieren $b(x + b) = bx + x$, ausklammern $bx + b^2 = bx + x$, bx subtrahieren $b^2 = x$ oder $x = b^2$.

2.18 Löse nach der fettgedruckten Variablen auf

(a) $E = \rho g \boldsymbol{h}$ **(b)** $pv = R\boldsymbol{T}$ **(c)** $E = \boldsymbol{m} \cdot c^2$ **(d)** $K = G\dfrac{m_1 m_2}{\boldsymbol{r^2}}$ **(e)** $T = \dfrac{1}{\boldsymbol{2}} mv^2$

(f) $\pi = \dfrac{\boldsymbol{U}}{2r}$

18 **(a)** $h = \frac{E}{\rho g}$ **(b)** $T = \frac{pv}{R}$ **(c)** $m = \frac{E}{c^2}$ **(d)** $r^2 = G\frac{m_1 m_2}{K}$ **(e)** $2 = \frac{mv^2}{T}$

(f) $U = 2\pi r$

2.19 Eine Bambusstab der Länge 210 cm ist geknickt. Die Spitze des herabhängenden Teils ist 60 cm vom Boden entfernt. An welcher Stelle ist der Knick?

19 Die Stelle sei x (vom Boden gemessen). Es gilt $x + (x - 60) = 210$. Damit $2x = 270$ und $x = 135$. Denn $135 + 75 = 210$.

2.20 Ein Rechteck hat den Umfang von 380 cm. Die Breite ist um 26 cm kürzer als die Länge. Berechne Seiten und Fläche.

20 Es ist $l = b + 26$ und $U = 2l + 2b$. Eingesetzt $U = 2(b + 26) + 2b$ oder $U = 4b + 52$ sowie $380 - 52 = 4b = 328$. Daraus $b = 324/4 = 82$ und $l = 82 + 26 = 108$. Die Fläche ist $82 \cdot 108 = 8856$ cm^2.

2.21 Vier aufeinanderfolgende Zahlen geben zusammen 666. Bestimme sie.

21 Die Zahlen sind x, $x + 1$, $x + 2$ und $x + 3$, zusammen $4x + 6$. Dies solle gleich 666 sein. Also $4x + 6 = 666$ und $4x = 660$ woraus $x = 660/4 = 165$. Also sind es die Zahlen 165, 166, 167 und 168.

2.22 In einem Käfig sind Kaninchen und Hühner. Man zählt 35 Köpfe und 94 Füsse. Wieviele Tiere pro Sorte sind im Käfig?

22 Es ist k die Anzahl Kaninchen und h die Anzahl Hühner. Man kann die Gleichungen aufstellen: $h + k = 35$ und $2h + 4k = 94$. Die erste in die zweite Gleichung eingesetzt: $2(35 - k) + 4k = 94$ oder $70 - 2k + 4k = 94$ und $2k = 24$ woraus $k = 12$ und damit $h = 35 - 12 = 23$.

2.23 Ein Flugzeug legt eine 1250 km lange Strecke in zwei Etappen zurück. Die erste fliegt es mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 675 km/h und die zweite mit 800 km/h. Wie lange sind die einzelnen Strecken, wenn die ganze Strecke in 1h 42 Min durchflogen wird?

23 Die Flugdauer ist insgesamt 1.7 h und setzt sich aus t_1 und $t_2 = 1.7 - t_1$ zusammen. Anderseits ist eine Strecke $s = v \cdot t$ lang. Total gilt $s = 1250 = s_1 + s_2 = v_1 t_1 + v_2(1.7 - t_1)$ und weiter $1250 = 675t_1 + 800(1.7 - t_1)$. (Wir schreiben nur noch t.) Umgeformt $1250 = t(675 - 800) + 1360 = -125t + 1360$. Daraus $125t = 110$ und $t = 0.88$ Stunden. Die andere Flugdauer ist $t_2 = 1.7 - 0.88 = 0.82$. Damit ergeben sich die Strecken zu $s_1 = 0.88 \cdot 675 = 594$ und $s_2 = 0.82 \cdot 800 = 656$.

2.24 Ein Brunnen hat vier Zuflüsse. Der erste braucht einen Tag für die Füllung, der zweite 2, der dritte 3 und der vierte 4. Wie lange brauchen sie zusammen?

24 Die täglichen Mengen sind umgekehrt proportional zur Dauer. Der erste hat einen Füllmenge von einem Brunnen pro Tag, der zweite 1/2 Brunnen pro Tag, der dritten 1/3 Brunnen pro Tag und der vierte 1/4 pro Tag. Zusammen haben sie t in Tage. (t muss zwischen 0 und 1 liegen.) Die Gleichung sieht also so aus: $t(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4) = 1$. Wir machen Zwölftel, also $t(12 + 6 + 4 + 3)/12 = 1$ oder $t(25)/12 = 1$ und $t = 12/25$, also rund einen halben Tag.

2.25 Löse folgende Ungleichungen

(a) $3 - 4x \geqslant 0$ **(b)** $7 - (2 - x) \leqslant x + 3$ **(c)** $\dfrac{5 - 2x}{3} > x$ oder $2x + 5 \geqslant 1$

(d) $6 - 5t > \dfrac{4t}{3} \geqslant t - 2$

25 **(a)** $3 - 4x \geqslant 0$ wird umgeformt zu $3 \geqslant 4x$ und $3/4 \geqslant x$. Somit liegt x im Intervall $(-\infty, 3/4]$.

(b) Wir klammern aus und erhalten $7 - 2 + x \leqslant x + 3$ oder $5 + x \leqslant x + 3$. Es gibt kein x, das die Ungleichung zu einer wahren Aussage macht. Deshalb ist $x \in \varnothing$.

(c) Wir betracheten zuerst die erste Ungleichung, die man umformen kann zu $5 - 2x > 3x$ und weiter zu $5 > 5x$ oder $1 > x$. Die zweite ist auch $2x \geqslant -4$. Zusammen gilt also für x: $x \in [-4, 1)$.

(d) Wir trennen die Bedingung in zwei auf, nachdem wir mit 3 multipliziert haben, d.h. $18 - 15t > 4t$ und $4t \geqslant 3t - 6$. 1) umformen $18 > 19t$ und somit $18/19 > t$. 2) $t \geqslant -6$. Daraus ergibt sich für die Menge t: $\big[-6, 18/19\big)$.

2.26 Löse die Betragsgleichungen

(a) $|x| = 6$ **(b)** $2|5m+1| - 3 = 0$ **(c)** $\dfrac{5-|x|}{2} = 1$ **(d)** $|2-5z| = 5|z+1|$

26 **(a)** Es folgt aus der Definition $x = \pm 6 = \{-6, 6\}$

(b) Es gibt zwei Gleichungen: 1) $2(5m+1) - 3 = 0$ und 2) $-2(5m+1) - 3 = 0$. Die erste ergibt $10m + 2 - 3 = 0$ woraus $m = 1/10$. Die zweite gibt $-10m - 2 - 3 = 0$ oder $10m = -5$ und $m = -0.5$.

(c) Wir multiplizieren mit 2 und erhalten $5 - |x| = 2$. Wieder gibt es zwei Fälle: 1) $5 - x = 2$ und 2) $5 + x = 2$. Die Lösungen sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.

(d) Die zwei Gleichungen sind $(2 - 5z) = 5(z + 1)$ und $(2 - 5z) = -5(z + 1)$. Die erste führt zu $2 - 5z = 5z + 5$ und $10z = -3$ woraus $z = -3/10$. Die andere $2 - 5z = -5z - 5$ hat keine Lösung. Also ist die Lösung $z = -3/10$.

2.27 Löse die Betragsungleichungen

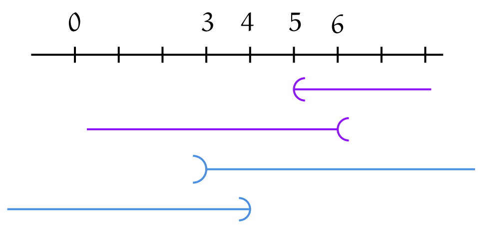
(a) $|3x - 5| \leqslant 4$ **(b)** $|3z + 5| + 2 < 1$ **(c)** $|w - 3| < |3 - w|$ **(d)** $1 < |2w - 9| \leqslant 3$

27 **(a)** Zwei Ungleichungen, d.h. $(3x - 5) \leqslant 4$ und $-(3x - 5) \leqslant 4$. Vereinfacht erscheint $3x \leqslant 9$ und $x \leqslant 3$ einerseits und $-3x + 5 \leqslant 4$ oder $-3x \leqslant -1$. Mit (-1) mal genommen und die Relation umgedreht, folgt $x \geqslant 1/3$. Damit gilt für x: $x \in [1/3, 3]$.

(b) Zwei Ungleichungen: 1) $(3z+5)+2 < 1$ und 2) $-(3z+5)+2 < 1$. Es folgt einerseits $3z+7 < 1$ und $3z < -6$ womit $z < -2$. Anderseits folgt $-3z - 5 + 2 < 1$ und $-3z - 3 < 1$ sowie $-3z < 4$ und $-z < 4/3$ woraus $z > -4/3$. Nun sind $z < -2$ und $z > -4/3$ nicht verträglich, es gibt kein z, das beide Ungleichungen erfüllt. Somit ist die Lösung $z \in \varnothing$.

(c) Wir bemühen die Eigenschaften 10.11: $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$. Daraus folgt, dass die Ungleichung die Form $a < a$ aufweist. Es gibt keine Zahl a, welche diese Bedingung erfüllt. Die Ungleichung hat keine Lösung.

(d) Es gibt zwei Fälle: 1)$1 < 2w - 9 \leqslant 3$ und $1 < -(2w - 9) \leqslant 3$. Die erste Ungleichung lässt sich umformen als $10 < 2w \leqslant 12$ und $5 < w \leqslant 6$. Die zweite $1 < -2w + 9) \leqslant 3$ und $-8 < -2w \leqslant -6$ und $-4 < -w \leqslant -3$ woraus $4 > w \geqslant 3$.



Die Lösungsmenge ist $w \in \big([3,4) \cup (5,6]\big)$.

Kapitel 11

Quadratische Gleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir Gleichungen, die einen quadratische Term aufweisen. Wir wissen, dass man mit Wurzelziehen quadratische Terme wie x^2 auf $\sqrt{x^2} = \pm x$ reduzieren kann. Wir erinnern uns, dass das Wurzelziehen von geraden Potenzen zu zwei Lösungen führt, weshalb man das Symbol $\pm$ eingeführt hat.
In Kapitel ?? haben wir quadratische Ausdrücke faktorisiert, z.B. $2x^2 + 5x - 3 = 0$ auf die Form $(2x - 1)(x + 3) = 0$ gebracht. Weil ein Produkt null ist, wenn jeder Faktor null ist, wissen wir, dass die Lösung dieser Gleichung die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1, -3\}$ aufweist. Anderseits ist auch bekannt, dass die abgewandelte Gleichung $2x^2 + 5x - 4 = 0$ schon nicht mehr durch einfache Zahlen gefunden werden kann. Genau für diese Probleme, benötigen wir Werkzeuge, um die Gleichung zu lösen.
Die allgemeine Form der quadratische Gleichung ist in der folgenden Definition gegeben.

Definition 7. Eine *quadratische Gleichung* ist eine, die als Term ein Polynom vom Grad 2 besitzt, also von der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ ist.

Zu dieser allgemeinen Form der quadratischen Gleichung gibt es auch die sogenannte *Normalform*.

Definition 8. Die Normalform der quadratischen Gleichung lautet

$$x^2 + px + q = 0.$$

Die quadratische Gleichung enthält ein Polynom, dessen Grad um eins höher ist, nämlich 2, als bei der linearen Gleichung, d.h. 1.

11.1 Spezialfälle

11.1.1 Reinquadratische Form $b = 0$

Die reinquadratische Form liegt vor, wenn der lineare Term in x, also bx oder px fehlt. Damit vereinfacht sich die quadratische Gleichung zu ($a \neq 0$):

$$ax^2 + c = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - e = 0.$$

Ist e eine reelle Zahl und gilt $e \geqslant 0$, dann hat die transformierte Gleichung

$$x^2 = e$$

die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{e}$ oder mengenmässig $\mathbb{L} = \{\sqrt{e}, -\sqrt{2}\}$.
Gilt $e \geqslant 0$ nicht, ist also $e < 0$, dann gibt es keine Lösung als reelle Zahl, weil für diese Zahlenmenge $\sqrt{(-a^2)}$ nicht definiert ist. (Wir schreiben hier ein Quadrat, um klar zu machen, das der Radikand $-(a^2)$ eine negative Zahl ist.)
Reinquadratisch ist auch die Form

$$(x-d)^2 - e = 0 \quad \text{oder} \quad (x-d)^2 = e.$$

Hier ergibt sich die Lösung zu:

$$x_{1,2} = d \pm \sqrt{e}.$$

11.1.2 Fehlendes konstantes Glied $c = 0$

Aus der Gleichung

$$ax^2 + bx = 0$$

ergibt sich durch Ausklammern

$$x(ax+b) = 0,$$

d. h. mit dem Produkt-Null-Satz muss $x = 0$ oder $ax + b = 0$ gelten. Die beiden Lösungen lauten also $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

11.2 Quadratische Ergänzung

Die *quadratische Ergänzung* nutzt die Tatsache aus, dass man die Gleichung äquivalent lässt, wenn man einen bestimmten Term addiert und subtrahiert. Zuerst bringen wir die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ in die Normalform, indem wir beide Seiten der Gleichung durch a teilen. Wir erhalten

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Nun addieren und subtrahieren wir eine Variable k

$$x^2 + \frac{b}{a}x {\color{red}+k-k} + \frac{c}{a} = 0$$

Die drei ersten Terme sollen eine Quadrat bilden:

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x {\color{red}+k}}_{(x+m)^2} {\color{red}-k} + c = 0$$

Jetzt wählt man k so, dass die drei ersten Terme der Gleichung ein Quadrat bilden nach dem Muster $(x+m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$. Wenn wir die Koeffizienten der Quadrate vergleichen, folgt:

$$2m = \frac{b}{a} \quad \text{oder} \quad m = \frac{b}{2a} \quad \text{und}$$
$$m^2 = k \quad \text{und somit} \quad k = (\frac{b}{2a})^2.$$

Daraus folgt $m = \frac{b}{2a}$ und $k = (\frac{b}{2a})^2$. Wieder eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned}(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ (x + \frac{b}{2a})^2 &= (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}\end{aligned}$$

Auf der linken Seite steht ein vollständiges Quadrat, auf der rechten Seite kommt die Variable x nicht vor. Nun ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}$$

Jetzt isolieren wir noch x:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}$$

und noch gleichnamig:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Da x wegen der zwei Wurzeln ($\pm$-Zeichen) aus zwei Lösungen besteht, schreibt man auch $x_{1,2}$ für $\{x\} = \{x_1, x_2\}$.

Formel 11.1. Quadratisches Ergänzen

$$x^2 \pm mx = \left(x \pm \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

11.2 Übung Der Ausdruck $x^2 + 3x$ soll ergänzt werden. Nach der Formel muss gelten: $x^2 + 3x = (x + 3/2)^2 - 9/4$. Und $x^2 - 10x$? Einfach

$$x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25.$$

◁

11.3 Übung Wir lösen die Gleichung $3x^2 - 24x + 5 = 0$ durch quadratisches Ergänzen. Im ersten Schritt bringen wir die Gleichung auf Normalform, d.h. der Koeffizient von x^2 wird 1:

$$x^2 - 8x + \frac{5}{3} = 0$$

Da $-8x$ dem Term mx von $(x + m/2)^2$ entsprechen soll, ist $m = -4$ und deshalb $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$. Daraus ergibt sich:

$$(x - 4)^2 - 16 + \frac{5}{3} = 0$$

und weiter:

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 &= 16 - \frac{5}{3} = \frac{48}{3} - \frac{5}{3} \\ &= \frac{43}{3}\end{aligned}$$

Wir ziehen die Wurzeln und bringen die -4 auf die rechte Seite:

$$x = 4 \pm \sqrt{\frac{43}{3}}.$$

Mengenmässig kann man schreiben $\mathbb{L} = \{4 + \sqrt{\frac{43}{3}}, 4 - \sqrt{\frac{43}{3}}\}$. ◁

Im obigen Beispiel haben wir schon eine allgemeine Lösungsformel hergeleitet. Allgemein gilt die als *Mitternachtsformel*[1] bekannte Lösung:

Satz 11.4. Mitternachtsformel: Die Lösung von $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ ist:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kann man in die sogenannte Normalform bringen, indem man die Koeffizienten durch a teilt. Somit entsteht die Formel:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Es gilt also $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$. Die Normalform hat eine einfacheres Aussehen, weil nur zwei Parameter zu erinnern sind.

Satz 11.5. pq-Formel Die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

11.6 Übung Wir bestimmen die Lösungen von $2x^2 + 6x - 3 = 0$ mit der Mitternachtsformel. Wir identifizieren die Koeffizienten $a = 2$, $b = 6$ und $c = -3$. Es folgt

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} - \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 24}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{4} = -1.5 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

◁

11.7 Übung Die Gleichung $3x^2 - 24x + 5 = 0$ soll mit der pq-Formel bestimmt werden. Dazu formen wir um zu $x^2 - 8x + 5/3 = 0$ und identifizieren $p = -6$ und $q = 5/3$. Damit folgt

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 5/3} = 4 \pm \sqrt{16 - 5/3} = 3 \pm \sqrt{\frac{43}{3}}$$

◁

Anmerkung 11.8. Man beachte, dass die Formeln auch für die einfachen Fälle funktionieren, wo man einfacher rechnen kann. Z.B. $x^2 - 3 = 0$ führt zu

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{12}}{2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{2} = \pm\sqrt{3}$$

11.2.1 Scheitelpunktform

Der Name dieser Form wird erst klar, wenn man die entsprechende Kurve aufzeichnet. Mit dem quadratischen Ergänzen haben wir gezeigt, dass man die allgemeine Form $ax^2+bx+c = 0$ überführen kann in die Form $(x - m)^2 = \frac{c}{a} - m^2$. Mit ein paar Umbenennungen nennen wir diese Form die *Scheitelpunktform* der quadratische Gleichung.

Definition 9. Die quadratische Gleichung ist mit $a(x - m)^2 + e = 0$ in der Scheitelpunktform.

[1] Der Name soll daher stammen, dass man, in der Nacht aufgeschreckt, diese Formel richtig wiedergeben kann.

Wir können diese Form durch Ausmultiplizieren wieder in die allgemeine Form bringen mit:

$$\begin{aligned}(x-m)^2+e &= x^2-2mx+m^2+e\\ &= x^2+px+q,\end{aligned}$$

mit $-2m = p$ und $m^2 + e = q$.

11.9 Übung Wir transformieren die Gleichung $2x^2 + 8x + 6 = 0$ in die Scheitelpunktform. Wir schreiben $x^2 + 4x + 3 = 0$ und mit quadratischem Ergänzen $(x + 2)^2 - (2)^2 + 3 = 0$ und $(x + 2)^2 - 1 = 0$. ◁

11.2.2 Diskriminante

Aus den Lösungsformeln folgt eine interessante Feststellung. Man kann ohne Bestimmen der Wurzel (Lösungen) schon bestimmen, wie die Lösungen aussehen. Das Kriterium nennt sich *Diskriminante*.

Definition 10. Bei einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$, heisst der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ *Diskriminante*.

Anmerkung 11.10. Für die pq-Form $x^2 + px + q = 0$ ist die Diskriminante $D' = (\frac{p}{2})^2 - q$.

Die Diskriminante ist Teil der Lösungsformeln für quadratische Gleichungen, nämlich, in rot markiert:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Es gilt folgender Zusammenhang.

Satz 11.11. Diskriminantensatz Bei einer quadratischen Gleichung in Standardform entscheidet die Diskriminante D folgende Fälle:

- falls $D > 0$, gibt es zwei unterschiedliche Lösungen x_1, x_2,
- falls $D = 0$, gibt es eine zweifache reelle Lösung $x_1 = x_2$,
- falls $D < 0$, gibt es keine reelle Lösung.

Anmerkung 11.12. Die Betonung auf reelle Zahlen gibt einen möglichen Hinweis, dass eine weiter verallgemeinerte Zahlenmenge dennoch ein Lösung birgt.

Wichtig 4. Es kann ratsam sein, zuerst abzuklären, wie viele Lösungen es gibt, bevor man sich in die Rechnung stürzt. ⊣

11.13 Übung Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$? Die Diskriminante ist $D = 1 + 4 > 0$. Sie hat zwei verschiedene reelle Lösungen. ◁

11.14 Übung Und die Gleichung $x^2 + 1 = 0$? Es ist $D = -4$. Die Gleichung hat keine reelle Lösung. ◁

Wenn die Diskriminante eine ganze Zahl ist, dann kann man erwarten, dass eine einfache Faktorzerlegung gibt. Denn bei zwei Lösungen der quadratischen Gleichung gilt die Darstellung des Polynoms als Produkt von Linearfaktoren. Nehmen wir eine Gleichung wie $6x^2 - x - 40 = 0$ so ist $D = 1 + 960 = 961 = 31^2$. Die Wurzeln sind $x = \frac{1}{12}(1 \pm 31)$ oder $x_1 = \frac{1}{12}32 = \frac{8}{3}$ und $x_2 = -\frac{1}{12}30 = -\frac{5}{2}$. Damit kann man schreiben $(x - 8/3)(x + 5/2) = 0$ und $(3x - 8)(2x + 5) = 0$.

11.3 Faktorisierung

Eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ kann faktorisiert werden, genauer das Polynom der linken Seite, falls sie zwei reelle Nullstellen besitzt. Es gilt

Satz 11.1. Ein Polynom zweiten Grades kann in folgender Weise in ein Produkt von zwei Linearfaktoren aufgespalten werden:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

falls x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind.

Anmerkung 11.2. Es kann aber sein, dass die quadratische Gleichung keine reellen Lösungen hat. Dann funktioniert die Aufspaltung nicht. Z.B. kann $x^2 + x1 + 1$ nicht faktorisiert werden, weil es keine reellen Lösungen von $x^2 + x + 1 = 0$ gibt.

11.3 Übung Das Polynom $x^2 + 6x - 7$, wenn mit 0 gleichgesetzt, hat die Lösungen $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9+7} = -3 \pm 4 = \{-7, 1\}$. Anderseits kann das Polynom faktorisiert werden als $(x+7)(x-1) = x^2 - x + 7x - 7 = x^2 + 6x - 7$. Wir bestätigen, dass der Satz funktionert. $\triangleleft$

Wir erinnern uns an den Satz von Vieta, der lautet

Satz 11.4. Satz von Vieta Sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, resp. $x^2 + px + q = 0$ so gilt

$$q = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \qquad \text{und} \qquad p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$$

Der Satz von Vieta kann nützlich sein, einfache Lösungen systematisch zu “erraten”. Bei einem quadratischer Ausdruck wie $x^2 - 4x - 21$ muss man den konstanten Term 21 in Faktoren zerlegen, hier also $1 \cdot 21$ oder $3 \cdot 7$. Die Summe oder Differenz also 19 und 22 oder 4 und 10 ergänzen die Betrachtung. Koeffizientenvergleich ergibt $-3 \cdot 7 = -21$ und $-7 + 3 = -4$. Somit ist die Faktorisierung $(x - 7)(x + 3)$.

11.5 Übung Das Polynom $x^2 - 7x + 10$ fordert $x_1 \cdot x_2 = 10$. Für ganze Zahlen ergibt eine Primzahlzerlegung von 10 die Teiler 5 und 2. Anderseits soll $x_1 + x_2 = 7$ sein. Also folgen die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 2$ und die Darstellung $(x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10$. $\triangleleft$

11.4 Lösung der quadratischen Gleichung

11.1 Rezept Lösen von quadratischen Gleichungen

- Falls die gesuchte Variable nur im quadratischen Term erscheint, isoliere diesen und radiziere,
- andernfalls, bringe alles auf eine Seite, so dass die andere Null ist,
  - nimm die pq-Formel, wenn der Koeffizient von x^2 1 ist, oder
  - sonst die Mitternachtsformel, oder
  - ergänze quadratisch und forme um oder
  - suche die zwei Linearfaktoren (Vieta).

11.2 Übung Wir wenden das Rezept auf die Gleichung $3x^2 - 5x - 2$ an: Es ist kommt nicht nur ein quadratischer Term vor, also haben wir 4 Möglichkeiten.

(1) Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \{-1/3, 2\}$$

(2) pq-Formel mit $p = -5/3$ und $q = -2/3$:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{6}\right)^2 - (-2/3)} \\ &= \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{24}{36}} \\ &= \frac{5}{6} \pm \frac{7}{6} = \{-1/3, 2\} \end{aligned}$$

(3) Quadratisches Ergänzen:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x - 2 &= 3(x - 5/6)^2 - 3 \cdot 25/36 - 2 = 0 \\ 3(x - 5/6)^2 &= 2 + 3 \cdot 25/36 = \frac{24 + 25}{12} \\ (x - 5/6)^2 &= \frac{24 + 25}{36} = \frac{49}{36} \\ x - 5/6 &= \pm\sqrt{\frac{49}{36}} = \pm\frac{7}{6} \\ x &= \frac{5}{6} \pm \frac{7}{6} \\ x_{1,2} &= \{-1/3, 2\} \end{aligned}$$

(4) Linearfaktoren suchen:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x - 2 &= (3x + a)(x + b) = 3x^2 + 3bx + ax + ab = 3x^2 + x(3b + a) + ab \\ &= (3x + 1)(x - 2) \\ &= 3(x + 1/3)(x - 2) \\ x_{1,2} &= \{-1/3, 2\} \end{aligned}$$

Denn Faktorzerlegung von $ab = -2$ ist genau $-1 \cdot 2$.

◁

11.3 Übung Wir lösen die Gleichung $3 - (2x - 1)^2 = 0$. Es liegt schon ein Quadrat vor, wir müssen nur umstellen und erhalten $(2x - 1)^2 = 3$. Nun radizieren wir und gelangen zu

$$2x - 1 = \pm\sqrt{3} \qquad | + 1, \div 2$$

und somit

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}).$$

◁

11.4 Übung Wir wagen uns an die Gleichung $5x - x(x-3) = 7$ heran. Auf der linken Seite müssen wir noch ausklammern und erhalten $5x - x^2 + 3x = 7$ oder $-x^2 + 8x - 7 = 0$ oder auch $x^2 - 8x + 7 = 0$. Der erste Koeffizient ist eins, damit bietet sich die pq-Formel an. Somit

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 7} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 7} = 4 \pm 3 = \{1, 7\}.$$

Damit ist die Gleichung gelöst. Man hätte aus $x^2 - 8x + 7 = 0$ sehen können, dass $x = 1$ eine Lösung ist, denn $1 - 8 + 7 = 0$. Mit der Linearfaktorzerlegung muss $x^2 - 8x + 7 = 0 = (x-1)(x-x_2)$ sein, und $x_2 = 7$. Die wenigen haben diese Intuition. Die Formel funktioniert immer. ◁

11.5 Übung Nun kommt $5(25 - 21x) = \frac{59}{4} - 25x^2$ dran. Wir spulen dies nach Rezept ab, d.h. zuerst mit Term- und Aequvalenzumformungen auf Normalform bringen, dann die Formel (oder das quadratische Ergänzen) anwenden.

$$\begin{aligned} 5(25-21x) &= \frac{59}{4} - 25x^2 && |\cdot 4 \\ 20(25-21x) &= 59 - 100x^2 && |TU \\ 500 - 420x &= 59 - 100x^2 && |+420x, -500 \\ 0 &= -500 + 59 + 420x - 100x^2 && |TU \\ 0 &= -441 + 420x - 100x^2 && |TU \end{aligned}$$

Wir nehmen die Mitternachtsformel und setzen ein und transformieren zur Vereinfachung

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-420) \pm \sqrt{(-420)^2 - 4(100)(441)}}{2(100)} \\ &= \frac{420 \pm \sqrt{176400 - 176400}}{200} \\ &= \frac{420 \pm \sqrt{0}}{200} \\ &= \frac{420}{200} = \frac{-42}{20} = \frac{21}{10} \end{aligned}$$

◁

11.6 Übung Gesucht werden die Wurzeln von $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$. Hier muss man mit grösseren Zahlen leben lernen. Wir multiplizieren aus:

$$\begin{aligned} (43+10x)^2 + (66+10x)^2 &= (79+14x)^2 \\ 1849 + 860x + 100x^2 + 4356 + 1320x + 100x^2 &= 6241 + 2212x + 196x^2 \\ 1849 + 860x + 100x^2 + 4356 + 1320x + 100x^2 - 6241 - 2212x - 196x^2 &= 0 \\ (1849 + 4356 - 6241) + x(860 + 1320 - 2212) + x^2(100 + 100 - 196) &= 0 \\ -36 + x(-32) + x^2(4) &= 0 \\ x^2 - 8x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der pq-Formel folgt

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 + 9} = 4 \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 = \{9, -1\}$$

◁

11.5 Unechte Quadrate

Eine unechte quadratisch Gleichung hat die Form:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Es gibt also genau drei Terme und die eine Hochzahl (Exponent) ist genau das Doppelte der anderen, also n und $2n$.
Wir können eine vorübergehende Namensänderung vornehmen, z.B. anstatt x^n setzen wir w. Also sieht die transformierte Gleichung wie folgt aus:

$$aw^2 + bw + c = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Damit sind wir aber noch nicht am Ziel. Jetzt müssen wir die Transformation rückgängig machen. Also $x^n = w_{1,2}$.

11.1 Übung Wir versuchen, folgende Gleichung zu lösen: $3x^6 - 2x^3 - 1 = 0$. Wir setzen $u = x^2$ und erhalten die transformierte Gleichung $3u^2 - 2u - 1 = 0$. Durch 3 geteilt und quadratisch ergänzt folgt $(u - 1/3)^2 - 1/9 - 1 = 0$ und $u - 1/3 = \pm\sqrt{10/9}$ sowie $u_{1,2} = 1/3 \pm \sqrt{10/9}$. Nun sind wir, mit der Rücktransformation, mit den zwei Fällen $x^2 = 1/3 + \sqrt{10/9}$ und $x^2 = 1/3 - \sqrt{10/9}$. Diese zweite Gleichung hat für x keine reelle Lösung, weil der Term auf der rechten Seite negativ ist. Die erste Gleichung liefert $x = \pm\sqrt{1/3 + \sqrt{10/9}}$. ◁

11.6 Betragsgleichungen

Es kann durchaus sein, dass in einer Betragsgleichung ein Quadrate einer Unbekannten auftritt. Ein solches Beispiel ist $|x^2 - 3x| = 2$. Wie wir uns vom vorangehenden Kapitel noch erinnern, entstehen zwei Gleichungen, wenn man den Betrag eliminiert. Hier also

$$x^2 - 3x = 2 \qquad \text{und} \qquad x^2 - 3x = -2$$

Mit quadratischem Ergänzen auf den linken Seiten folgt

$$(x - 3/2)^2 - 9/4 = 2 \qquad \text{und} \qquad (x - 3/2)^2 - 9/4 = -2$$

oder

$$(x - 3/2)^2 = \frac{17}{4} \qquad \text{und} \qquad (x - 3/2)^2 = \frac{1}{4}$$

Wir radizieren und bringen den Term 3/2 auf die rechte Seite

$$x = 3/2 \pm \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \qquad \text{und} \qquad x = 3/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \{1, 2\}$$

Es gibt also 4 Lösungen der Gleichung. Das war nicht besonders spektakulär.

Aufgaben

0.1 Schreibe als ergänztes Quadrat

(a) x^2+2x **(b)** t^2-t **(c)** $3x^2-2x$ **(d)** $q-2q^2$ **(e)** $x^4+x^2/3$

1 **(a)** $(x+1)^2-1$ **(b)** $(t-1/2)^2-1/4$ **(c)** $3(x-1/3)^2-1/3$ **(d)** $-2(q-1/4)^2+1/8$ **(e)** $(x^2+1/3)^2-1/9$

0.2 Schreibe als Scheitelpunktform

(a) $x^2+x+1=0$ **(b)** $3x^2-1=0$ **(c)** $2x^2+3=3x-5$

2 **(a)** Mit quadratischem Ergänzen $x^2+x+1=0$, $(x-1/2)^2-1/4+1=0$ und $(x-1/2)^2+3/4=0$
(b) $3(x-0)^2-1=0$
(c) $2x^2-3x+8=0$, $2(x-3/4)-9/8+8=0$ und $2(x-3/4)^2+55/8=0$

0.3 Löse

(a) $4-(5t+3)^2=3$ **(b)** $3(y^2-3)^2-2=10$ **(c)** $x^2+x-1=0$ **(d)** $3w^2=2-w$
(e) $y(y+4)=1$ **(f)** $\frac{z}{2}=4z^2-1$ **(g)** $0.1v^2+0.2v=0.3$ **(h)** $x^2=x-1$
(i) $3-t=2(t+1)^2$ **(j)** $(x-3)^2=x^2+9$ **(k)** $(3y-1)(2y+1)=5y$ **(l)** $w^4+3w^2-1=0$
(m) $2x^4+x^2=3$ **(n)** $(2-y)^4=3(2-y)^2+1$

3 **(a)** Umformen zu $1=(5t+3)^2$, radizieren $5t+3=\pm 1$, $5t=-3\pm 1$ so dass $t_{1,2}=\{-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\}$
(b) Umformen zu $3(y^2-3)^2=12$, $(y^2-3)^2=4$, radizieren $y^2-3=\pm 2$, $y^2=3\pm 2$, daraus die Wurzel $y_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{3\pm 2}$, $y_{1,2,3,4}=\{\pm 1,\pm\sqrt{5}\}$
(c) Mit pq-Formel $x^2+x-1=0$, $x_{1,2}=-1/2\pm\sqrt{1/4+1}$ und damit $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
(d) Z.B. Faktorisieren: $(3w-2)(w+1)=0$, damit $w_{1,2}=\{-1,\frac{2}{3}\}$
(e) Ausmultiplizieren $y(y+4)-1=0=y^2+4y-1$, quadratisch ergänzen $(y+2)^2-4=1$, $y+2=\pm\sqrt{5}$ und $y=-2\pm\sqrt{5}$
(f) Mit 2 multiplizieren und umformen: $z=8z^2-2$, $8z^2-z-2=0$, Mitternachtsformel $z=\frac{1\pm\sqrt{1+64}}{16}$ und $z=\frac{1\pm\sqrt{65}}{16}$
(g) Mit 10 multiplizieren: $v^2+2v=3$, quadratisch ergänzen $(v+1)^2-1=3$, $v+1=\pm 2$, $v_{1,2}=-1\pm 2$ oder $v_{1,2}=\{-3,1\}$
(h) Umschreiben: $x^2-1+1=0$, Diskriminante $D=1-3<0$, keine reelle Lösung (der Term ist irreduzibel).
(i) Umformen $3-t=2(t^2+2t+1)=2t^2+4t+2$, $2t^2+5t-1=0$, Mitternachtsformel $t=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$
(j) Ausklammern $x^2-6x+9=x^2+9$, damit $6x=0$ und $x=0$
(k) Ausmultiplizieren $(3y-1)(2y+1)=5y=6y^2+3y-2y-1$, oder $0=6y^2-4y-1$, Mitternachtsformel $y=\frac{2\pm\sqrt{10}}{6}$
(l) pq-Formel: $w^4+3w^2-1=0$, $w^2=-3/2\pm\sqrt{9/4+1}=-3/2\pm\sqrt{13}/2$, nur eine Lösung >0, also $w^2=-3/2+\sqrt{13}/2$, radizieren $w=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}$
(m) Faktorisieren $2x^4+x^2=3$ als $(2x^2+3)(x^2-1)$, also $x^2=\{-3/2,1\}$, nur $x^2=1$ zulässig, damit $x=\pm 1$
(n) Substitution $u=(2-y)^2$, damit $u^2=3u+1$, u^2-3u-1, pq-Formel $u=-3/2\pm\sqrt{9/4+1}$, gültige Lösung $u=-3/2+\sqrt{13}/2$, rückeinsetzen $(2-y)^2=-3/2+\sqrt{13}/2$, $2-y=\pm\sqrt{-3/2+\sqrt{13}/2}$ und $y=\frac{4\pm\sqrt{6+2\sqrt{13}}}{2}$

0.4 Gleichungen mit Parametern, faktorisiere und finde die Lösungen

(a) $x^2+2x-ux-2u=0$ (b) $x^2-ux-u=1$ (c) $x^2-ux+u=x$

4 (a) $x^2+2x-u(x+2)=x(x+2)-u(x+2)=(x+2)(x-u)=0$, Nullproduktsatz $x+2=0$, $x_1=-2$ und $x-u=0$, $x_2=u$

(b) $x^2-ux-u-1=0$, $(x^2-1)-u(x+1)=(x+1)(x-1)-u(x+1)=(x+1)(x-1-u)=0$, damit $x_1=-1$ und $x_2=u+1$

(c) $x^2-ux+u-x=x^2-x-u(x-1)=x(x-1)-u(x-1)=(x-1)(x-u)=0$, damit $x_1=1$ und $x_2=u$

0.5 Finde die reellen Lösungen folgender Gleichungen

(a) $|x^2-3x|=2$ (b) $|2x-x^2|=|2x-1|$ (c) $|x^2-x+3|=|4-x^2|$

5 (a) Zwei Gleichungen: [1] $x^2-3x=2$ mit $(x-3/2)^2-9/4=2$, $x-3/2=\pm\sqrt{17}/2$ und $x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{17}/2$ und [2] $x^2-3x=-2$, $(x-3/2)^2-9/4=-2$, $x-3/2=\pm 1/2$, $x_{3,4}=3/2\pm 1/2=\{2,1\}$

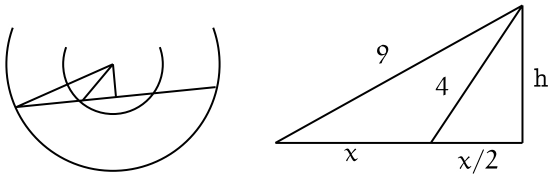
(b) [1] $2x-x^2=2x-1$, $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$, [2] $2x-x^2=-2x+1$, $x^2-4x+1=0$, $(x-2)^2-4+1=0$, $x-2=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$

(c) [1] $x^2-x+3=4-x^2$, $2x^2-x=1$, $2(x-1/4)^2-1/8=1$, $x-1/4=\pm\sqrt{9/16}$, $x_{1,2}=1/4\pm 3/4=\{1,-1/2\}$, [2] $x^2-x+3=-4+x^2$, $x_3=7$

0.6 Ein Baum von 20 Fuss Länge bricht 8 Fuss über der Wurzel ab. Wieweit ist die Spitze vom Stamm entfernt?

6 Typisches Problem für Pythagoras: rechtwinkliges Dreieck mit Seiten $c=20-8=12$, $a=8$, gesucht b: $b^2=c^2-a^2=12^2-8^2=144-64=80$, $b=\sqrt{80}\approx 8.94$.

0.7 Es liegen zwei konzentrische Kreis vor, mit Radien 4 und 9 cm. Es wird in den grösseren Kreis eine Sehne gelegt, die vom kleineren Kreis in drei gleichlange Stücke geschnitten wird. Berechne deren Länge.



7

Aus der Figur geht hervor, dass für das grosse Dreieck gilt $((3/2)x)^2+h^2=9^2$ und $h^2=4^2-(x/2)^2$, zusammen $9/4x^2+[16-x^2/4]=81$ und $2x^2=81-16=65$ sowie $x^2=32.5$ oder $x=\sqrt{32.5}\approx 5.7$

0.8 Die Summe der positiven Quadratwurzeln aus zwei Zahlen, von denen die eine um genauso viel die Zahl 40 übertrifft als die zweite von 40 übertroffen wird, ist 12.

8 Wir nennen die zwei Zahlen a und b. Es gilt $a=40+x$ und $b=40-x$, zudem $a+b=80$. Die Gleichung ist $\sqrt{a}+\sqrt{b}=12$. Quadrieren $a+b+2\sqrt{ab}=144$ und $\sqrt{ab}=32$, damit $ab=1024$ oder $(40-x)(40+x)=40^2-x^2=1024$ womit $1600-1024=x^2=576$ und $x=24$. Damit sind die gesuchten Zahlen 64 und 16.

0.9 Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, von denen die zweite um 2 grösser ist als die erste. Wenn man die Zahl mit ihrer Quersumme multipliziert, so erhält man 52.

9 Wir schreiben die Zahl als ab mit $b=a+2$, Quersumme $a+b=2a+2$. Gleichung $(10a+b)2(a+1)=52$ oder $(10a+2+a)(a+1)=26=(11a+2)(a+1)=11a^2+11a+2a+2=26$ oder $11a^2+13a-24=0$. Mitternachtsformel $a=\dfrac{-13\pm\sqrt{169+44\cdot 24}}{22}=\dfrac{-13\pm 35}{22}=1$, negative Zahl nicht brauchbar. Damit $b=3$. Die Zahl ist 13.

0.10 Wenn du zu dem Quadrat einer Zahl 10 Wurzeln dieses Quadrats addierst, so erhältst du 39. Welche Zahl ist es?

10 Die Gleichung lautet $x^2+10x=39$, umgeformt und faktorzerlegt $(x+13)(x-3)=0$ mit den zwei Lösungen $x_{1,2}=\{-13,3\}$. Nur 3 ist sinnvoll. Kontrolle $9+10\cdot 3=39$.

Kapitel 12

Polynomgleichungen

12.1 Begriffe

Wir beginnen mit der Festlegung von Begriffen.

Definition 11. Ein *Polynom* ist eine Summe von Termen, die reelle Zahlen oder reelle Zahlen multipliziert mit Potenzen natürlicher Zahlen von Variablen sind. Bsp.

$$a_1 + a_2x^2 + a_3xy^3 + a_4xy^mz^n2 + \dots$$

Anmerkung 12.1. Im Folgenden beschränken wir uns vor allem auf Polynome einer Variablen. Weitere Variablen würden als Parameter, als momentan fixe Grösssen betrachtet. Damit ist die typische Polynomgleichung von der Form

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1x + a_0 = 0$$

Man nennt dies Form von Ausdruck eine *algebraische Gleichung*.

Im weiteren gilt folgender Sprachgebrauch:

Definition 12. Spezielle Polynome

- Ein *Monom* besteht aus einem Term, ein *Binom* enthält zwei Terme, ein *Trinom* deren drei.
- Der *Grad eines Polynoms* ist der höchste Exponent der Terme.
- Die reellen Faktoren der Terme heissen *Koeffiziente*, ein Term ohne Variablen heisst Konstante.
- *Gleichartige Terme* sollen solche sein, die abgesehen von den Koeffizienten gleich sind.

Anmerkung 12.2. Dadurch, dass wir natürliche Zahlen als Exponenten verlangen, fallen hier Terme wie $3\sqrt{x}$ nicht in Betracht.

Wie bei den linearen und quadratischen Gleichungen sind Aequivalenzumformungen die Basis für das Rechnen. Die Division ist dabei die schwierigste Operation und beansprucht grössere Aufmerksamekeit.

12.2 Grundoperationen

12.2.1 Addition, Subtraktion und Multiplikation

Die Addition und Subtraktion sind analog zu diesen Operationen für Variablen. Auch hier gilt, dass man nur *gleichartige* Terme verrechnen kann. Ein Subtraktion $3x^2y - 2x^2y$ ist gleich zu behandeln wie $3a - 2a$. Das Resultat ist x^2y, respektive a. Die Multiplikation ist analog, d.h. $2a \cdot 3b = 6ab$ wie $3x^2y \cdot 2z^3 = 6x^2yz^3$. Aufgrund des Vertauschungsgesetztes kann man das Resultat in mehrere Formen bringen, etwa $6z^3x^2y$ etc. Koeffiziente schreibt man am Anfang des Terms.

12.1 Übung Wir betrachten das folgende Polynom: $17x^2y - 3xy^2 + 7xy^2$. Um eine Subtraktion oder Addition ausführen zu können, müssen wir zuerst feststellen, ob gleichartige Polynome vorhanden sind. Wir erkenne xy^2, das im zweiten und dritten Term vorhanden ist. Diese zwei kann man verrechnen. $-(3xy^2) + 7xy^2$ ergibt $4xy^2$.

$$17x^2y - 3xy^2 + 7xy^2 = 17x^2y + 4xy^2$$

Damit stoppt die Rechnung, denn es sind keine weiteren gleichartigen Terme vorhanden. Obwohl x^2y und xy^2 beide x und y enthalten, sind sie nicht gleichartig. Denn die Exponenten sind nicht gleich. ◁

12.2 Übung Wir vereinfachen den Ausdruck $\left(3x^2 - 2x + 1\right) - (7x - 3)$.

$$\begin{aligned}
\left(3x^2 - 2x + 1\right) - (7x - 3) &= 3x^2 - 2x + 1 - 7x + 3 && \text{Ausklammern} \\
&= 3x^2 - 2x - 7x + 1 + 3 && \text{Sortieren} \\
&= 3x^2 - 9x + 4 && \text{Zusammenfassen}
\end{aligned}$$

Das ist unsere Antwort: $3x^2 - 9x + 4$. ◁

Bei der Kombination von Multiplikation und Addition oder Subtraktion kommen die Unterschiede der Stufe wieder zum Tragen, d.h. “Punkt vor Strich” oder Klammern. Das regelt das Verteilungsgesetz. Wir führen uns eine typische Multiplikation zweier Summe vor Augen

$$(a + b + c) \cdot (d + e).$$

Für Polynome verallgemeinert lautet es:

Satz 12.3. (Verteilungsgesetz) Ein Ausdruck mit n Termen wird mit einem Ausdruck von m Termen multipliziert, indem zuerst jeder der n Terme des ersten Ausdrucks mit jedem der m Terme des zweiten multipliziert wird und dann die $n \cdot m$ Produkte summiert werden.

Bildlich dargestellt:

$$(a + b)(c + d) = \overset{1}{ac} + \overset{2}{ad} + \overset{3}{bc} + \overset{4}{bd}$$

Nach diesem Gesetz wird unser Ausdruck oben transformiert zu:

$$(a+b+c)\cdot(d+e) = ad + ae + bd + be + cd + ce.$$

Aus 3 und 2 Summanden werden also $3 \cdot 2 = 6$ Summanden. In diesem Beispiel hat es keine gleichartigen Terme, sodass man keine Terme zusammenfassen kann.

12.4 Übung Wir betrachten die Multiplikation von $(a+b)\cdot(a+b)$. Nach obiger Regel erhält man im ersten Schritt $aa+ab+ba+bb$. Wegen der Vertauschbarkeit ist ab und ba dasselbe. Deshalb folgt

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + n^2.$$

Die Multiplikation von $(a+b)(a-b)$ ergibt die Terme aa, $-ab$, ba und $-bb$. Zwei Terme sind gleichartig, obzwar mit verschiedenem Vorzeichen. Diese zweit Terme heben sich auf, d.h. $(-ab) + ba = 0$. Somit gilt:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Das ist ein wichtiges Resultat. $\triangleleft$

12.5 Übung Wir betrachten die Multiplikation $(x-a)(x-b)$. Wir multiplizieren und addieren und bekommen das Resultat $x^2 - ax - bx + ab$ oder

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab.$$

Man beachte die zwei Terme $a+b$ und ab. Man könnte sich das umgekehrte Vorgehen denken: ausgehend von einem Ausdruck $x^2 + px + q$ eine Darstellung als $(x-a)(x-b)$ zu finden. a und b würden dann der Vorschrift $-(a+b) = p$ und $ab = q$ folgen müssen. Ein Zahlenbeispiel: $x^2 - 6x - 7$. Wir müssen a und b erraten, wobei $a+b = 6$ und $ab = -7$. Für ganzzahlige Variablen kann die Primzahl 7 nur aus $1 \cdot 7$ entstehen. Somit $ab = a(-7)$. Damit würde $a - 7 = 6$ oder $a = -1$. Testen wir die Vermutung, indem wir ausrechnen $(x+1)(x-7) = x^2 - x - 7x - 7$. $\triangleleft$

Satz 12.6. Satz von Vieta Es sind p und q die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und x_1 und x_2 deren Lösungen (Wurzeln). Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

12.7 Beispiel Für die quadratische Gleichung $x^2 - 11x + 10$ muss also $x_1 + x_2 = 11$ und $x_1 + x_2 = 10$ sein. Die offensichtliche Lösung heisst $x_1 = 10$ und $x_2 = 1$. $\triangleleft$

Aus den vorherigen Beispielen haben wir die merkenswerten Formeln gefunden:

Wichtig 5.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(I)}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(II)}$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \qquad \text{(III)}$$

$\dashv$

Etwas weniger wichtig, dennoch bemerkenswert sind die Darstellung von Summen von Kuben und Quarten. Man rechne selber nach:

$$
\begin{aligned}
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\
a^4 - b^4 &= (a-b)(a+b)(a^2+b^2)\\
a^4 + b^4 &= (a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)
\end{aligned}
$$

12.8 Beispiel Es wurde jemand gefragt, ob die Zahl 3599 eine Primzahl sei. Nun gilt $3599 = 3600-1$ und deshalb auch $60^2-1 = 60^2-1^2$. Mit der dritten binomischen Formel können wir auch schreiben $60^2-1^2 = (60+1)(60-1)$ und damit folgt $3599 = 61 \cdot 59$. Da sie aus zwei weiteren Faktoren ausser 1 und sich selbst besteht, ist sie keine Primzahl. $\triangleleft$

12.9 Beispiel Nun betrachten wir einen weitere Ausdruck, den wir vereinfachen wollen, nämlich

$$\left(3y-\sqrt[3]{2}\right)\left(9y^2+3\sqrt[3]{2}y+\sqrt[3]{4}\right).$$

Wir sehen zwei komplizierte Terme. Es ist immer möglich, Terme vorübergehend umzubenennen, vor allem mit einfacheren Namen. Damit verringert man das Risiko, unterwegs flüchtige Schreibfehler zu begehen. Somit nennen wir $A = \sqrt[3]{2}$ und $B = \sqrt[3]{4}$. Später setzen wir wieder ein. Damit

$$
\begin{aligned}
(3y-A)\left(9y^2+3Ay+B\right) &= 3y\left(9y^2\right)+3y\,(3Ay)+3y\,(B)\\
&\quad -A\left(9y^2\right)-A\,(3Ay)-AB\\
&= 27y^3+9y^2A+3yB-9y^2A-3yB-AB\\
&= 27y^3-AB\\
&= 27y^3-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}\\
&= 27y^3-\sqrt[3]{8}\\
&= 27y^3-2
\end{aligned}
$$

Es gibt keine gleichartigen Terme mehr, deshalb sind wir fertig. $\triangleleft$

Und noch ein Beispiel.

12.10 Beispiel Vereinfache $\left[2(x+h)-(x+h)^2\right]-\left(2x-x^2\right)$.

$$
\begin{aligned}
\left[2(x+h)-(x+h)^2\right]-\left(2x-x^2\right) &= \left[2(x+h)-(x+h)^2\right]-2x+x^2\\
&= \left[2(x+h)-\left(x^2+2xh+h^2\right)\right]-2x+x^2\\
&= \left[2x+2h-x^2-2xh-h^2\right]-2x+x^2\\
&= 2x+2h-x^2-2xh-h^2-2x+x^2\\
&= 2x-2x+2h-x^2+x^2-2xh-h^2\\
&= 2h-2xh-h^2
\end{aligned}
$$

Es gibt keine gleichartige Terme mehr, deshalb sind wir fertig. $\triangleleft$

12.2.2 Polynom-Division

Wie man Polynome multiplizieren kann, kann man Polynome auch dividieren. Es macht vor allem Sinn, Polynome von höherem Grad durch solche von niedrigerem Grad zu dividieren. Denn sonst hat man keine Möglichkeit, eine Polynom als Resultat zu bekommen. Es folgt ja ein Bruch. Zur Illustration denke man an $a^7 \div a^5 = a^2$ und $a^2 \div a^5 = \frac{1}{a^3}$.

Die Division mit Variablen wird analog der Division von ganzen Zahlen ausgeführt. Man erinnere, wie man z.B. $6519 \div 52$ ausgeführt hat:

$$\begin{array}{rcccl}
6519 & \div & 52 & = & 125 + \frac{19}{52} \\
-52\downarrow & & & & \\
\hline
131 & & & & \\
-104\downarrow & & & & \\
\hline
279 & & & & \\
260 & & & & \\
\hline
19 & & & &
\end{array}$$

Wie haben wir gerechnet? Zuerst haben wir beim Divisor so viele Stellen von links betrachtet, bis die Zahl grösser als der Teiler ist, also 65. Dann haben wir diese Zahl dividiert und 1 bekommen mit Rest. Jetzt haben wir rückwärts gerechnet, also 1 mal 52 und diese Zahl von 63 subtrahiert mit dem Resultat 13. Dann haben wir die nächste zahl vom Divident "heruntergenommen" und aus der 13 dann 131 gemacht. Dann haben wir durch 52 geteilt, das gibt 2 mal mit Rest 27. Dazu haben wir die letzte Zahl "herunternehmen" und 279 gebildet. Die Division durch 52 gibt 5 mit Rest $\frac{19}{52}$.

Mit Polyomen rechnet sich analog. Wir gehen davon aus, dass der Dividend nach abnehmenden Potenzen geordnet ist. Zudem unterstellen wir, dass der höchste Exponent des Dividenden höher ist als der höchste des Divisors (oder gleich). Nehmen wir das Beispiel:

$$(5x^2 - 3x + 1) \div (x - 1) = ?$$

Wir teilen den am weitesten links stehende Term des Dividenen mit dem Term des Divisors, der die Variable enthält, also $(5x^2) \div x$ und erhalten $5x$. Jetzt multiplizieren wir den Divisor mit $5x$ und zählen diesen Term vom Dividenden ab. Damit bleibt $5x^2 - 3x - (5x^2 - 5x)$ übrig, also $2x$. Jetzt holen wir die $+1$ runter und haben $(2x + 1) \div (x - 1)$. Wir bekommen 2 mit Rest. Es bleibt $2x + 1 - (2x - 2) = 3$. Damit der Rest $\frac{3}{x-1}$. Schematisch:

$$\begin{array}{rl}
\big(\quad 5x^2 - 3x + 1\big) : \big(x - 1\big) & = 5x + 2 + \dfrac{3}{x-1} \\
-\,5x^2 + 5x \qquad & \\
\hline
2x + 1 & \\
-\,2x + 2 & \\
\hline
3 &
\end{array}$$

12.11 Übung Als weiteres Beispiel nehme wir $(x^3 - 1) \div (x - 1)$. Nach schematischer Rechnung ergibt sich

$$
\begin{array}{l}
\bigl(x^3 \qquad\quad -1\bigr) : \bigl(x-1\bigr) = x^2+x+1 \\
\underline{-x^3+x^2} \\
\qquad x^2 \\
\quad \underline{-x^2+x} \\
\qquad\qquad x-1 \\
\qquad\quad \underline{-x+1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

In diesem Beispiel geht die Division auf, d.h. es gibt keinen Rest. Auch hier kann man den Dividenden in Faktoren zerlegen. Denn hier gilt:

$$x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

Diese Formel kann man sich auch merken, oder zumindest erinnern. ◁

12.12 Beispiel Man rechne die folgende Division nach:

$$
\begin{array}{l}
\bigl(2x^3 \; -x^2+10x+8\bigr) : \bigl(2x^2-3x\bigr) = x+1+\dfrac{13x+8}{2x^2-3x} \\
\underline{-2x^3+3x^2} \\
\qquad\quad 2x^2+10x \\
\quad\;\; \underline{-2x^2\;\;+3x} \\
\qquad\qquad\quad 13x+8
\end{array}
$$

Die Division besitzt einen Restterm. ◁

Wir haben jetzt mehrfach folgenden Satz bestätigt.

Satz 12.13. Polynomdivision: Es sind $D(x)$ und $P(x)$ reelle Polynome, wobei der Grad von P grösser oder gleich dem Grad von D ist. Es gibt zwei eindeutige Polynome, $Q(x)$ und $R(x)$, so dass

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

gilt, wobei entweder $R(x) = 0$ oder der Grad von R kleiner als der Grad von D ist.

Anmerkung 12.14. Im Kern sagt der Satz, dass man auch Polynome nach

$$\text{Dividend} = \text{Divisor} \cdot \text{Quotient} + \text{Rest}$$

darstellen kann. Mit dem vorangegangenen Beispiel heisst das:

$$\underbrace{2x^3 - x^2 + 10x + 8}_{P(x)} = \underbrace{(2x^2-3x)}_{D(x)}\underbrace{(x+1)}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{13x+8}{2x^2-3x}}_{R(x)}.$$

Satz 12.15. Nullstellensatz Hat ein Polynom $P(x)$ eine Nullstelle c, so ist es ohne Rest durch $(x-c)$ teilbar, das heisst, es gilt

$$P(x) = Q(x)(x-c)$$

mit einem Polynom $Q(x)$, dessen Grad um eins kleiner ist als der von $P(x)$.

Satz 12.16. Polynom-Rest-Satz P ist eine Polynom von mindestens Grad 1 und c ist eine reelle Zahl. Wenn $P(x)$ durch $(x - c)$ geteilt wird, dann ist der Rest $R = P(c)$.

Dieser Satz enthält den folgenden Satz, der wiederum wichtige Implikationen hat. Für c Nullstelle gilt im Speziellen:

Satz 12.17. Korollar von Fubini Ein Polynom $P(x)$ ist durch $(x - c)$ teilbar, genau dann, wenn der Rest Null ist, $P(c) = 0$.

Anmerkung 12.18. Der Term $(x^k - a^k)$ für $k > 0$ ist immer durch $(x - a)$ restlos teilbar, denn für $x = a$ ist $P(a) = a^k - a^k = 0$. Also $x^3 - 5^3$ ist durch $(x - 5)$ restlos teilbar.

$$
\begin{array}{l}
\big(x^3 \qquad\qquad\quad - 125\big) : \big(x - 5\big) = x^2 + 5x + 25 \\
\underline{-x^3 + 5x^2} \\
\qquad 5x^2 \\
\quad \underline{-5x^2 + 25x} \\
\qquad\qquad 25x - 125 \\
\qquad\quad \underline{-25x + 125} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes vom Rest. Man kann folgendes einsehen, kurz gesagt: wenn Faktor, dann Nullstelle und wenn Nullstelle, dann Faktor. Falls $(x - c)$ ein Faktor von $P(x)$ ist, gilt $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$. Deshalb $P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0$, dann stimmt die Behauptung c ist Nullstelle von P. Anderseits, falls c Nullstelle von P, dann $P(c) = 0$. Dann stellt der Satz vom Rest fest, dass der Rest 0 ist, wenn $P(x)$ durch $(x - c)$ dividiert wird. Das heisst, $(x - c)$ ist ein Faktor von P. Das ist ein wichtiger Zusammenhang.
Hierzu noch eine Namensgebung:

Definition 13. Ein *Linearfaktor* eines Polynoms $P(x)$ ist ein Polynom vom Grad 1, d.h. $(ax + b)$, das ein echter Teiler von $P(x)$ ist.

Aus dem Nullstellensatz folgt der folgende:

Satz 12.19. Ein Polynom $P(x)$ vom Grad $n \geqslant 1$ hat höchstens n einfache oder mehrfache reelle Nullstellen.

Denn jede Division mit einem Linearfaktor $(x - c)$, wobei c Nullstelle ist, den Grad von $P(x)$ um eins verringert. Es kann also höchstens n geben.

Eigenschaften 12.20. Polynomnullstelle Für eine Polynom $P(x)$ vom Grad $n \geqslant 1$ und der reellen Nullstelle c gelten folgende Aequivalenzen:

- $P(c) = 0$,
- $x = c$ ist Lösung der Polynomgleichung $P(x) = 0$,
- $(x - c)$ ist ein Linearfaktor von $P(x)$,
- Der Punkt $(c, 0)$ ist Schnittpunkt des Graphen $y = P(x)$ mit der x-Achse.

12.3 Faktorisierung

Die Faktorisierung ist eine Lösungsmethode einer Polynomgleichung $p(x) = 0$, wenn sie als $p(x) = d_1(x) \cdot d_2(x) \cdot \ldots \cdot d_n(x) = 0$ darstellbar ist. Denn der Nullproduktsatz verlangt, dass jeder Faktor, hier Polynome, $d_i(x) = 0$ ist.

12.3.1 Teiler und Vielfache von Polynomen

Es ist unser Ziel, gewisse nicht-linearen Gleichungen zu lösen. Dazu versuchen wir Polynome in Faktoren zu zerlegen. Faktoren sind ja Bestandteile der Multiplikation. Wir versuchen also, die Multiplikation rückgängig zu machen. Diese Umkehrung ist bekanntlich die Division. Wir erinnern die Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, wo man eben die Primzahlen als die Faktoren betrachtete. Beispielsweise:

$$3465 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \quad \text{oder} \quad 3599 = 59 \cdot 61.$$

Bei Polynomen muss man sich auch festlegen, wonach man die Zerlegung ausführt. Dafür führt man den Begriff *unzerlegbarer* oder *irreduzibler* Polynome ein.

Definition 14. Ein Polynome ist *unzerlegbar* oder *irreduzibel*, falls es nicht als Produkt von Polynomen tieferen Grades geschrieben werden kann.

Anmerkung 12.1. Irreduzible Polynome sind analog zu Primzahlen, die man in der Faktorzerlegung von Zahlen nicht mehr weiter zerlegen kann.

Wichtig 6. ☠ Die Polynome vom Grad 1 sind allesamt irreduzibel. Ein Polynom vom Grad 2 ist genau dann irreduzibel, wenn es keine reelle Nullstelle besitzt (also Diskriminaten $D < 0$). Alle anderen Polynome sind reduzibel, zerlegbar. ⊣

Anmerkung 12.2. Während z.B. die Faktorisierung von $x^2 - 4$ einfach zu $(x-2) \cdot (x+2)$ führt, könnte man $x^2 - 2$ mit $(x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$ zerlegen. Wir wollen aber hier nur Koeffizienten der rationalen Zahlen betrachten. Das heisst, den Term $(x^2 - 2)$ lassen wir in dieser Buch so als unzerlegbar in der Menge $\mathbb{Q}$ stehen.

Der erste Schritt zur Lösung von Polynomgleichungen ist, die gegebene Gleichung zu vereinfachen, falls dies möglich ist. Dazu gehört, alle Terme auf eine Seite zu bringen, so dass $p(x) = 0$ entsteht. Sodann sind die Terme zusammenzufassen und gemeinsame Koeffizienten zu kürzen und allfällige Nenner zu beseitigen.

12.3 Übung Wir betrachten $-\frac{3}{5}z^3 = 6z^2$. Wir machen also Term- und Aequivalenzumformungen mit dem Ziel $p(x) = 0$. Also

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{5}z^3 &= 6z^2 && | - 6z^2 \\
-\frac{3}{5}z^3 - 6z^2 &= 0 && | \cdot (-1) \\
\frac{3}{5}z^3 + 6z^2 &= 0 && | \cdot 5 \\
3z^3 + 30z^2 &= 0 && | \div 3 \\
z^3 + 10z^2 &= 0 && |\mathrm{TU} \\
z^2(z+10) &= 0
\end{aligned}$$

Es ist $z = 0$ eine (zweifache) Nullstelle und $x = -10$ eine weitere. Das sind die Lösungen. ◁

12.4 Übung Es ist $x^4a - xa^4 = 0$ gegeben. Wir können umformen, indem wir ausklammern ax. Es folgt $ax(x^3 - a^3) = 0$. Nun wissen wir, dass $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$. Damit vereinfacht sich die Gleichung zu $x(x-a)(x^2 + ax + a^2) = 0$. Wir haben drei irreduzible Faktoren. Die Lösungen sind $x = 0$, $x = a$ und die zwei Lösungen, die sich aus der pq-Formel für Quadrate ergeben. $\triangleleft$

Anmerkung 12.5. In Allgemeinen ist $a^2 - ab + b^2$ und $a^2 + ab + b^2$ irreduzibel im Rahmen der rationalen Zahlen.

12.6 Rezept Für quadratische Polynome kann man anstatt der zwei Formeln (Mitternachts- und pq-Formel) auch den Ansatz versuchen:

$$Ax^2 + Bx + C = (ax + b)(cx + d)$$

mit $ac = A$, $bd = C$ und $B = ad + bc$.

12.7 Übung Als nächstes schauen wir uns die Gleichung $2x^3 - 10x^2 + 3x - 15 = 0$ an. Es gibt kein Rezept für alle Fälle. Man ist leider auf Intuition und Experimentierfreude angewiesen. Hier bringt die nicht augenfällige Klammerung die Lösung, wenn man schreibt

$$\begin{aligned} 2x^3 - 10x^2 + 3x - 15 &= 0 \\ 2x^2(x-5) + 3(x-5) &= 0 \\ (x-5)(2x^2+3) &= 0 \end{aligned}$$

Mit der einzigen reellen Lösungen $x_1 = 5$, denn $2x^2 + 3 = 0$ hat keine Lösung, ist irreduzibel. Ein anderer Versuche wäre das Erraten einer ersten Lösung. Hier würde man $x = 5$ probieren. Da es klappt, könnte man dann die Division $P(x)/(x-5)$ ausführen. $\triangleleft$

Wichtig 7. Es gibt kein allgemeines (einfaches) Lösungsverfahren für Polynomgleichungen 3. oder höheren Grades. Deshalb ist viel Üben von speziellen Fällen angesagt. $\dashv$

12.4 Faktorisieren als Lösung

12.4.1 Grundlagen

Satz 12.1. (**Nullproduktsatz**) Falls a und b reelle Grössen sind mit $ab = 0$, dann ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$ oder beide.

Satz 12.13 besagt, dass für einen Teil von Polynomen eine Darstellung als Produkt von Polynomen tieferen Grades möglich ist. Für diese gilt mit dem Nullproduktesatz, dass die Lösungen der Polynomgleichung die Lösungen der Faktoren sind. Mit der Faktorzerlegung der Polynome ist ein wesentlicher Schritt in die Richtung der Lösung getan.

12.2 Übung Wir betrachten das Produkt $(x-5)(2x+3) = 0$ und wissen aus dem Satz, dass $(x-5) = 0$ und $(2x+3) = 0$ als Lösungen gelten müssen. Somit also $x_1 = 5$ und $x_2 = -3/2$. $\triangleleft$

12.3 Übung Wir nehme die Gleichung $6x^2 + 11x - 10 = 0$. Wir haben weiter oben bereits die Lösungen mit der Mitternachtsformel bestimmt, nämlich $-5/2$ und $2/3$. Damit folgt $6x^2 + 11x - 10 = 6(x+5/2)(x-2/3) = (2x+5)(3x-2)$. Hätten wir zuerst die Faktorisierung gefunden, dann hätten wir die Lösungen bestimmt durch Nullsetzen der Faktoren, also $2x + 5 = 0$ und $3x - 2 = 0$. $\triangleleft$

Wir fassen die Lösungsstrategie zusammen

12.4 Rezept Nichtlineare Gleichungen

(1) Bringe alle Terme auf die eine Seite, sodass die andere 0 wird.

(2) Faktorisiere

(3) Wende den Nullproduktsatz für reelle Zahlen an und setzte jeden Faktor Null.

(4) löse alle Faktorgleichungen.

Das schwierige ist natürlich das Faktorisieren.

12.5 Übung Wir lösen $(y-1)^2 = 2(y-1)$. Alles auf eine Seite $(y-1)^2 - 2(y-1) = 0$. Ausklammern

$$(y-1)^2 - 2(y-1) = (y-1)(y-1-2) = (y-1)(y-3)$$

Damit sind die Nullstellen oder Wurzeln oder Lösungen bekannt, nämlich $y_1 = 1$ und $y_2 = 3$. Einsetzen bestätig die Richtigkeit sofort. ◁

12.6 Übung Es ist die Lösung der folgenden Gleichung gesucht:

$$\frac{w^4}{3} = \frac{8w^3-12}{12} - \frac{w^2-4}{4}$$

Wir formen um, bis wir eine faktorisierte Form haben

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{3} &= \frac{8x^3-12}{12} - \frac{x^2-4}{4} && | \cdot 12 \\ 4x^4 &= 8x^3 - 12 - 3(x^2-4) && | -4x^4 \\ 0 &= 8x^3 - 12 - 3(x^2-4) - 4x^4 && |TU \\ 0 &= 8x^3 - 12 - 3x^2 + 12 - 4x^4 && |TU \\ 0 &= x^2(8x - 3 - 4x^2) \end{aligned}$$

Der erste Faktor ist $x^2 = 0$ mit der Doppellösung $x = 0$. Die weiteren ergeben sich mit der Mitternachtsformel, da es sich um eine quadratische Gleichung handelt. Also

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-4)(-3)}}{2(-4)} = 1 \pm \sqrt{16}/8 = 1 \pm 1/2 = \{3/2, 1/2\}$$

◁

12.7 Übung Wir sollen folgendes lösen $18x^3 + 9x^2 - 50x - 25 = 0$. Der erste Versuch ist $x = 1$ zu testen. Es haut aber nicht hin. Wir erkennen die ähnlichen Zahlen 18 und 9 sowie 50 und 25. Eine Gruppierung $9(x^3 + x^2) - 25(x+1)$ kann weiter umgeformt werden als $9x^2(x+1) - 25(x+1)$ und weiter $(x+1)(9x^2-25) = 0$. Daraus folgt $x = -1$ und $x = \pm 5/3$. Glück gehabt!
Ein anderer Versuch, den wir weiter unten andeuten, betrachtet die Faktoren des Koeffizienten mit den Faktoren des fixen Terms, also $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ und $25 = 5 \cdot 5$. Die Quotienten können Lösungen bilden, also $\pm 5/2$, $\pm 5/3$. Und tatsächlich findet sich auch $5/3$ darunter. ◁

12.8 Übung $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ steht an. Wir substituieren $u = x^2$ und erreichen damit $u^2 - 8u - 9 = 0$. Wir könnten die pq-Formel benutzen. Aber wir können uns auch nochmals den Satz von Vieta in Erinnerung rufen oder einfach raten, dass $(u+1)(u-9) = 0$ gelten muss. Ausmultiplizieren bestätigt die Vermutung. Also ist $u = \{-1, 9\}$. Rücksubstituiert folgt $x_{1,2} = \pm 3$, und dass $x^2 = -1$ keine Lösung hat. ◁

12.4.2 Hornerschema

Weil $x - c$ Teiler eines Polynoms ist, ist es nützlich, eine schnelle Methode zum Nachrechnen zu haben. Das schematische Rechnen vermindert den Rechenaufwand massiv. Dieses Schema geht vom Polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ aus. Wir setzen $n = 5$, um die Übersicht zu wahren, also $a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Diesen Ausdruck schreiben wir um, indem wir jeweils das x abspalten. Wir erhalten:

$$(((((a_5)x + a_4)x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

Wenn man nun von links nach rechts rechnet, findet man abwechslungsweise die Multiplikation mit x, dann die Addition der Koeffizienten usw.
Diese Rechnung kann man schematisieren; deshalb der Name Schema von Horner.

12.9 Rezept Hornerschema

- Wir schreiben auf einer Zeile die geordneten Koeffizienten des Polynoms samt fixem Term. Für fehlende Terme schreibt man 0.
- links davon macht man einen vertikalen Strich und schreibt links davon die (vermutete) Wurzel des Polynoms
- die zweite Zeile lässt man leer und macht einen horizontalen Strich
- Man holt den ersten Koeffizienten auf die 3. Zeile hinunter
  - Dann multipliziert man diesen Wert mit der Wurzel und schreibt das Resultat auf die 2. Zeile um eins nach rechts gerückt
  - dann bildet man die Summe von 1. und 2. Zeile und schreibt diese Zahl auf die 3. Zeile
  - dann wiederholt man dieses Prozeder bis man an den rechten Rand gelangt ist.

Ausgangslage ist das Polynom $x^3 + 4x^2 - 5x - 14$ mit vermuteter Nullstelle 2. Für diesen x-Wert rechnen wir das Polynom aus und erfahren, ob es durch $x - 2$ teilbar ist.
Wir schreiben die Koeffizienten des Polynoms in absteigender Folge der Grade des Exponenten. Hier also 3, 4,-5 und -14. Nach der zweiten Zeile machen wir einen horizontale Strich, links einen vertikalen und schreiben die Wurzel links hin. Dann ziehen wir den Leitkoeffizienten herunter.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & & & & \\ \cline{2-5} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \cline{2-5} & 1 & & & \end{array}$$

Als nächstes multiplizieren wir den Wert auf der dritten Zeile mit der Wurzel, $1 \cdot 2$, schreiben das Resultat auf die zweite Zeile um eine Stelle nach rechts gerückt. Dann addieren wir die Ziffern der zweiten Kolonne, $4 + 2$ und schreiben das Resultat 6 auf die dritte Zeile. Dieses Prozedere wiederholen wir, bis wir rechts fertig sind.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & \downarrow & 2 & & \\ \cline{2-5} & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & \downarrow & 2 & & \\ \cline{2-5} & 1 & 6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & \downarrow & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & 6 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & \downarrow & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & 6 & 7 & \end{array}$$

Schliesslich multiplizieren wir die 7 mit der Wurzel ($= 14$), schreiben 14 auf die zweite Zeile und summieren die letzte Kolonne; es gibt Null.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & \downarrow & 2 & 12 & 14 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -5 & -14 \\ 2 & \downarrow & 2 & 12 & 14 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & \boxed{0} \end{array}$$

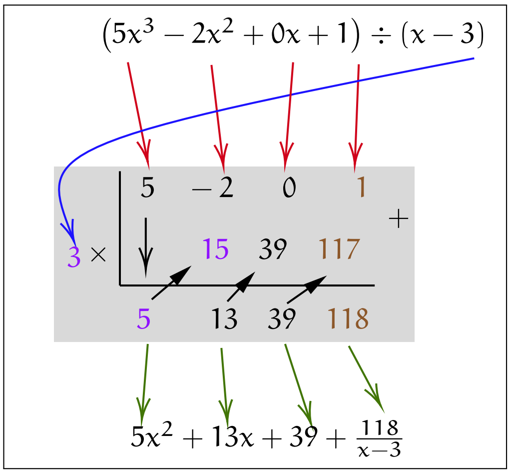
Die dritte Zeile enthält die Koeffizienten des Quotienten, eines Polynoms mit dem um 1 verringerten Grad plus dem Rest. Im Beispiel sind die Koeffizienten 5, 13, 30 und der Rest 0. Somit ergab die schematische Rechnung

$$\underbrace{(x^3 + 4x^2 - 5x - 14)}_{1.Zeile} \div (x-2) = \underbrace{1x^2 + 6x + 7}_{3.Zeile}$$

12.10 Übung Wir rechnen die Division der Gleichung $\left(5x^3 - 2x^2 + 1\right) \div (x-3)$ mit dem Hornerschema. Dazu Schreiben wir die Zahlen 5, -2, 0, 1 und die Wurzel 3 links. Die erste Zahl ist der Leitkoeffizient 5, dann folgt $-2+15 = 13$, $13 \cdot 3 = 39$, $0+39 = 39$ und $39 \cdot 3 = 117$ sowie schliesslich $1 + 117 = 118$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & \downarrow & 15 & 39 & 117 \\ \hline & 5 & 13 & 39 & \boxed{118} \end{array}$$

Der Restterm 118 bedeutet dann den Rest von $118/(x-3)$. $\triangleleft$



12.11 Übung Wir wollen $4 - 8x - 12x^2$ durch $2x - 3$ dividieren. Das Schema funktioniert aber nur für Divisoren der Form $x - a$. Deshalb müssen wir die Gleichung durch 2 kürzen, also $(-6x^2 - 4x + 2) \div (x - 3/2)$. Damit folgt

$$\begin{array}{c|ccc} & -6 & -4 & 2 \\ \frac{3}{2} & \downarrow & -9 & -\frac{39}{2} \\ \hline & -6 & -13 & \boxed{-\frac{35}{2}} \end{array}$$

Die Division ergibt das Polynom mit Rest: $-6x - 13 - \frac{35}{2x-3}$. $\triangleleft$

12.12 Übung Wir wollen zeigen, dass man das Schema auch mehrfach hinteinander schalten kann, wenn man mehrere Wurzeln kennt. Dazu betrachten wird $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x - 3$ mit der doppelten Wurzel $x = 1/2$. Das Schema besteht aus der Aneinanderreihung von zwei Einzelschemata.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 4 & -4 & -11 & 12 & -3 \\
\frac{1}{2} & \downarrow & 2 & -1 & -6 & 3 \\
\hline
 & 4 & -2 & -12 & 6 & \boxed{0} \\
\frac{1}{2} & \downarrow & 2 & 0 & -6 & \\
\hline
 & 4 & 0 & -12 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Aus dem Schema kann man $P(x) \div (x - 1/2)$ und $P(x) \div (x - 1/2)^2$ herauslesen. Es sind dies $4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$ (3. Zeile) und $4x^2 - 12$ (5. Zeile). $\lhd$

12.5 Nullstellen bei ganzzahligen Koeffizienten**

Das Hornerschema liefert eine relativ schnelle Methode, um Nullstellen eines Polynoms zu testen. Die Frage ist aber auch, wie kommt man zu guten vermuteten Nullstellen. Dazu gibt es mehrere Verfahren, die aber nicht hinreichend sind. Das heisst, es gibt eine Auswahl, von der möglicherweise Kandidaten stammen.
Wir beschränken uns hier auf ein Verfahren für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Man kann durch Erweitern auch Brüche als Koeffizienten zulassen. Es gilt der Satz der *rationalen Nullstellen*, hier auch Lemma von Gauss genannt.

Satz 12.1. Lemma von Gauss Es ist $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \geqslant 1$ und *ganzzahligen* Koeffizienten a_0, a_1, $\ldots a_n$. Wenn r eine *rationale* Nullstelle von P ist, dann hat r die Form $\pm\frac{p}{q}$, wobei p ein Faktor vom Absolutterm a_0 und q ein Faktor des Leitkoeffizienten a_n ist.

Dieser Satz liefert einen Vorrat an möglichen Zählern und Nennern, die man dann ausprobieren muss. Je mehr Faktoren die zwei Zahlen haben, desto mehr Möglichkeiten. Es ist natürlich möglich, dass das Polynom gar keine rationalen Nullstellen besitzt.
Die Begründung dieses Satzes ist recht einfach. Gemäss Voraussetzung soll die Nullstelle rational sein, also die Form p/q aufweisen. Wir wissen, dass $P(c) = 0$ ist für Nullstellen c, also auch $P(\frac{p}{q}) = 0$ ist. Zudem haben p und q keine gemeinsamen Faktoren, der Bruch ist also gekürzt. Wir können das Polynom schreiben als

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Mit q^n multipliziert folgt

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

oder anders

$$a_n p^n = -a_{n-1} p^{n-1} q - \ldots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n$$

Die rechte Seite besitzt den Faktor q in allen Termen. Deshalb muss q in a_n stecken, denn p^n enthält q nicht. Ebenso muss der letzte Term auf der rechten Seite, $a_0 q^n$, p als Faktor besitzen und da dieser nicht in q^n sein kann, muss er Teiler von a_0 sein.

12.2 Übung Wir probieren diese Forderung an der Polynomgleichung $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - x^2 - 6x - 3$ aus. Wir müssen also 2 faktorisieren, $1 \cdot 2$ und 3 als $1 \cdot 3$. Die möglichen Wurzeln sind somit $\{\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{3}{2}\}$. Das sind 8 Möglichkeiten. Wir beginnen mit $x = 1$ und bekommen $6 - 10$, was nicht richtig ist. Aber mit $x = -1$ haben wir Glück! $\triangleleft$

Wichtig 8. Die 1 ist immer ein Kandidat, weil die 1 immer Teiler beider Koeffizienten ist. Die ± 1 bei Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten zu probieren ist also vernünftig. $\dashv$

Es gibt Schranken für reelle Lösungen, die sich aus den Koeffizienten ableiten. Eine Bekannte ist die von Cauchy.

Satz 12.3. Regel von Cauchy Die reellen Wurzeln des Polynoms vom Grad $n \geqslant 1$ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ liegen im Intervall $[-(M+1), M+1]$, wobei M der grösste absolute Quotient von $\frac{|a_0|}{|a_n|}, \frac{|a_1|}{|a_n|}, \ldots, \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}$ ist.

12.4 Übung Wir kontrollieren diesen Satz an einem Beispiel: Wir erstellen das Polynom mit $(2x-1)(x+3)(3x^2+1)$ und erhalten $6x^4 + 15x^3 - 7x^2 + 5x - 3 = 0$ mit den Lösungen $\{1/2, -3\}$. Es folgt $M = \max(\frac{15}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{6}) = \frac{15}{6}$. Damit das Intervall $[-\frac{21}{6}, \frac{21}{6}]$. Die Lösungen $1/2 = \frac{3}{6}$ und $\frac{-18}{6}$ liegen im Intervall. $\triangleleft$

Aufgaben

0.5 Vereinfache (auch durch Ausmultiplizieren)

(a) $(4-3x)+(3x^2+2x+7)$ **(b)** $t^2+4t-2(3-t)$ **(c)** $q(200-3q)-(5q+500)$
(d) $(3y-1)(2y+1)$ **(e)** $\left(3-\dfrac{x}{2}\right)(2x+5)$ **(f)** $-(4t+3)(t^2-2)$ **(g)** $2w(w^3-5)(w^3+5)$
(h) $(5a^2-3)(25a^4+15a^2+9)$ **(i)** $(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$ **(j)** $(\sqrt{7}-z)(\sqrt{7}+z)$

5 **(a)** $3x^2-x+11$ **(b)** t^2+6t-6 **(c)** $-3q^2+195q-500$ **(d)** $6y^2+y-1$
(e) $-x^2+\dfrac{7}{2}x+15$ **(f)** $-4t^3-3t^2+8t+6$ **(g)** $2w^7-50w$ **(h)** $125a^6-27$
(i) x^4+2x^2+9 **(j)** $7-z^2$

0.6 Führe die Polynomdivision aus

(a) $(6x^2-11x-7)\div(2x+2)$ **(b)** $(3y^2+6y-7)\div(y-3)$ **(c)** $(6w-3)\div(2w+5)$
(d) $(2x+1)\div(3x-4)$ **(e)** $(x^2-4)\div(2x+1)$ **(f)** $(x^3-8)\div(5x-10)$
(g) $(5x^3-x+1)\div(x^2+4)$

6 **(a)**
$$\begin{array}{l}
\left(6x^2-11x-7\right):\left(2x+1\right)=3x-7\\
\underline{-6x^2-3x}\\
\qquad -14x-7\\
\qquad \underline{\;\;14x+7}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{l}
\left(3y^2+6y-7\right):\left(y-3\right)=3y+15+\dfrac{38}{y-3}\\
\underline{-3y^2+9y}\\
\qquad 15y-7\\
\qquad \underline{-15y+45}\\
\qquad\qquad 38
\end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{l}
\left(6w-3\right):\left(2w+5\right)=3+\dfrac{-18}{2w+5}\\
\underline{-6w-15}\\
\qquad -18
\end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{l}
\left(2x+1\right):\left(3x-4\right)=\frac{2}{3}+\dfrac{\frac{11}{3}}{3x-4}\\
\underline{-2x+\frac{8}{3}}\\
\qquad \frac{11}{3}
\end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{l}
\left(x^2-4\right):\left(2x+2\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\dfrac{-3}{2x+2}\\
\underline{-x^2-x}\\
\qquad -x-4\\
\qquad \underline{\;\;x+1}\\
\qquad\qquad -3
\end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{l}
\left(x^3-8\right):\left(5x-10\right)=\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}\\
\underline{-x^3+2x^2}\\
\qquad 2x^2\\
\qquad \underline{-2x^2+4x}\\
\qquad\qquad 4x-8\\
\qquad\qquad \underline{-4x+8}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{(g)}\ \Big(\quad 5x^3 \quad -x+1\Big) : \Big(x^2+4\Big) = 5x + \dfrac{-21x+1}{x^2+4} \\
\quad \underline{-5x^3 - 20x} \\
\qquad\qquad -21x+1
\end{array}
$$

0.7 Faktorisiere

(a) $2x - 10x^2$ **(b)** $12x^5 - 8x^3$ **(c)** $16xy^2 - 12x^2y$ **(d)** $5(z+3)^2 - 4(z+3)^3$
(e) $(2x-1)(x+3) - 4(2x-1)$ **(f)** $z^2(z-5) + z - 5$ **(g)** $w^2 - 121$ **(h)** $49 - 4x^2$
(i) $81y^4 - 16$ **(j)** $9z^2 - 64y^4$ **(k)** $(y+3)^2 - 4y^2$ **(l)** $(x+h)^3 - (x+h)$ **(m)** $y^2 - 24y + 144$
(n) $25x^2 + 10x + 1$ **(o)** $12x^3 - 36x^2 + 27x$

7 **(a)** $2x$ ausklammern: $2x(1-5x)$
(b) $4x^3$ ausklammern: $4x^3(3x^2-2)$
(c) $4xy$ ausklammern: $4xy(4y-3x)$
(d) $(z+3)^2$ ausklammern und zweite Klammer vereinfachen: $-(z+3)^2(4z+7)$
(e) $(2x-1)$ ausklammern: $(2x-1)(x-1)$
(f) Gemeinsames $(z-5)$ ausklammern: $(z-5)(z^2+1)$
(g) Zweite binomische Formel anwenden $(w-11)(w+11)$
(h) Zweite binomische Formel anwenden $(7-2x)(7+2x)$
(i) Zweite binomische Formel anwenden: $(9y^2-4)(9y^2+4)$ und nochmal für ersten Faktor: $(3y-2)(3y+2)(9y^2+4)$
(j) weite binomische Formel anwenden: $(3z-8y^2)(3z+8y^2)$
(k) Ausklammern $y^2+6y+9-4y^2 = -3y^2+6y+9$, Ansatz $-(3y\pm 3)(y\mp 3)$ und $-(3y+3)(y-3)$ oder $-3(y-3)(y+1)$
(l) $(x+h)$ ausklammern: $(x+h)((x+h)^2-1)$ und binomische Formel für zweite Klammer ($a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ mit $a = x+h$ und $b = 1$): $(x+h)(x+h-1)(x+h+1)$
(m) Ist Quadrat $(y-12)^2$
(n) Ist Quadrat $(5x+1)^2$
(o) Zuerst $3x$ ausklammern, dann Quadrat: $3x(2x-3)^2$

0.8 Finde die Lösungen der Gleichungen

(a) $(7x+3)(x-5) = 0$ **(b)** $(2t-1)^2(t+4) = 0$ **(c)** $(y^2+4)(3y^2+y-10) = 0$
(d) $4t = t^2$ **(e)** $y+3 = 2y^2$ **(f)** $26x = 8x^2+21$ **(g)** $16x^4 = 9x^2$ **(h)** $w(6w+11) = 10$
(i) $2w^2+5w+2 = -3(2w+1)$ **(j)** $x^2(x-3) = 16(x-3)$ **(k)** $(2t+1)^3 = (2t+1)$
(l) $a^4+4 = 6-a^2$

8 **(a)** Nullproduktsatz, jeder Faktor ist null, also $x-5=0$ und $7x+3=0$, womit $x_1 = -\frac{3}{7}$, $x_2 = 5$
(b) Jeder Faktor null, d.h. $t+4=0$ und 2t-1=0, so dass $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -4$
(c) Erster Faktor irreduzibel, zweiter $(y+1/6)^2 - 1/36 = 10/3$ und deshalb $y = -1/6 \pm \sqrt{121/36} = -1/6 \pm 11/6$ etc. $y_1 = \frac{5}{3}$, $y_2 = -2$
(d) Es ist $4t - t^2 = 0 = t(4-t) = -t(t-4)$, mit Nullproduktsatz jeden Faktor null setzen: $t_1 = 0$, $t_2 = 4$
(e) Z.B. Mitternachtsformel: $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1}{4} \pm \dfrac{3}{4}$ oder $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{3}{2}$
(f) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7}{4}$
(g) Faktorisieren $x^2(16x^2-9) = x^2(4x-3)(4x+3) = 0$, Also $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{3}{4}$
(h) Ausmultiplizieren $6w^2 + 11w - 10 = 0$, Mitternachtsformel $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121+240}}{12} = \dfrac{-11 \pm 19}{12}$ womit $w_1 = -\frac{5}{2}$, $w_2 = \frac{2}{3}$
(i) Umformen $2w^2 + 5w + 2 + 6w + 3 = 0$ oder $2w^2 + 11w + 5 = 0$, faktorisiert $(2w+1)(w+5)$. Damit $w_1 = -5$, $w_2 = -\frac{1}{2}$

(j) $x-3$ ausklammern $(x-3)(x^2-16)$, binomische Forme für zweiten Faktor: $(x-3)(x-4)(x+4)$, jeden Faktor null setzen: $x_1 = 3$, $x_2 = \pm 4$

(k) $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, , $t_3 = 0$

(l) Unechtes Quadrat mit z.B. $u = a^2$, $u^2 + u + 4 = 6$, quadratisch ergänzen $(u + 1/2)^2 - 1/4 = 2$, $u_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{9/4} = \{\pm 1\}$, $a_{1,2} = \pm 1$

0.9 Bestimme mit dem Hornerschema, ob Nullstelle

(a) $P(x) = 5x^3 + 17x^2 + 13x + 21$ und $x_0 = -3$

(b) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 2x + 24$ und $x_0 = 6$

(c) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ und $x_0 = 1$

9 **(a)** $\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 17 & 13 & 21 \\ -3 & \downarrow & -15 & -6 & -21 \\ \hline & 5 & 2 & 7 & 0 \end{array}$ geht auf, ist Nullstelle

(b) $\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -25 & 2 & 24 \\ 6 & \downarrow & 6 & 24 & -6 & -24 \\ \hline & 1 & 4 & -1 & -4 & 0 \end{array}$ geht auf, ist Nullstelle

(c) $\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & \downarrow & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$ geht auf, ist Nullstelle

Kapitel 13

Bruchgleichungen

Diese Kapitel ist der Anwendung gewidmet und enthält deshalb fast keine Theorie. Es wird angenommen, dass der oder die Studierende fleissig übet.

13.1 Begriff

Definition 15. Unter einer *Bruchgleichung* versteht man Gleichung mit mindestens einem Bruchterm, der die Unbekannte im Nenner enthält.

Ein paar Beispiele von Bruchgleichungen:

$$\frac{x}{x+1} = 1 \qquad x + \frac{1}{x} = 2 \qquad (x+5) \cdot \frac{2}{x+1} = 1$$

$$(x+1) \div \frac{1}{x} = 1 \qquad \frac{2x+17}{x+1} = x+5 \qquad \frac{x^4+5x^3}{x^3-25x} = 1$$

Wir sehen, dass in Bruchgleichungen alle Grundoperationen vorhanden sein können und dass die Unbekannte in verschiedenen Potenzen auftreten kann. Deshalb sind die Bruchgleichungen eine recht grosse Kategorie von Gleichungen.

Definition 16. Eine *rationaler Ausdruck* ist als Quotient zweier Polynomfunktionen darstellbar ist. Er hat also die Form

$$\frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

mit natürlichen Zahlen m und n. Die Koeffizienten $a_m, \ldots, a_0, b_n, \ldots, b_0$ können beliebige reelle Zahlen sein; alleine darf $Q_n \neq 0$ sein.

Definition 17. Der rationale Ausdruck mit $n = 0$ heisst *ganzrational*, der mit $n > 0$ *gebrochenrational*.

Die grosse Klasse von gebrochenrationalen Gleichungen führt uns unweigerlich zu den Polynomen und deren Faktorisierung zurück.

Wichtig 9. Das erste Ziel zur Lösung von Bruchgleichungen ist die Beseitigung der Brüche. $\dashv$

13.1 Übung Die Gleichung $\frac{2x}{x+1} = 1$. Als erstes halten wir fest, dass der Nenner nie Null sein darf. Das heisst, $x+1=0$ und damit $x=-1$ ist nicht erlaubt. Die Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit einer Zahl ist eine Aequivalenzumformung. Wir multiplizieren mit dem Nenner $x+1$

$$\frac{2x}{x+1} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x = x+1$$

Damit wird $2x - x = 1$ und $x = 1$. Das x ist nicht -1, das nicht erlaubt ist, somit ist $x = 1$ die Lösung. ◁

13.2 Übung Wir betrachten $x + \frac{1}{x} = 2$. Wir bemerken, dass x nicht Null sein darf. Wir multiplizieren alle Terme mit dem Nenner des Bruchs

$$x + \frac{1}{x} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+1 = 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2-2x+1=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x+1)^2 = 0$$

und damit $x = -1$. Diese Lösung ist im Definitionsbereich von x. ◁

13.3 Rezept Lösen von Bruchgleichungen

(1) Definitionsbereich D bestimmen, Nullstellen Nenner,

(2) falls möglich, Nenner (und Zähler) faktorisieren, und gemeinsame Faktoren kürzen,

(3) Hauptnenner (HN) der vorkommenden Bruchterme bestimmen,

(4) beide Seiten mit HN multiplizieren, damit die Nenner wegfallen und die Brüche verschwinden,

(5) auflösen nach der Unbekannten,

(6) Lösung prüfen, ob in D enthalten.

13.2 Termumformungen

Zur Vorbereitung einer Lösung sind die Terme meist unzuformen und zu vereinfachen. Darin enthalten sind auch die Faktorisierungen von Nenner und Zähler.

13.1 Übung Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{x^4+5x^3}{x^3-25x} = a$$

Wir versuchen, die linke Seite, die aus einem Bruch von Polynomen besteht, zu vereinfachen. Wir wissen, dass man Polynome meist in Linearfaktoren zerlegen kann. Als erstes klammern wir aus

$$\frac{x^4+5x^3}{x^3-25x} = \frac{x^3(x+5)}{x(x^2-25)},$$

dann zerlegen wir in Faktoren

$$\frac{x^3(x+5)}{x(x-5)(x+5)}$$

jetzt notieren wir auf dem Lösungsblatt zum späteren Gebrauch, dass $x \neq 0$, $x \neq 5$ und $x \neq -5$ gelten muss. Jetzt können wir kürzen

$$\frac{x^3(x+5)}{x(x-5)(x+5)} = \frac{x^2}{x-5}$$

Jetzt fahren wir mit der Gleichung fort und machen die Umformung

$$\frac{x^2}{x-5} = a \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = a(x-5) \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - ax = -5a$$

Das ist eine quadratische Gleichung. Mit quadratischem Ergänzen

$$x^2 - ax = -5a \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-a/2)^2 = -5a + a^2/4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{1,2} = a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - 5a}.$$

◁

13.2 Übung Gestellt ist die Aufgabe, folgende Gleichung zu lösen

$$\frac{2x^2-5x-3}{x^4-4} \div \frac{x^2-2x-3}{x^5+2x^3} = 0$$

Die ersten Schritte betreffen die Termumformung der linken Seite, also Ausklammern, Faktorisieren, Kürzen. Hier wird zuerst noch die Tatsache verwendet, dass die Division mit einem Bruch der Multiplikation mit seinem Kehrwert entspricht, also

$$\frac{2x^2-5x-3}{x^4-4} \div \frac{x^2-2x-3}{x^5+2x^3} = \frac{2x^2-5x-3}{x^4-4} \cdot \frac{x^5+2x^3}{x^2-2x-3} = \frac{(2x^2-5x-3)(x^5+2x^3)}{(x^4-4)(x^2-2x-3)}$$

Zur Übersicht behandeln wir jeden Klammerausdruck separat und fügen dann alles wieder zusammen. Wir beginnen mit dem Einfachsten:

$$x^4 - 4 = (x^2-2)(x^2+2)$$

dann

$$x^5 + 2x^3 = x^3(x^2+2)$$

Für $x^2 - 2x - 3$ suchen wird die Nullstellen, um die Linearfaktoren zu bestimmen. Es ist nicht von vornherein klar, ob dies gelingt. Mit der Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \{3, -1\}$$

also ist $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$. Nun bleibt noch der Ausdruck $2x^2 - 5x - 3$, also wiederum ein Polynom zweiten Grades mit den Nullstellen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \{3, -1/2\}$$

Hier gilt es zu beachten, dass der Faktor 2 berücksichtigt wird als

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x+1/2)(x-3) = (2x+1)(x-3)$$

Nun stellen wir den Term neu zusammen und finden

$$\frac{(2x^2-5x-3)(x^5+2x^3)}{(x^4-4)(x^2-2x-3)} = \frac{(2x+1)(x-3)x^3(x^2+2)}{(x^2-2)(x^2+2)(x-3)(x+1)}$$

Somit

$$\frac{(2x+1)\cancel{(x-3)}x^3\cancel{(x^2+2)}}{(x^2-2)\cancel{(x^2+2)}\cancel{(x-3)}(x+1)} = \frac{x^3(2x+1)}{(x+1)(x^2-2)} = 0$$

Mit dem Nullproduktsatz folgt, dass die einzelnen Faktoren null sein müssen. $x_1 = 0$ ist dreifache Nullstell, aus $x^2 + 2 = 0$ folgt keine reelle Nullstelle. Nun sehen wir aus der Augangsgleichung, dass $x = 0$ nicht zulässig ist, weil ein Nenner null wäre. Somit ist die Lösungsmenge leer. ◁

13.3 Übung $\frac{5}{x^2-9} - \frac{x-2}{x^2-9} = 0$ ist gegeben. Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich von x, der $\mathbb{R}$ ohne $x = \pm 3$ ist. Sodann können wir den Nenner wegmultiplizieren und erhalten

$$5 - x + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 7.$$

Das ist eine Lösung im Definitionsbereich. ◁

13.4 Übung Der folgende Ausdruck ist zu vereinfachen: $\frac{3}{y^2 - 8y + 16} + \frac{y+1}{16y - y^3}$. Wir können beim ersten Nenner die zweite binomische Formel erkennen, also

$$y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$$

und im zweiten Nenner die bekannte Formel $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$, also

$$16y - y^3 = y(16 - y^2) = y(4-y)(4+y) = -y(y-4)(y+4)$$

Damit folgt

$$\frac{3}{(y-4)(y-4)} + \frac{y+1}{-y(y-4)(y+4)}$$

Gleichnamigmachen bedingt die Erweiterungen

$$\frac{3}{(y-4)^2} \cdot \frac{y(y+4)}{y(y+4)} - \frac{y+1}{y(y-4)(y+4)} \cdot \frac{(y-4)}{(y-4)}$$

Differenz bestimmen

$$\frac{3y(y+4) - (y+1)(y-4)}{(y-4)^2 y(y+4)} = \frac{3y^2 + 12y - (y^2 - 4y + y - 4)}{y(y-4)^2(y+4)} = \frac{2y^2 + 15y + 4}{y(y-4)^2(y+4)}$$

Der Zähler ist irreduzibel, d.h. er hat keine reellen Nullstellen, denn die Diskriminanten ist negativ. ◁

13.3 Gleichungen

Um Gewinnumformungen zu verhindern, müssen wir ganz zu Beginn des Lösungsprozesses die Nullstellen der Nennerpolynome aus dem Definitionsbereich ausschliessen. Dazu notieren wir am Anfang die nicht zulässigen Werte und vergleichen sie am Schluss mit den gefundenen Lösungen.

13.1 Übung In der folgenden Gleichung heisst die Unbekannte x. Die Gleichung besitzt einen Bruch mit der Unbekannten im Nenner.

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{1}{2}x - 1$$

Als erstes stellen wir fest, dass $x \neq 1$ sein muss, weil sonst der Nenner Null würde. Als zweites bringen wir den Bruch weg, indem wir mit dem Nenner $x - 1$ erweitern. Das heisst, wir multiplizieren beide Seiten mit diesem Term. Das ergibt

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(\frac{1}{2}x - 1)$$

Uns könnte das 1/2 stören, weshalb wir mit 2 erweitern und ausmultiplizieren

$$2x^3 - 4x + 2 = (x-1)(x-2) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^3 - 4x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

Nun bringen wir alles auf eine Seite, wobei das 2 dann wegfällt

$$2x^3 - 4x - x^2 + 3x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(2x^2 - x - 1) = 0$$

Ein Produkt ist Null, wenn jeweils ein Faktor Null ist. Damit ist eine provisorische Lösung schon bekannt: $x = 0$. Andere Lösungen ergeben sich aus $2x^2 - x - 1 = 0$ oder $x^2 - x/2 - 1/2 = 0$. Mit quadratischem Ergänzen folgt $(x - 1/4)^2 - 1/16 = 1/2$ und $(x - 1/4)^2 = 1/16 + 8/16 = 9/16$. Radizieren bringt $x - 1/4 = \pm 3/4$. Damit $x_{2,3} = \{1, -1/2\}$. Nun prüfen wir die drei provisorischen Lösungen und finden, dass eine, $x = 1$, nicht zulässig ist. Damit folgt $\mathbb{L} = \{0, -1/2\}$. ◁

13.2 Übung Wieder eine Gleichung mit zwei Brüchen,

$$\frac{3}{1 - x\sqrt{2}} - \frac{1}{2x + 5} = 0$$

Der Term $\sqrt{2}$ ist eine reelle Zahl wie viele andere und bedarf keiner speziellen Betrachtung. Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich, d.h. ausgeschlossene Nullstellen. Zum einen $1 - x\sqrt{2} \neq 0$ oder $x \neq 1/\sqrt{2}$ und $2x + 5 \neq 0$, woraus $x \neq -2.5$.
Summen und Differenzen von Brüchen bedingen das Gleichnamigmachen. Bei komplizierten Termen bestimmt man Faktoren und den Hauptnenner. Hier sind die zwei Nenner einfach und ohne gemeinsame Faktoren. Deshalb multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit beiden Nennern. Das führt zu

$$\frac{3(2x + 5)}{(1 - x\sqrt{2})(2x + 5)} - \frac{1(1 - x\sqrt{2})}{(2x + 5)(1 - x\sqrt{2})} = 0$$

Alle Terme haben denselben Nenner, also betrachten wir nur noch die Zähler

$$3(2x + 5) - (1 - x\sqrt{2}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 6x + 15 - 1 + x\sqrt{2} = 0$$

Wir isolieren x und bekommen

$$x(6 + \sqrt{2}) = -15 + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{-14}{6 + \sqrt{2}}.$$

Die Lösung ist im Definitionsbereich und somit zulässig. ◁

13.3 Übung Gesucht wird die Lösung von $3(x^2 + 4)^{-1} + 3x(-1)(x^2 + 4)^{-2}(2x) = 0$. Wir schreiben der Übersicht halber die Brüche und formen dann um, wobei wir bemerken, dass die Nenner $(x^2 + 4)$ irreduzibel sind, also keine reellen Nullstellen aufweisen,

$$\begin{aligned}
3(x^2 + 4)^{-1} + 3x(-1)(x^2 + 4)^{-2}(2x) &= 0 && |\mathrm{TU} \\
\frac{3}{x^2 + 4} - 3x\frac{1}{(x^2 + 4)^2}2x &= 0 && | \cdot (x^2 + 4)^2 \\
\cancel{3}(x^2 + 4) - \cancel{3} \cdot 2x^2 &= 0 && |\mathrm{TU} \\
-x^2 + 4 &= 0 && | \cdot (-1), +4 \\
x^2 &= 4 && |\sqrt{\ } \\
x_{1,2} &= \pm 2
\end{aligned}$$

◁

Aufgaben

0.4 Vereinfache durch Termumformung

(a) $\dfrac{x^2-9}{x^2}\cdot\dfrac{3x}{x^2-x-6}$ **(b)** $\dfrac{t^2-2t}{t^2+1}\div(3t^2-2t-8)$ **(c)** $\dfrac{4y-y^2}{2y+1}\div\dfrac{y^2-16}{2y^2-5y-3}$

(d) $\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1-x}{3x-1}$ **(e)** $\dfrac{2}{w-1}-\dfrac{w^2+1}{w-1}$ **(f)** $\dfrac{2-y}{3y}-\dfrac{1-y}{3y}+\dfrac{y^2-1}{3y}$

(g) $b+\dfrac{1}{b-3}-2$ **(h)** $\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{1}{2x+1}$ **(i)** $\dfrac{m^2}{m^2-4}+\dfrac{1}{2-m}$ **(j)** $\dfrac{\frac{2}{x}-2}{x-1}$ **(k)** $\dfrac{\frac{3}{2-h}-\frac{3}{2}}{h}$

(l) $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

4 **(a)** Die Vereinfachung beginnt mit dem Term $x^2-9=(x-3)(x+3)$ und der Faktorisierung von $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. Damit wird der Bruch $\dfrac{3(x+3)}{x(x+2)}$.

(b) Im ersten Zähler kann man t ausklammern, sodann muss man $3t^2-2t-8$ faktorisieren, der Versuch beginnt mit $(3t\pm p)(t\pm q)$, die Zahl 8 kann man als $8\cdot 1$ oder $4\cdot 2$ faktorisieren, damit z.B. $(3t\pm 2)(t\mp 4)$. Der mittlere Term $-2x$ bekommt man so nicht hin, also $(3t\pm 4)(t\mp 2)$ und folglich $(3t+4)(t-2)$. Damit kann man vereinfachen zu $\dfrac{t}{(3t+4)(t^2+1)}$.

(c) Division als Multiplikation mit Kehrwert: $\dfrac{4y-y^2}{2y+1}\dfrac{2y^2-5y-3}{y^2-16}$, umformen, binomische Formel $\dfrac{-y(y-4)}{2y+1}\dfrac{2y^2-5y-3}{(y-4)(y+4)}$, kürzen $\dfrac{-y}{2y+1}\dfrac{2y^2-5y-3}{y+4}$, Faktorzerlegung von $2y^2-5y-3$: Ansatz $(2y+p)(y+q)$, erraten $q=-3$, $p=1$, also $2y^2-5y-3=(2y+1)(y-3)$, damit $\dfrac{-y}{2y+1}\dfrac{(2y+1)(y-3)}{y+4}$, kürzen $\dfrac{y(y-3)}{y+4}$. Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2},3,4\}$.

(d) Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{1/3\}$. Gleicher Nenner $\dfrac{x-(1-x)}{3x-1}=\dfrac{2x-1}{3x-1}$.

(e) Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Gleicher Nenner $\dfrac{2-(w^2+1)}{w-1}=\dfrac{-(w^2-1)}{w-1}=\dfrac{-(w2-1)(w+1)}{w-1}=-w-1$.

(f) Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Gleicher Nenner
$\dfrac{2-y-(1-y)+(y^2-1)}{3y}=\dfrac{2-y-1+y+y^2-1}{3y}=\dfrac{y^2}{3y}=\dfrac{y}{3}$.

(g) Gleichnamig machen: $\dfrac{b(b-3)}{b-3}+\dfrac{1}{b-3}-\dfrac{2(b-3)}{b-3}$ damit $\dfrac{b(b-3)+1-2(b-3)}{b-3}$ und $\dfrac{b^2-3b+1-2b+6}{b-3}=\dfrac{b^2-5b+7}{b-3}$, besser geht es nicht.

(h) Gleichnamig machen und addieren: $\dfrac{4x^2+x+4}{(x-4)(2x+1)}$

(i) Hauptnenner $m^2-4=(m+2)(m-2)$, erweitern zweiter Term $\dfrac{m^2}{m^2-4}-\dfrac{m+2}{(m-2)(m+2)}=\dfrac{m^2-(m+2)}{m^2-4}$, Faktorzerlegung $m^2-m-2=(m-2)(m+1)$, damit $\dfrac{(m-2)(m+1)}{(m-2)(m+2)}=\dfrac{m+1}{m+2}$ mit $m\neq 2$.

(j) Definitionsbereich $D=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Zähler umschreiben $\dfrac{\frac{2(1-x)}{x}}{x-1}$, mit Kehrwert multiplizieren $\dfrac{2(1-x)}{x}\cdot(x-1)=\dfrac{-2}{x}$.

(k) Definitionsbereich $D_h=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. Zähler gleichnamig $\dfrac{\frac{6-3(2-h)}{2(2-h)}}{h}$, mit Kehrwert multiplizieren: $\dfrac{6-3(2-h)}{2(2-h)\cdot h}=\dfrac{3h}{2(2-h)h}=\dfrac{3}{4-2h}$.

(l) $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ mit $\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}}$ erweitern: $\dfrac{1}{h(x+h)}-\dfrac{1}{xh}$, gleichnamig mit Hauptnenner $hx(x+h)$: $\dfrac{x}{xh(x+h)}-\dfrac{(x+h)}{xh(x+h)}=\dfrac{x-(x+h)}{xh(x+h)}=\dfrac{-h}{xh(x+h)}=-\dfrac{1}{x(x+h)}$, $h\neq 0$.

0.5 Finde die Lösungen der Gleichungen

(a) $\dfrac{x}{5x+4}=3$ **(b)** $\dfrac{3y-1}{y^2+1}=1$ **(c)** $\dfrac{1}{w+3}+\dfrac{1}{w-3}=\dfrac{w^2-3}{w^2-9}$ **(d)** $\dfrac{2x+17}{x+1}=x+5$

(e) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+x^2-2x}=1$ **(f)** $\dfrac{-y^3+4y}{y^2-9}=4y$ **(g)** $w+\sqrt{3}=\dfrac{3w-w^3}{w-\sqrt{3}}$

(h) $\dfrac{2}{x\sqrt{2}-1}-1=\dfrac{3}{x\sqrt{2}+1}$ **(i)** $\dfrac{x^2}{(1+x\sqrt{3})^2}=3$

5 **(a)** Definitionsmenge: Nenner darf nicht null sein, d.h. $5x+4\neq 0$, d.h. $x\neq -2/5$, umformen aus $\dfrac{x}{5x+4}=3$ wird $x=3(5x+4)=15x+12$, und $14x=-12$ und $x=-\dfrac{6}{7}$

(b) Nenner hat keine Nullstelle, also keine Einschränkung. Umformen $3y-1=y^2+1$, $y^2+2-3y=0$, Faktorzerlegung $(y-2)(y-1)$ führt zu $y=1,2$

(c) Definitionsmenge $\mathbb{R}\setminus\{3,-3\}$, erweitern $\dfrac{(w-3)}{(w+3)(w-3)}+\dfrac{(w+3)}{(w-3)(w+3)}=\dfrac{w^2-3}{w^2-9}$ ist aequivalent zu $(w-3)+(w+3)=w^2-3$ und $w^2-3-2w=0$, faktorisiert $(w-3)(w+1)$. $w=3$ ist nicht erlaubt, so dass nur $w=-1$ Lösung ist.

(d) Definitionsbereich: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Umformen $2x+17=(x+5)(x+1)=x^2+6x+5$ und $x^2+4x=12$, quadratisch ergänzen $(x+2)^2-4=12$ und $(x+2)^2=16$, $x+2=\pm 4$, $x=-2\pm 4$ woraus $x_{1,2}=\{-6,2\}$.

(e) Umgeformt $x^2-2x+1=x^3+x^2-2x$, vereinfacht $x^3=1$ und $x=1$. Kontrolle Definitionsbereich durch Einsetzen der Lösungen: $x=1$ keine zulässige Lösung, denn $1^3+1^2-2=0$.

(f) Definitionsbereich Nennernullstellen, d.h. $y^2-9=(y-3)(y+3)=0$, damit $D=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. y ausklammern und wegen Nullproduktsatz erste Lösung $y_1=0$. Rest umformen: $\dfrac{-y^2+4}{y^2-9}=4$ wird zu $-y^2+4=4(y^2-9)$ und $5y^2=40$, $y^2=8$ und $y_{2,3}=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$.

(g) Definitionsbereich $D=\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}\}$. Umformen $(w+\sqrt{3})(w-\sqrt{3})=3w-w^3=w^2-3$ und $w^3+w^2-3w-3=0$, probieren $x=\pm 1$: $x_1=-1$ passt, Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\big(\;w^3+w^2-3w-3\big):\big(w+1\big)=w^2-3\\
\underline{-w^3-w^2}\\
\qquad\qquad -3w-3\\
\qquad\qquad\;\;\underline{3w+3}\\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Damit $w^2=3$ und $w_2=-\sqrt{3}$, denn $\sqrt{3}$ nicht in D.

(h) Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1/\sqrt{2}\}$. Hauptnenner $(2x^2-1)$, $\dfrac{2(x\sqrt{2}+1)}{2x^2-1}-\dfrac{2x^2-1}{2x^2-1}=\dfrac{3(x\sqrt{2}-1)}{2x^2-1}$ und somit $2(x\sqrt{2}+1)-(2x^2-1)=3(x\sqrt{2}-1)$ und $3x\sqrt{2}-3-2x\sqrt{2}-2+2x^2-1=0$ sowie $2x^2+x\sqrt{2}-6=0$ oder $x^2+x\sqrt{2}/2-3=0$. Mit pq-Formel

$$x_{1,2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pm\sqrt{\frac{2}{16}+3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{8}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pm\frac{5\sqrt{2}}{4}=\{-\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\}$$

(i) Definitionsbereich $D=\mathbb{R}$, denn Nenner hat keine reelle Nullstelle. $x^2=3(1+x\sqrt{3})^2)=3(1+2x\sqrt{3}+3x^2)$ und $9x^2-x^2+6x\sqrt{3}+3=0$ sowie $8x^2+6x\sqrt{3}+3=0$, z.B. Mitternachtsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-6\sqrt{3}\pm\sqrt{36\cdot 3+4\cdot 8\cdot 3}}{16}=\frac{-6\sqrt{3}\pm\sqrt{36\cdot 3-4\cdot 8\cdot 3}}{16}=\frac{-6\sqrt{3}\pm\sqrt{108-96}}{16}$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\sqrt{3}\pm\sqrt{12}}{16}=\frac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{8}=\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\}$$

0.6 Löse folgende Betragsgleichungen

(a) $\left|\dfrac{2x}{x^2-1}\right| = 2$

(b) $\left|\dfrac{2z}{4-z^2}\right| = \left|\dfrac{2}{z-2}\right|$

6 **(a)** Es sind zwei Gleichungen zu lösen: $2(x^2-1) = 2x$ und $-2(x^2-1) = 2x$, oder $x^2-x-1 = 0$ und $x^2+x-1 = 0$. Aus der ersten folgt: $(x-1/2)^2 - 1/4 = 1$, $x_{1,2} = 1/2 \pm 1\sqrt{5}/2$ und aus der zweiten $(x+1/2)^2 - 1/4 - 1 = 0$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{5}/2 - 1/2$, zusammen $x_{1,2,3,4} = \{\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$

(b) Zwei Gleichungen: (i) $\dfrac{2z}{4-z^2} = \dfrac{2}{z-2}$, (ii) $\dfrac{2z}{4-z^2} = \dfrac{-2}{z-2}$, mit $z-2$ kürzen: (i) $2z = 2(2+z)$, $z = 2+z$, keine Lösung. (ii) $z = -2-z$ und $2z = -2$ woraus $z = -1$

Kapitel 14

Wurzel- und Potenzgleichungen

14.1 Begriff

14.1.1 Wurzel- und Potenzgleichung

Wir beginnen, wie so oft, mit der Begriffsbestimmung durch eine Definition.

Definition 18. Wurzelgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte mindestens einmal unter einer Wurzel steht.

Ein einfacher Vertreter dieser Klasse ist

$$\sqrt[m]{x} = a$$

Definition 19. Eine *Potenzgleichung* ist eine Gleichung, in der eine Potenz der Unbekannten vorkommt.

Typisches Beispiel:

$$x^n = a$$

Zudem wissen wir, dass man schreiben kann

Formel 14.1.

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Damit kann man Wurzelgleichungen als Teil der Potenzgleichungen verstehen. Im folgenden können wir Wuzelgleichungen nur mit ganzzahligen Wurzeln betrachten. Andernfalls betrachten wir Potenzen.

Anmerkung 14.2. Die Formel $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ ist eine Definition, mit der Wurzeln rechnerische gleich behandelt werden können wie Potenzen. Es gibt keine tiefere Bedeutung oder einen Satz dahinter. Mit dieser Formel geht die Bedingung einher, dass die Basis nicht negativ sein darf.

14.1.2 Radizieren und Potenzieren

Anmerkung 14.3. Da das Potenzieren die Umkehrung des Radizierens, des Wurzelziehens, ist, gibt es auch Potenzgleichungen. Diese bestehen aus nur einer Potenz einer Variablen und einer Konstanten:

$$x^n = c.$$

Das ist natürlich ein Spezialfall der Polynomgleichungen. Deshalb sprechen wir hier nur über Wurzeln.

Die Hauptstrategie, um Wurzelterme zu eliminieren und die Bestimmung der Variablen zu ermöglichen, ist das Isolieren der Wurzel mit anschliessendem Potenzieren.

Wichtig 10. Das Potenzieren mit einer geraden Zahl ist keine Äquivalenzumformung. Ein solcher Rechenschritt kann nämlich aus einer falschen Aussage wie $2 = -2$ eine wahre Aussage, nämlich $2^2 = (-2)^2$, machen. Daher können beim Potenzieren Scheinlösungen hinzukommen, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind. Die Probe ist folglich für Wurzelgleichungen unverzichtbar. ⊣

Satz 14.4. Interpretation 1, lasch Es ist n eine natürliche Zahl, a eine reelle und $\sqrt[n]{a}$ ist ebenfalls reell. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{für } n \text{ ungerade} \\ |a| & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Satz 14.5. Interpretation 2, strikt Es ist n eine natürliche Zahl, a eine reelle und $\sqrt[n]{a}$ ist ebenfalls reell. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{für } a \geqslant 0 \\ \text{in } \mathbb{R} \text{ nicht definiert} & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Anmerkung 14.6. Sie strikte Interpretation ist vorzuziehen, denn sie ist konsistent mit der Potenzschreibweise und mit reellen Exponenten. Anderseits kann es sein, dass in einer Aufgabe verlangt wird, $\sqrt[3]{-8}$ zu bestimmen. Hier gibt es drei Antworten: 1) dieser Ausdruck ist nicht definiert in $\mathbb{R}$, 2) der Ausdruck ist gleich -2 und 3) der Ausdruck ist $-\sqrt[3]{8}$, was dann dasselbe ist wie -2.
Gemäss Satz 14.4 gilt für $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$, aber nicht -2, das aber aus $(-2)^{\frac{4}{4}} = (-2)$ folgen würde. Deshalb lieber Satz 14.5 verwenden! Auch der Taschenrechner verweigert Satz 14.4.

Wichtig 11. Bei einer Gleichung vom Typ $x^2 = c$ werden *alle* Lösungen gesucht, welche die Gleichung erfüllen. Für $c \geqslant 0$ sind dies $x_{1,2} = \pm\sqrt{c}$ oder $x_{1,2} = \{\sqrt{c}, -\sqrt{c}\}$. ⊣

14.2 Potenzgleichungen

Das Rechnen mit Potenzen wurde in einem vorgegangenen Kapitel schon erläutert. Wir konzentrieren uns hier nur noch auf spezielle Gleichungen.

14.1 Übung Wir bestimmen x aus $x^4 = 625$. Man sollte wissen, dass $625 = 25^2$ ist und dass wiederum $25 = 5^2$ gilt, woraus folgt $625 = 5^4$. Somit ist die Lösung der Gleichung $x = 5$. Aber auch $x = -5$ erfüllt die Gleichung. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{5, -5\}$. ◁

14.2 Übung Wir suchen die Lösungsmenge von $x^3 + \frac{1}{8} = 0$. Daraus $x^3 = -8^{-1}$. Weil 3 ungerade ist, können wir schreiben $x = -8^{-1/3} = -1/2$. Es gibt bei ungeraden Potenzen nur eine Lösung. ◁

14.3 Übung Gesucht Lösung für $\frac{1}{3}(5x - 7)^{-4} = \frac{1}{243}$. Wir schreiben das Reziproke hin, tauschen Zähler und Nenner auf beiden Brüchen $3(5x-7)^4 = 243$ und formen um

$$\begin{aligned} 3(5x-7)^4 &= 243 \qquad |\div 3 \\ (5x-7)^4 &= 81 \qquad |()^{1/4} \\ 5x-7 &= 3 \qquad |+7 \\ 5x &= 10 \qquad |\div 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

◁

14.4 Übung Wir versuchen, x für $\sqrt{x} = -3$ zu bestimmen. Das ist eine Fangfrage, denn eine Wurzel darf keinen negativen Wert annehmen. Deshalb ist die Lösungsmente $\mathbb{L} = \varnothing$. Es wäre verlockend, einfach zu quadrieren, also $x = 9$ zu setzen. Wenn man aber einsetzt, sieht man, dass das keine Lösung sein kann. ◁

Wichtig 12. ☠ Es darf kein Wurzelausdruck negativ sein, also führt $\sqrt[n]{x} = -|a|$ zu keiner Lösung für x. ⊣

14.5 Übung Wir suche x aus $(4x-2)^3 = 64$. Radizieren $4x-2 = 2^{6/3} = 4$, dann $4x = 6$ und $x = 3/2$. Bei ungeradem Exponenten gibt es eine eindeutige Lösung. ◁

14.6 Übung Die Gleichung $(x-1)^4 = 81$ ist gegeben. Wir radizieren, es folgen 2 Zwischenlösungen: $(x-1) = \pm 3$. Weiters folgt $x = 1 \pm 3$ oder $\mathbb{L} = \{4, -2\}$. ◁

14.7 Übung Bestimmen wir die Lösung von $\left(\frac{1}{3}x+1\right)^{\frac{-3}{4}} = 8$. Beide Seiten werden mit $-4/3$ potenziert. Daraus folgt $\left(\frac{1}{3}x+1\right) = 8^{\frac{-4}{3}}$ und mit $8^{\frac{-4}{3}} = 2^{-4} = 1/16$. Damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + 1 &= \frac{1}{16} \\ \frac{1}{3}x &= -\frac{15}{16} \\ x &= -\frac{45}{16} \end{aligned}$$

◁

14.8 Übung Weiter mit $(x-2)^{\frac{1}{3}} - (x-2)^{\frac{1}{6}} = 6$. Wir substituieren und setzen $u = (x-2)^{\frac{1}{6}}$. Damit folgt $u^2 - u = 6$ und mit quadratischem Ergänzen $(u-1/2)^3 - 1/4 = 6$ mit den Lösungen $u = 0.5 \pm 2.5 = \{3, -2\}$. Wir untersuchen die zwei Fälle, aber zuerst lösen wir nach x auf: $(x-2)^{\frac{1}{6}} = u$ somit $x-2 = u^6$ und $x = u^6 + 2$. Mit $u = 3$ folgt $x = 729 + 2 = 731$. Und $u = -2$? Wir können für u auch schreiben $u = \sqrt[6]{x-2}$ und oben haben wir ja gesagt, dass keine Wurzel negativen Wert haben kann! Somit ist $u = -2$ nicht zulässig. ◁

14.9 Übung Zum Abschliessen: $x^{\frac{3}{2}} - 25 = \frac{1}{11}(8x^{1.5} + 100)$. Wie fast immer, bringen wir die x-Terme zusammen.

$$\begin{aligned}
x^{\frac{3}{2}} - 25 &= \frac{1}{11}(8x^{1.5} + 100) \qquad | \cdot 11\\
11x^{\frac{3}{2}} - 275 &= 8x^{1.5} + 100 \qquad | + 275\\
11x^{\frac{3}{2}} &= 8x^{1.5} + 375 \qquad | - x^{1.5}\\
11x^{1.5} - 8x^{1.5} &= 375 \qquad |\mathrm{TU}\\
3x^{1.5} &= 375 \qquad | \div 3\\
x^{1.5} &= 125 \qquad |()^{2/3}\\
x &= 125^{2/3} = 5^2 = 25
\end{aligned}$$

◁

14.3 Wurzelgleichungen

14.3.1 Termumformungen

Die Umformung der Terme ist meist eine Vorbereitung für die Lösung einer Gleichung. Wir transformieren in den folgenden Übungen Wurzelterme. Das Ziel für Gleichungen ist immer, die gesuchte Variable zu isolieren. Hier ist das Zwischenziel, Terme zu vereinfachen.

Einzelne Wurzeln

14.1 Übung Wir vereinfachen $\sqrt{0.0001}$. Innerhalb der Wurzel kann man faktorisieren, z.B. $\sqrt{0.01 \cdot 0.01} = \sqrt{0.01^2} = 0.01$. ◁

14.2 Übung Bestimme $\sqrt[3]{-125}$. Wir haben gesagt, dass Radikanden positiv sein müssen. Nur hier, machen wir die Ausnahme, diesen Term als $-\sqrt[3]{125}$ zu schreiben. Da $125 = 5^3$ ist wird $-\sqrt[3]{125} = -5$. ◁

14.3 Übung Wir betrachten $\sqrt{a^0}$ und $\sqrt[3]{7^0}$. Da $x^0 = 1$ folgt $\sqrt{a^0} = \sqrt{1} = 1$. Ebenso ist $7^0 = 1$ und damit $\sqrt[3]{7^0} = 1$. ◁

14.4 Übung Wir betrachten die Summe $\sqrt[6]{729} - \sqrt[5]{243} - \sqrt[5]{3125} + \sqrt[3]{125}$. Ein alter Taschenrechner verfügt nur über die Funktion y^x. Deshalb schreiben wir um $729^{1/6} - 243^{1/5} - 3125^{1/5} + 125^{1/3}$. Mit dem Rechner erhalten wir $3 - 3 - 5 + 5 = 0$ ◁

14.5 Übung Ein altes Rechenbuch behauptet, $\sqrt[3]{216} \div \sqrt[4]{16} = 3$. Wir rechnen nach, indem wir die Radikanden in Primfaktoren zerlegen. Der erste Term ist $216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ und $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Damit werden die Wurzeln $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$ und $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$. Damit ergibt die Division tatsächlich $6/2 = 3$. ◁

14.6 Übung Vereinfache den Term

$$\sqrt{\frac{16}{25}a^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{25}{36}b^2}$$

Die Hoffnung ist, dass der Radikand auf die Form $(x - y)^2$ gebracht werden kann, also aus $x^2 - 2xy + y^2$ besteht. Wir formen die einzelnen Terme des Radikanden um

$$\sqrt{\left(\frac{4}{5}a\right)^2 - \frac{2 \cdot 20}{30}ab + \left(\frac{5}{6}b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}a\right)^2 - 2\frac{4}{5}a\frac{5}{6}b + \left(\frac{5}{6}b\right)^2}$$

Die Hoffnung hat sich erfüllt, denn wir erkennen

$$\sqrt{\left(\frac{4}{5}a - \frac{5}{6}b\right)^2} = \frac{4}{5}a - \frac{5}{6}b$$

$\lhd$

Summen

Gleichartige Terme kann man addieren, subtrahieren und zusammenfassen.

14.7 Übung Vereinfachen wir $3\sqrt{a+b} + 5\sqrt[3]{a-b} + 2\sqrt{a+b} - \sqrt[3]{a-b}$. Wir fassen je zwei gleichartige Terme zusammen und finden $5\sqrt{a+b} + 2\sqrt[3]{a-b}$. $\lhd$

14.8 Übung Vereinfache $3\sqrt{3^4} + 4\sqrt[3]{2^9} - 5\sqrt[4]{3^{16}} - \sqrt[5]{3^{15}} - 2\sqrt[6]{4^{12}} + 2\sqrt[3]{8^6}$. Wir erinnern, dass man einen Term wie $\sqrt[3]{2^9}$ auch als $2^{9/3}$ und somit als 2^3 schreiben kann. Wir vereinfachen als erstes alle Exponenten der Terme $3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^3 - 5 \cdot 3^4 - 3^3 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2$. Jetzt ist es eine Frage des Geschmacks, ob man die Terme ausrechnet oder zuerst zusammenfasst. Zwei Terme kann man auf anhieb streichen, nämlich 3^3. Damit $4 \cdot 2^3 - 5 \cdot 3^4 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2$. Wir rechnen die Terme aus $32 - 405 - 32 + 128 = -405 + 128 = -277$. $\lhd$

Potenzen und Produkte

Auf die Wurzelschreibweise könnte man ganz verzichten, denn es gibt die Alternative mit den gebrochenen Exponenten. Da man das Rechnen mit Potenzen ohnehin beherrschen muss, kann man es auch hier anwenden.

14.9 Übung Wir formen den Ausdruck $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}}}$ um. Wir schreiben

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}}} = \sqrt[60]{16} = 16^{\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}} = 16^{\frac{1}{60}}$$

Nun ist $16 = 2^4$, so dass $16^{\frac{1}{60}} = 2^{\frac{4}{60}} = 2^{\frac{1}{15}}$ oder $\sqrt[15]{2}$. $\lhd$

14.10 Übung Wir vereinfachen $(x^6)^{\frac{1}{3}} + (x^8)^{\frac{3}{4}} + (-y^5)^{\frac{3}{5}} - (-y^9)^{\frac{2}{3}}$. Die Exponenten kann man multiplizieren, es wird $x^2 + x^6 - y^3 - y^6$. $\lhd$

14.11 Übung Wir multiplizeren aus: $\sqrt[4]{3x^3y^4} \cdot \sqrt[4]{27x^{13}y^{20}}$. Wir können das Produkt in der Wurzel schreiben, denn beide Exponenten sind gleich. $\sqrt[4]{3x^3y^4 \cdot 27x^{13}y^{20}}$ Wir fassen die Potenzen gleicher Basen zusammen $\sqrt[4]{3x^{16}3y^{24} \cdot 27}$, zudem ist $3 \cdot 27 = 81 = 3^4$. Also $\sqrt[4]{3^4x^{16}3y^{24}}$. Alle Exponenten sind durch 4 teilbar, also kann man folgendermassen radizieren: $\sqrt[4]{3^4x^{16}y^{24}} = 3x^4y^6$. $\lhd$

14.12 Übung Wir vereinfachen $\sqrt[2n+1]{a^{3n+2}}\,\sqrt[2n+1]{a^n}$. Gleicher Exponent, unter dieselbe Wurzel nehmen $\sqrt[2n+1]{a^{3n+2} \cdot a^n}$. Radikand vereinfachen $\sqrt[2n+1]{a^{3n+2+n}} = \sqrt[2n+1]{a^{4n+2}}$ und weiter $\sqrt[2n+1]{(a^2)^{2n+1}} = a^2$. $\lhd$

14.13 Übung Um das Jahr 1000 n.Chr. fand ein arabischer Gelehrter $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$. Stimmt das? Ein schnelle Primzahlzerlegung von 54 ergibt $54 = 2 \cdot 3^3$. Damit ist $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3^3} = 3\sqrt[3]{2}$. Somit gilt $3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$. Anderseits ist $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{2}$. Damit ist die Gleichung verifiziert. $\lhd$

Quotienten

Wir betrachten sowohl Quotienten von Wurzeln als auch Wurzeln von Quotienten.

14.14 Übung Wir vereinfachen

$$\sqrt[4]{\frac{x^{12}y^{-5}}{16y^3z^{-8}}}$$

Wir fassen alle gleichartigen Terme zusammen, wobei wir $16 = 2^4$ berücksichtigen und dann radizieren

$$\sqrt[4]{\frac{x^{12}z^8}{2^4y^8}} = \frac{x^3z^2}{2y^2}$$

◁

14.15 Übung Wir vereinfachen

$$\sqrt{\frac{64x^7y^8}{4z^4}} \div \sqrt{\frac{x^3y^6}{z^6}}$$

Anstatt der Division multiplizieren wir mit dem Kehrwert, also

$$\sqrt{\frac{64x^7y^8}{4z^4}} \cdot \sqrt{\frac{z^6}{x^3y^6}} = \sqrt{\frac{64x^7y^8}{4z^4} \cdot \frac{z^6}{x^3y^6}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{x^7y^8}{z^4} \cdot \frac{z^6}{x^3y^6}}$$

Nun kürzen wir und ziehen die Wurzel

$$4 \cdot \sqrt{x^4y^2z^2} = 4x^2yz$$

◁

14.16 Übung Wir betrachten $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) \div (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$. Die Terme des Zählers können wir umschreiben als $\sqrt[3]{a^2} = (\sqrt[3]{a})^2$. Somit $((\sqrt[3]{a})^2 - (\sqrt[3]{b})^2) \div (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$. Mit der zweiten binomischen Formel gemäss $(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y)$ folgt $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$ als vereinfachte Form. ◁

14.17 Übung Der Nenner soll rational gemacht werden, d.h. es sollen keine Wurzeln mehr im Nenner vorkommen. Ausgangslage ist $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. Wiederum müssen wir die zweite binomische Formel bemühen. Wir erweitern mit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Dieser Term wird auch *konjugierte Wurzel* zu $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ genannt. Damit folgt

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$$

◁

14.18 Übung Wir machen noch ein Zahlenbeispiel. Wieder suchen wir einen rationalen Nenner von $\frac{11}{-2-4\sqrt{3}}$. Wir bemühen die konjugierte Wurzel, also $-2 + 4\sqrt{3}$, mit der wir erweitern

$$\frac{11}{-2-4\sqrt{3}} \cdot \frac{-2+4\sqrt{3}}{-2+4\sqrt{3}} = \frac{11(-2+4\sqrt{3})}{4-16\cdot 3} = \frac{22(2\sqrt{3}-1)}{-44} = -\frac{(2\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(1-2\sqrt{3})}{2}$$

◁

14.3.2 Typen von Gleichungen

Nun gehen wir einen Schritt weiter und betrachten Gleichungen.

Ein Wurzelterm

Wenn nur ein Wurzelterm vorhanden ist, so kann dieser isoliert und dann potenziert werden. Das gilt auch, wenn auf beiden Seiten der Gleichung nur je ein Wurzelterm steht.

14.19 Übung Wir betrachten die einfache Gleichung $\sqrt[3]{x} = x$. Wir potenzieren mit der Hochzahl 3 und erhalten $x = x^3$. Division durch x, wenn dieses nicht null ist: $1 = x^2$ und hier $x = 1$. (Nach unserer Definition darf der Radikand nicht negativ sein, weshalb wir die Lösung $x = -1$ nicht zulassen.) ◁

14.20 Übung Lösen wir $a\sqrt{bx+c} = b\sqrt{ax+c}$. Wir quadrieren und erhalten $a^2(bx+c) = b^2(ax+c)$. Ausmultipliziert $a^2bx + a^2c = b^2ax + b^2c$, alle x-Terme nach links, Rest nach rechts $a^2bx - b^2ax = b^2c - a^2c$ oder $x(a^2b - b^2a) = b^2c - a^2c$. Division

$$x = \frac{b^2c - a^2c}{a^2b - b^2a} = \frac{c(b^2 - a^2)}{ab(a-b)} = \frac{c(b^2 - a^2)}{ab(a-b)} = \frac{-c(a+b)}{ab}$$

Und wieder brauchen wir diese dritte binomische Formel. ◁

14.21 Übung Man löse

$$\sqrt{87 - 3\sqrt[3]{3x-10}} = 9$$

Als erstes quadrieren wir und erhalten

$$87 - 3\sqrt[3]{3x-10} = 81$$

dann ordnen wir um rechnen die Differenz aus, z.B.

$$6 = -3\sqrt[3]{3x-10} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 = -\sqrt[3]{3x-10}$$

Nun potenzieren wir

$$8 = -(3x-10) \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2/3$$

Wenn wir dieses Resultat einsetzen, dann stossen wir auf den Ausdruck $\sqrt[3]{-8}$, den wir uns als $-\sqrt[3]{8}$ vorstellen. So stimmt das Resultat. ◁

Mehrere Wurzelterme

Eine Gleichung mit mehreren nicht gleichen Wurzeltermen plus noch ein Term führt unter Umständen zur zweifachen Quadrierung.

14.22 Übung Wir lösen $\sqrt{x-7} + \sqrt{x} = \dfrac{21}{\sqrt{x-7}}$. Als erstes halten wir fest, dass $x \neq 7$ sein muss. Sodann multiplizieren wir mit dem Nenner der rechten Seite und erhalten

$$x - 7 + \sqrt{x}\sqrt{x-7} = 21 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{x}\sqrt{x-7} = 28 - x$$

Quadrieren führt zu

$$x(x-7) = (28-x)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cancel{x^2} - 7x = 784 - 56x + \cancel{x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 49x = 784$$

Und damit $x = 16$. ◁

14.23 Übung Betrachten wir die Gleichung $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-9}=1$. Quadrieren füht zu

$$(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-9})^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)-2\sqrt{x-2}\sqrt{x-9}+(x-9)=1$$

Wurzeln auf einer Seite isolieren und nochmals quadrieren

$$-2\sqrt{x-2}\sqrt{x-9}=1-(x-9)-(x-2)=12-2x \quad\Rightarrow\quad 4(x-2)(x-9)=144-48x+4x^2$$

Durch 4 geteilt und umsortiert

$$(x-2)(x-9)=36-12x+x^2 \quad\Leftrightarrow\quad \cancel{x^2}-9x-2x+18=36-12x+\cancel{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad x-18=0$$

Also $x=18$. Nachrechnen bestätigt es, denn $\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1$. ◁

14.24 Übung Wir betrachten

$$\sqrt{4x+a}+\sqrt{9x-2a}=\sqrt{25x-a}$$

Wir werden wieder zweimal quadrieren müssen, das erste Mal:

$$(\sqrt{4x+a}+\sqrt{9x-2a})^2=25x-a \quad\Leftrightarrow\quad 25x-a=4x+a+2\sqrt{4x+a}\sqrt{9x-2a}+9x-2a$$

$$12x=2\sqrt{4x+a}\sqrt{9x-2a} \quad\Rightarrow\quad 144x^2=4(4x+a)(9x-2a)$$

und daraus, geteilt mit 4

$$36x^2=(4x+a)(9x-2a)=36x^2-8ax+9ax-2a^2=36x^2+ax-2a^2$$

schliesslich

$$ax-2a=0 \quad\Leftrightarrow\quad ax=2a \quad\Leftrightarrow\quad x=2.$$

◁

14.25 Übung Und noch dies: $(\sqrt[4]{x}-3)^2+(\sqrt[4]{x}+2)^2=25$. Wir setzen vorübergehend $u=\sqrt[4]{x}$. Damit

$$(u-3)^2+(u+2)^2=25 \quad\Leftrightarrow\quad u^2-6u+9+u^2+4u+4=25 \quad\Leftrightarrow\quad 2u^2-2u-12=0$$

Mit 2 gekürzt $u^2-u-6=0$. Quadratisch ergänzt $(u-1/2)^2-1/4-6=0$ oder $(u-1/2)^2=6.25$, radizieren $u-1/2=\pm2.5$ und $u=0.5\pm2.5=\{3,-2\}$. Die negative Lösung ist nicht zulässig, denn die Wurzel $\sqrt[4]{x}$ darf nicht negativ sein. Somit ist $u=3$ und damit $\sqrt[4]{x}=3$ oder $x=3^4=81$. ◁

Verkettete Wurzeln

14.26 Übung Wir betrachten $\sqrt{(\sqrt{18x}-\sqrt{8x})^2+(\sqrt{20}-\sqrt{80})^2}=6$ Wir formen zuerst den Wurzelterm um, indem wir von innen nach aussen arbeiten.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\sqrt{18x}-\sqrt{8x})^2+(\sqrt{20}-\sqrt{80})^2} &= \sqrt{(\sqrt{9\cdot 2x}-\sqrt{4\cdot 2x})^2+(\sqrt{4\cdot 5}-\sqrt{16\cdot 5})^2}\\
&= \sqrt{(\sqrt{9}\sqrt{2x}-\sqrt{4}\sqrt{2x})^2+(\sqrt{4}\sqrt{5}-\sqrt{16}\sqrt{5})^2}\\
&= \sqrt{(3\sqrt{2x}-2\sqrt{2x})^2+(2\sqrt{5}-4\sqrt{5})^2}\\
&= \sqrt{(\sqrt{2x})^2+(-2\sqrt{5})^2}\\
&= \sqrt{2x+(-2)^2(\sqrt{5})^2}\\
&= \sqrt{2x+4\cdot 5}\\
&= \sqrt{2x+20}
\end{aligned}$$

Somit lautet die Gleichung $\sqrt{2x + 20} = 6$, quadriert $2x + 20 = 36$ und $2x = 16$ sowie dann endlich $x = 8$. $\triangleleft$

Aufgaben

2.27 Radiziere (zieh die Wurzel)!

(a) $\sqrt{9x^2}$ **(b)** $\sqrt[3]{8t^3}$ **(c)** $\sqrt{50y^6}$ **(d)** $\sqrt{4t^2+4t+1}$ **(e)** $\sqrt{w^2-16w+64}$

(f) $\sqrt{(\sqrt{12x}-\sqrt{3x})^2+1}$ **(g)** $\sqrt{\dfrac{c^2-v^2}{c^2}}$ **(h)** $\sqrt[3]{\dfrac{24\pi r^5}{L^3}}$ **(i)** $\sqrt[4]{\dfrac{32\pi\varepsilon^8}{\rho^{12}}}$

(j) $\sqrt{x}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

27 **(a)** $3|x|$ oder $3x$ für $x \geqslant 0$.

(b) $2t$

(c) $5|y^3|\sqrt{2}$ (oder $5y^3\sqrt{2}$ für $y \geqslant 0$).

(d) $|2t+1|$ (oder $(2t+1)$ für $t \geqslant -1/2$).

(e) $|w-8|$ oder $w-8$ für $w \geqslant 8$.

(f) $\sqrt{3x+1}$

(g) $\dfrac{\sqrt{c^2-v^2}}{|c|}$ oder $\dfrac{\sqrt{c^2-v^2}}{c}$ für $c > 0$.

(h) $\dfrac{2r\sqrt[3]{3\pi r^2}}{L}$

(i) $\dfrac{2\varepsilon^2\sqrt[4]{2\pi}}{|\rho^3|}$

(j) $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$.

2.28 Finde die Lösungen

(a) $(2x+1)^3-8=0$ **(b)** $\dfrac{(1-2y)^4}{3}=27$ **(c)** $\dfrac{1}{1+2t^3}=4$ **(d)** $\sqrt{3x+1}=4$

(e) $5-\sqrt[3]{t^2+1}=1$ **(f)** $x+1=\sqrt{3x+7}$ **(g)** $y+\sqrt{3y+10}=-2$

(h) $3t+\sqrt{6-9t}=2$ **(i)** $2x-1=\sqrt{x+3}$ **(j)** $w=\sqrt[4]{12-w^2}$ **(k)** $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}=3$

(l) $\sqrt{2x+1}=3+\sqrt{4-x}$

28 **(a)** Potenzieren $(2x+1)^3=8$ wird $(2x+1)=8^{1/3}=2$ und somit $x=\dfrac{1}{2}$

(b) Umgeformt $(1-2y)^4=81=3^4$, radizieren $1-2y=\pm 3$, und $y=-1,2$.

(c) Kehrwerte nehmen $1+2t^3=1/4$, und $2t^3=-3/4$ sowie $t^3=-3/8$, entweder argumentieren, dass das Radizieren nicht definiert ist oder (Augen schliessen) und schreiben $t=-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{3}$.

(d) Quadrieren $\sqrt{3x+1}=4$ wird zu $3x+1=16$ und $3x=15$ sowie $x=5$. Kontrolle stimmt.

(e) Potenzieren von $4=\sqrt[3]{t^2+1}$ wird $64=t^2+1$ und $t^2=63=9\cdot 7$ sowie $t=\pm\sqrt{9\cdot 7}=\pm 3\sqrt{7}$.

(f) Quadrieren $(x+1)^2=3x+7=x^2+2x+1$ und faktorisieren $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$, Lösungen $\{-2,3\}$ testen: nur $x=3$ zulässig.

(g) Umformen $\sqrt{3y+10}=-2-y$, quadrieren $3y+10=y^2+2y+4$, also $y^2-y-6y=0$, faktorisiert $(y-3)(y+2)$. Testen $\{-2,3\}$: -2 nicht erlaubt, also $y=-3$.

(h) Umformen $\sqrt{6-9t}=2-3t$, quadrieren $6-9t=4-12t+9t^2$, umformen $9t^2-3t-2=0$, Mitternachtsformel $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+36\cdot 2}}{18}=\dfrac{3\pm\sqrt{81}}{18}=\dfrac{1\pm 3}{6}$ womit $t_{1,2}=\{-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\}$

(i) Quadrieren $(2x-1)^2=x+3=4x^2-4x+1$ und $4x^2-5x-2$, Mitternachtsformel $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+32}}{8}$, nur positive Lösung zulässig, denn $2x-1\geqslant 0$, also $x_1=\dfrac{5+\sqrt{57}}{8}$.

(j) Mit 4 potenzieren: $w^4=12-w^2$ oder $w^4+w^2=12$, quadratisch ergänzt: $(w^2+1/2)^2-1/4=12$ oder $(w^2+1/2)^2=49/4$. Daraus $w^2=-1/2\pm 7/2$ und die positive Lösung $w^2=6/2=3$ sowie dann $w=\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$. Kontrolle ergibt nur $w=\sqrt{3}$ ist wahre Lösung.

(k) $x=6$

(l) $2x+1=(3+\sqrt{4-x})^2=9+6\sqrt{4-x}+4-x)$, daraus $2x+1-9-4+x=3x-12=6\sqrt{4-x}$, nochmals quadrieren $9x^2-72x+144=36(4-x)$ und $x^2-8x+16-16+4x=0=x^2-4x$ oder $x(x-4)=0$ und $x=\{0,4\}$. Die Lösung $x=0$ eingesetzt ergibt eine unwahre Aussage, deshalb ist die einzige Lösung $x=4$.

2.29 Forme um

(a) $(-25)^{15}\div 25^{12}$ **(b)** $81a^7b^5\div 3a^4b^2$ **(c)** $(9a^8-10a^4b^4+b^8):(3a^4+4a^2b^2+b^4)$

(d) $\dfrac{4a^{-3}b^{-m}}{5^{-2}c^5d^{-n}}$ **(e)** $2x^p\cdot 1.2x^{-(p-1)}$ **(f)** $(a^{-2m}-b^{-2n})\div(a^{-m}+b^{-n})$

(g) $\left(\dfrac{4x^3yz^2}{5xyz^3}\right)^3\div\left(\dfrac{2x^4y}{3z}\right)^3$

29 **(a)** $-25^{15-12}=-25^3$

(b) $81a^7b^5\div 3a^4b^2=27a^{7-4}b^{5-2}=9a^3b^3=(3ab)^3$

(c) Zähler und Nenner faktorisieren (Vieta und zweite binomische Formel): $9a^8-10a^4b^4+b^8=(9a^4-b^4)(a^4-b^4)=(3a^2-b^2)\cancel{(3a^2+b^2)}(a^2-b^2)\cancel{(a^2+b^2)}$ und $3a^4+4a^2b^2+b^4=\cancel{(3a^2+b^2)}\cancel{(a^2+b^2)}$ ergibt $(3a^2-b^2)(a^2-b^2)$

(d) $\dfrac{4a^{-3}b^{-m}}{5^{-2}c^5d^{-n}}=\dfrac{100a^{-3}b^{-m}}{c^5d^{-n}}=\dfrac{100d^n}{c^5a^3b^m}$

(e) $2.4x^{p-(p-1)}=2.4x$

(f) Substitution $u=a^{-m}$ und $v=b^{-n}$. so dass $(u^2-v^2)\div(u+v)$, damit $(u-v)(u+v)\div(u+v)=u-v$, wieder eingesetzt $u-v=a^{-m}-b^{-n}$

(g) Mit Kehrwert multiplizieren unter die Potenz nehmen: $\left(\dfrac{4x^3yz^2\cdot 3z}{5xyz^3\cdot(2x^4y)}\right)^3$, auf einer Zeile schreiben $\left(12x^3yz^35^{-1}x^{-1}y^{-1}z^{-3}2^{-1}x^{-4}y^{-1}10^{-1}\right)^3$ und zusammenfassen $(12x^{3-1-4}y^{1-1-1}z^{3-3}10^{-1})^3$ und $\left(\dfrac{6}{5x^2y)}\right)^3=\dfrac{6^3}{5^3x^6y^3}=\dfrac{216}{125x^6y^3}$

2.30 Löse die Gleichungen

(a) $5^x=\dfrac{1}{125}$ **(b)** $\sqrt[x]{a}=a^x$ **(c)** $7^x+8\cdot 7^{x-1}=735$ **(d)** $3^{2x}\cdot 5^{6x-7}\cdot 9^{-2}=9^{x-2}\cdot 5^{1-x}$

30 **(a)** $5^x=\dfrac{1}{125}=5^{-3}$ also $x=-3$.

(b) Umschreiben $a^{1/x}=a^x$ und $1/x=x$ oder $x^2=1$ und $x_{1,2}=\pm 1$.

(c) Ausklammern $7^x(1+8/7)=735=7^x(15/7)$ damit $7^x=7\cdot 735/15=7\cdot 49=7^3$, also $x=3$.

(d) $3^{2x}\cdot 5^{6x-7}\cdot 9^{-2}=9^{x-2}\cdot 5^{1-x}$ umschreiben $9^x\cdot 5^{6x-7}\cdot 9^{-2}=9^{x-2}\cdot 5^{1-x}$, Terme mit x nach links $9^x\cdot 5^{6x}\cdot 9^{-x}\cdot 5^x=9^{-2}\cdot 5^1\cdot 5^7\cdot 9^2$, kürzen $5^7x=5^8$ sodass $7x=8$ und $x=8/7$.

Kapitel 15

Exponentialgleichungen und Logarithmen

15.1 Exponentialgleichungen und -ungleichungen

15.1.1 Grundlagen

Die Definition der Exponentialfunktion lautet wie folgt.

Definition 20. Als *Exponentialfunktion* bezeichnet man eine Funktion der Form $f(x) = b^x$ mit einer reellen Zahl $b > 0$ und $b \neq 1$ als Basis (Grundzahl). Man kann auch $\exp_b(x) = b^x$ schreiben.

Anmerkung 15.1. Speziell ist $\exp_e(x) = \exp(x) = e^x$. Die Basis e, Euler'sche Zahl, kann man weglassen.

Anmerkung 15.2. Bei der Potenzfunktion ist die Basis die Variable, also $f(x) = x^p$, bei der Exponentialfunktion hingegen der Exponent $f(x) = p^x$.

Satz 15.3. Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion sind die jeweiligen Umkehrfunktionen, d.h.

$$\log_b(b^u) = \log_b(\exp_b(u)) = u$$
$$\exp_b(\log_b(u)) = b^{\log_b(u)} = u$$

Eigenschaften 15.4. Exponentialfunktion Es ist $\exp_b(x) = b^x$ eine Exponentialfunktion mit $b > 0$ und $b \neq 1$, und es sind u und w reelle Zahlen. Dann gilt

Produktregel	$b^{u+w} = b^u b^w$	,	$\exp_b(u+w) = \exp_b(u) \cdot \exp_b(w)$
Quotientenregel	$b^{u-w} = \frac{b^u}{b^w}$	,	$\exp_b(u-w) = \frac{\exp_b(u)}{\exp_b(w)}$
Potenzregel	$(b^u)^w = b^{u \cdot w}$	,	$\exp_b(u)^w = \exp_b(u \cdot w)$
Nullelement	$b^0 = 1$	,	$\exp_b(0) = 1$

In den meisten Übungen wird man gleichzeitig die Exponential- und die Logarithmusfunktion brauchen. Deshalb macht es Sinn, hier schon die Eigenschaften der Log-Funktion zu wiederholen.

Eigenschaften 15.5. Logarithmus Es ist $w = \log_b(u) \Leftrightarrow b^w = u$ eine Logarithmusfunktion mit $b > 0$ und $b \neq 1$, und es sind u und w reelle Zahlen. Dann gilt

Produktregel	$\log_b(u \cdot w) = \log_b(u) + \log_b(w)$
Quotientenregel	$\log_b(\frac{u}{w}) = \log_b(u) - \log_b(w)$
Potenzregel	$\log_b(u^w) = w \cdot \log_b(u)$
Nullelement	$\log_b(1) = 0$

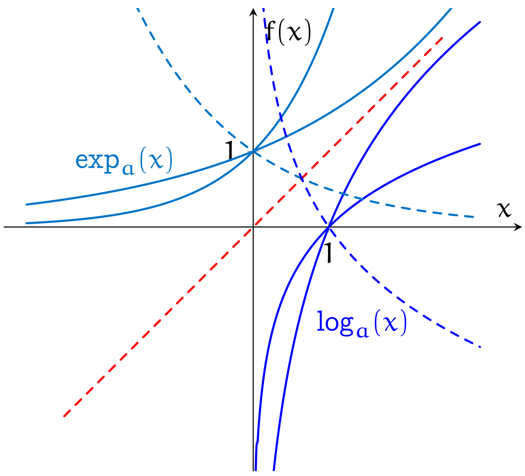
Satz 15.6. Exponential- und Logarithmusfunktion sind eineindeutig (bijektiv), d.h.

$$(\log_b(u) = \log_b(w)) \Leftrightarrow (u = w)$$
$$(b^u = b^w) \Leftrightarrow (u = w)$$

Formel 15.7. Basiswechsel

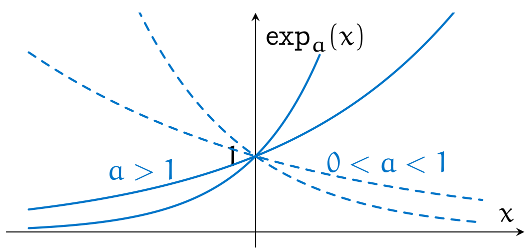
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

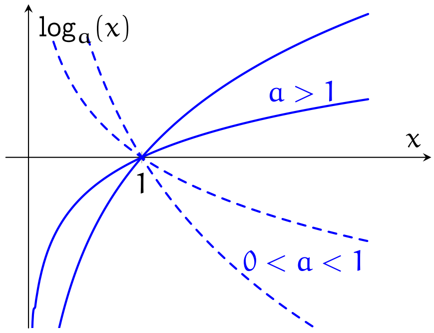
Anmerkung 15.8. Der Basiswechsel zeigt, dass sich die Logarithmen des gleichen Wertes x nur durch einen *konstante Koeffizienten* unterscheiden $\log_a(x) = c \cdot \log_b(x)$. Z.B. ist $\log_{10}(a) = \lg(a) = 0.43429 \ln(a)$.



Es ist nützlich, sich den Verlauf der beiden Funktionen vor Augen zu führen. Dass sie jeweils die Inverse der anderen sind, sieht man gut an der Spiegelungsachse $x = y$. Die Exponentialfunktion hat einen positiven Wertebereich, so dass der Definitionsberich der Logarithmusfunktion eben auch nur positive Werte zulässt.
Man erkennt auch die Bedingungen, wonach $\exp_a(0) = 1$ und sein Spiegelbild $\log_a(1) = 0$ erscheint.
Das Lösen von Gleichungen mit Exponenten unterscheidet sich nicht grundsätzlich von anderen algebraischen Gleichungen. Es gibt keine Methode für alle Fälle und nicht jede Gleichung ist lösbar oder hat eine Lösung.

Die Basis a bestimmt, ob die Funktion monoton steigend oder monoton fallend ist. In der Definition haben wir $a \neq 1$ gefordert. Für $a > 1$ und speziell $a = e = 2.71828\ldots$ ist die Funktion steigend. Für $0 < a < 1$ ist sie fallend.





Die Logarithmusfunktion ist monoton steigend mit dem Parameter $a > 1$ und fallend mit $a < 1$. Die ganze Kurvenschar geht durch den Punkt $(0, 1)$. Die zwei speziellen Funktionen $\lg(x) = \log_{10}(x)$ und $\ln(x)) < \log_e(x)$ sind monoton steigend. Diese Eigenschaft ist für die Ungleichungen wichtig.

15.1.2 Wachstums- und Zerfallsprozesse

Die Exponentialfunktion ist das elementare Modell von Wachstum, Wachstum von Bevölkerungen, Bakterienkulturen, Kapital, Ansteckungen etc.

Unbegrenztes Wachstum

Ein Kapital von K_0 wird mit $z = 4\% = 0.04$ *per annum* verzinst. Das heisst, nach einem Jahr ist das Kapital auf $K_0(1+0.04)$ angewachsen. Nach zwei Jahre wird daraus $K_0(1+0.04)^2$ und nach t Jahren $K_0(1 + 0.04)^t$. Es ist also

$$K(t) = K_0(1 + z)^t$$

Es gibt Wertpapiere, die einen Zinssatz von 4% versprechen, der Zins wird aber halbjährlich gutgeschrieben. Nach einem halben Jahr ist das Kapital $K_{h=2}(1/2) = K_0(1 + 0.02)$ und nach einem Jahr $K_{h=1/2}(1) = K_0(1 + 0.02)^2$. Ein weiteres Papier verspricht auch 4%, zahlt allerdings quartalsweise. Nach einem Jahr ist das Kapital dann $K_{h=4}(1) = K_0(1 + 0.01)^4$. Verallgemeinert folgt: eine Zinssatz p.a. ist nicht absolut, sondern hängt von der Zahlungsfrequenz ab. Die Formel lautet also mit der Frequenz als Parameter

$$K_h(t) = K_0\left(1 + \frac{z}{h}\right)^{t\cdot h}$$

Jetzt kann man sich die Frequenz immer höher vorstellen, gar $h \to \infty$. Das ist dann die augenblickliche Verzinsung. Hier kommt uns der berühmte Grenzwertsatz von Euler entgegen, der da lautet:

Satz 15.9. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = \exp(x)$$

Damit wird die Verzinsung zum kontinuierlichen Zins mit

$$K_c(t) = K_0 e^{zt} = K_0 \exp(zt).$$

Die Bevölkerung kann auch kontinuierlich als $P(t) = P_0 e^{bt}$ dargestellt werden, neben $P(t) = (1 + b)^t$.

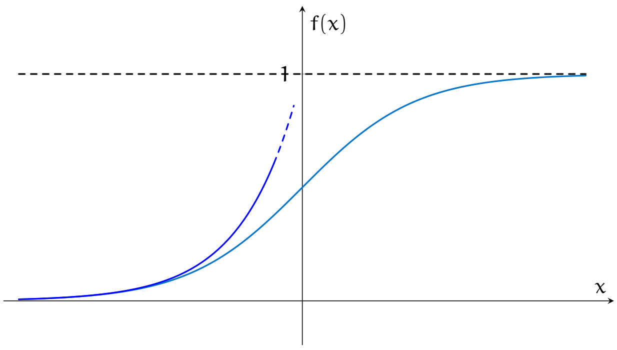
Begrenztes Wachstum**

In der realen Welt gibt es aber kein grenzenloses Wachstum, denn dafür sind Ressourcen notwendig, die knapp sind. Bakterien in einer Schale können nur nach Massgabe der vorhandenen Nährlösung wachsen. Die Bevölkerung entzieht sich die Grundlage durch Wachstum, so dass sie danach trachtet, die Reproduktion zu drosseln. Je mehr sich anstecken, desto weniger sind übrig, die sich noch anstecken können. Um dieses typische begrenzte Wachstum zu modellieren, hat sich die logistische Funktion herausgebildet.

Formel 15.10. Logistische Funktion

$$b(t) = \frac{b_0}{b_0 + (1 - b_0)e^{-kt}}$$

Die logistische Funktion in der Abbildung zeigt den typischen S-Verlauf. Am linken Ende ist das Wachstum noch näherungsweise exponentiell. Dann beginnt die Ressourcenknappheit das Wachstum zu dämpfen bis zur Sättigung.



Zerfallsprozesse

Zerfallsprozesse sind typischerweise der radioaktive Zerfall von Isotopen, die Abkühlung einer Substanz nach Newton und der Wertzerfall eines Konsumgutes, z.B. eines Autos. Angenommen der Wert eines Autos sinkt um 20% pro Jahr. Dann ist sein Wert in der Zeit $A(t) = A_0(1 - k)^t$ oder kontinuierlich

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-kt}.$$

Die Newtonsche Formel der Abkühlung einer Substanz ist von gleichen Typ. Die Temperatur $T(t)$ geht asymptotisch mit der Zeit auf die Umgebungstemperatur T_U zurück. Die Konstante k ist eine Stoffgrösse.

$$T(t) = (T_0 - T_U)e^{-k \cdot t} + T_U$$

Substituiert man die Temperatur mit der Differenz $\vartheta = T - T_U$, dann folgt

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

15.11 Übung Fritz macht sich hinter eine volle Literflasche Gin seines Vaters. Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil h des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schliesslich die Ginkonzentration in der Flasche auf $c(t) \leqslant 1/2$ gesunken ist. Wieviel Liter Gin und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im ganzen getrunken? Berechne die Grenzwerte für $h \to 0$. ◁

15.1.3 Beispiele Exponentialgleichungen

15.12 Übung Das grundlegende Problem hat die Form $5^x = 9$. Die Lösung ist das beidseitige Logarithmieren, was aufgrund der Eineindeutigkeit der Log- und Exp-Funktion zulässig ist. Es wird dann mit der Potenzregel

$$5^x = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(5^x) = x\ln(5) = \ln(9) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\ln(9)}{\ln(5)}.$$

◁

15.13 Übung Wir betrachten die Gleichung $2^{3x} = 16^{1-x}$. Wir versuchen als erstes, beide Exponentialterm auf dieselbe Basis zu bringe. Das gelingt, weil $16 = 2^4$ ist. Also können wir schreiben

$$2^{3x} = 16^{1-x} = (2^4)^{1-x} = 2^{4(1-x)}$$

Wir haben also die Potenzregel verwendet. Nun folgt wegen der injektiven Eigenschaft, dass die Exponenten gleich sein müssen, um die Gleichung zu befriedigen. Also muss sein

$$3x = 4(1-x) \quad \text{und somit} \quad x = 4/7 = 0.571.$$

◁

15.14 Übung Wir wandeln das obige Beispiel ein wenig ab. Es soll die Gleichung gelten $2^{3x} = 15^{1-x}$. Damit funktioniert das auf die gleiche Basis stellen nicht. Wir logarithmieren beide Seiten, also

$$\log(2^{3x}) = \log(15^{1-x})$$

Mit der Potenzregel folgt

$$3x\log(2) = (1-x)\log(15)$$

und

$$3x = (1-x)\frac{\log(15)}{\log(2)} = (1-x)\cdot 3.91$$

Daraus folgt die Lösung

$$x = \frac{3.91}{6.91} = 0.566$$

Man beachte, dass wir nicht explizit gesagt haben, welchen Logarithmus wir nehmen. Bei einem Quotienten von Logarithmen spielt das keine Rolle, denn Logarithmen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich nur durch eine Konstante, die gekürzt werden kann. Es ist also

$$\frac{\ln(15)}{\ln(2)} = \frac{\lg(15)}{\lg(2)} = \frac{\log_a(15)}{\log_a(2)}.$$

◁

15.15 Übung Häufig muss man die Term zuerst umarbeiten, um die Terme mit den Exponenten zu isolieren. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5$$

Wir sehen, dass der Term e^x und $e^{-x} = 1/e^x$ auftaucht. Wir können vorübergehend substituieren $q = e^x$. Damit sieht die Gleichung folgendermassen aus

$$\frac{1}{2}(q - \frac{1}{q}) = 5$$

und weiter

$$q^2 - 1 = 10q \quad \text{oder} \quad q^2 - 10q - 1 = 0$$

Nun haben wir eine quadratische Gleichung, deren Lösungen entweder mit der Mitternachtsformel, der pq-Formel oder mit quadratischem Ergänzen gefunden werden. Mit Ergänzung folgt

$$(q-5)^2 - 25 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad q = 5 \pm \sqrt{26} = 5 \pm 5.1$$

und $q_{1,2} = \{-0.1, 10.1\}$. Zurücksubstituiert ist $e^x = 10.1$ Die negative Lösung -0.1 fällt weg, weil die Exponentialfunktion nie negativ ist. Somit folgt für x

$$x = \ln(10.1) = 2.31$$

Zur Kontrolle können wir noch testen, dass

$$10.1 - \frac{1}{10.1} = 10.$$

◁

15.16 Übung Wir betrachten die Gleichung $2 = 3^{-0.1t}$. Es gibt nur einen Term mit einem Exponenten und dieser ist schon isoliert. Wir können also auf beiden Seiten den Logarithmus und das Potenzgesetz anwenden

$$2 = 3^{-0.1t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \log(2) = (-0.1t)\log(3)$$

Mit 10 multiplizieren führt auf

$$10\log(2) = -t\log(3) \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -10\frac{\log(2)}{\log(3)} = -10\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = -6.31$$

◁

15.17 Übung Wir suchen z für die Gleichung $125 = \dfrac{81}{1+5e^{-2z}}$. Erster Schritt, die Unbekannte isolieren. Wir können z.B. das Reziproke hinschreiben und dann weiter umformen

$$\frac{1}{125} = \frac{1+5e^{-2z}}{81} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{81}{125} - 1 = 5e^{-2z}$$

weiter wird

$$\frac{-44}{125} = 5e^{-2z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{-44}{625} = e^{-2z}$$

Nun wissen wir aber, dass eine Potenz immer grösser als 0 sein muss, oder anders, wir keinen Logarithmus einer negative Zahl bestimmen können. Deshalb ist der Schluss, dass diese Gleichung keine Lösunge hat, also $z = \varnothing$, zumindest für $z \in \mathbb{R}$. ◁

15.18 Übung Wir such x aus der Gleichung

$$\frac{5e^x}{e^x+1} = a$$

Um Fehler zu vermeiden, sollte man Terme substituieren, die möglichst einfach sind, etwa $e^x = q$

$$\begin{aligned}
\frac{5e^x}{e^x+1} &= a \\
5q &= a(q+1) = aq + a \\
5q - aq &= a \\
q &= \frac{a}{5-a} = e^x \\
x &= \ln\left(\frac{a}{5-a}\right)
\end{aligned}$$

◁

Aus den Übungen ziehen wir folgenden Schluss, den wir als Rezept anpreisen.

15.19 Rezept Lösen von Exponentialgleichungen

(1) Isoliere die Exponentialterme

(2) dann

- Falls möglich, bilde auf beiden Seiten Terme zur gleichen Basis und setzte dann die Exponenten gleich.
- Sonst nimm den (natürlichen) Logarithmus auf beiden Seiten und verwende die Potenzregel.

15.20 Übung Wir suchen x aus der Gleichung $2^x + 3^x = 7^x$. Wir versuchen unser Rezept anzuwenden. Keine der drei oder zwei Möglichkeiten ist durchführbar. Somit bleibt nur eine numerisches Verfahren. Was man allerdings sieht, ist, dass $x = 0$ auf $1 + 1 > 1$ und $x = 1$ $2+3 < 7$. Wir belassen es hier und stellen fest, man kann (analytisch) nicht alle Gleichungen lösen. $\triangleleft$

Praktische Probleme

15.21 Übung Nepomuk hat Fr. 2000.– auf einem Konto angelegt. Die Bank zahlt 1.5% Zinsen pro Jahr. Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion für den Kontostand in Abhängigkeit von der Zeit?
Es ist $A_0 = 2000$. Nach einem Jahr ist der Stand $A_0(1+0.015)$, in zwei $A_0(1+0.015)(1+0.015)$ und in t Jahren $A_0(1 + 0.015)^t$. Die Funktion ist mit diesen Bezeichnungen $f(t) = 2000 \cdot (1.015)^t$.
Der Kontostand in 4 Jahren ist also $f(4) = 2000 \cdot (1.015)^4 = 2000 \cdot 1.06 = 2122.70$.
Wann erreicht er einen Stand von Fr. 2250? Es ist $2250 = 2000 \cdot 1.015^x$ und somit $x \ln(1.015) = \ln\left(\frac{2250}{2000}\right)$. Damit wird x zu $x = \ln\left(\frac{2250}{2000}\right)/\ln(1.015) = 7.91 \approx 8$. Es braucht knapp 8 Jahre. $\triangleleft$

15.22 Übung Eine Lotusblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von 0.01 m2. Die bedeckte Teichfläche verdreifacht sich alle zwei Monate. Nach welcher Zeit beträgt die bedeckte Fläche $10m^2$?
Eine Gleichung für dieses Modell kann man schreiben als $F(t) = 0.01 \cdot 3^t$, wobei t die Einheit 2 Monate besitzt. Die Gleichung ergibt für eine Fläche $F(t) = 10 = 0.01 \cdot 3^t$. Die Lösung ergibt sich aus $\ln(10/0.01) = t \cdot \ln(3)$ und $t = \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} = 6.29$. In Jahren $6.29/6 = 1.05$. Es braucht ein gutes Jahr. $\triangleleft$

15.23 Übung Bei einer bestimmten radioaktiven Substanz verringert sich die Zahl der Kerne pro Tag um 9.71% durch radioaktiven Zerfall. Heute besitzt ein Forschungszentrum 2.6 g dieser Substanz.
Wie viel besass es vor 30 Tagen? Die Gleichung ist $A(t) = A_0(1 - 0.0971)^t$. Gesucht ist $A(-30) = 2.6(1 - 0.0971)^{-30}$. Mit Zahlen $A(-30) = 2.6 \cdot 0.903^{-30} = 55.69$.
Die sogenannte Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist eine Stoffgrösse, welche die Zeit angibt, in der sich die Anzahl Kerne halbiert. Formell $1/2 = q^{T_{1/2}}$. Wir bestimmen sie als $\ln(0.5) = T_{1/2} \ln(0.903)$ und $T_{1/2} = \frac{0.5}{0.903} = 6.79$ Tage.
Um wie viele Prozent verringert sich die Zahl der Kerne pro Stunde? Wir suchen das Verhältnis $A(1/24)/A(0) = 0.903^{1/24} = 0.9958$. Die Abnahme ist $(A(0) - A(1/24))/A(0)$ oder $1 - A(1/24)/A(0) = 1 - 0.9958 = 0.0042 = 0.42\%$. $\triangleleft$

15.1.4 Ungleichungen**

Bei Ungleichungen stellt sich stets die Frage, ob eine Umformung die Ordnungsrelation, d.h. Grösser- oder Grösser-gleich-Zeichen ändert. Dies ist stets der Fall, wenn mit einer negativen Zahl multipliziert oder das Reziproke angesetzt wird. Aber auch, wenn auf beiden Seiten eine Funktion verwendet wird, die monoton fällt, wird es schwierig. Häufig wird mit Variablen hantiert, deren Wert man noch nicht kennt. Dann ist eine Fallunterscheidung angesagt.
Im Folgenden werden wo nötig die Exponential- und die Logarithmusfunktion verwendet. Hier ist es günstig, die Basis e zu nehmen, also $\exp(x) = e^x$, respektive $\log_e(x) = \ln(x)$. Denn diese sind streng monoton steigend, sodass aus $x_1 > x_2$ immer $\exp(x_1) > \exp x_2$ folgt. Genau so auch für $(x_1 > x_2) \Rightarrow (\ln(x_1) > \ln(x_2))$.

15.24 Übung Wir betrachten die Ungleichung $2^{x^2-3x} - 16 \geqslant 0$. Diese kann man umschreiben als $2^{x^2-3x} \geqslant 16 = 2^4$. Sodann kann man die Exponenten vergleichen

$$x^2 - 3x \geqslant 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1.5)^2 - 2.25 \geqslant 4$$

$$\pm(x-1.5) \geqslant \pm\sqrt{6.25}$$

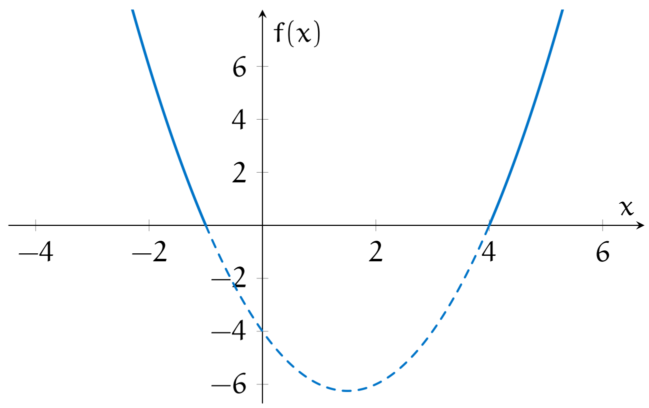
Dahinter verstecken sich vier Ungleichungen, nämlich

$$\begin{vmatrix} +(x-1.5) \geqslant +2.5 \\ +(x-1.5) \geqslant -2.5 \\ -(x-1.5) \geqslant -2.5 \\ -(x-1.5) \geqslant +2.5 \end{vmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x \geqslant 4 \\ x \geqslant -1 \\ x \leqslant 4 \\ x \leqslant -1 \end{vmatrix}$$

Die dominanten Werte sind

$$\begin{vmatrix} x \geqslant 4 \\ x \leqslant -1 \end{vmatrix}$$

Nun testen wir die zwei Lösungen $\{4, -1\}$ und finden sie passend. Dazu machen wir noch eine Graphik mit folgendem Aussehen:



◁

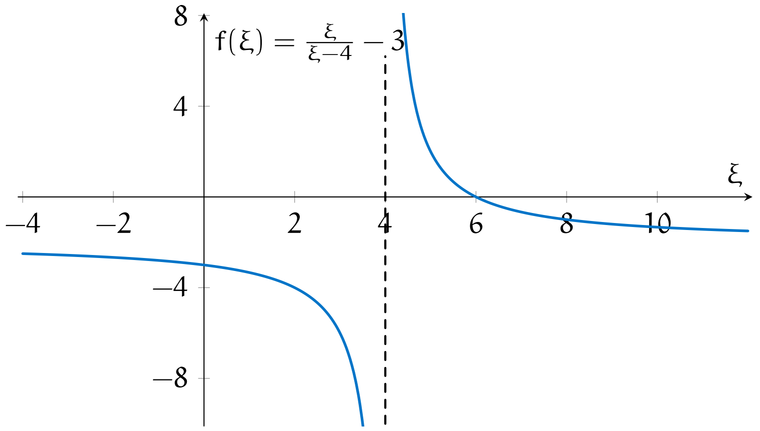
15.25 Übung Wir lösen das folgende Problem: $\dfrac{e^x}{e^x - 4} \leqslant 3$. Gerne würden wir beide Seiten mit dem Nenner $e^x - 4$ multiplizieren. Wir wissen allerdings nicht, ob dieser grösser oder kleiner als 0 ist. Wir machen deshalb eine Fallunterscheidung. Weiters bemerken wir, dass der Nenner nicht Null sein darf.
Fall 1: Es ist der Nenner $e^x - 4 > 0$ und deshalb $e^x > 4$. Es folgt zusätzlich

$$e^x \leqslant 3(e^x - 4), \quad 12 \leqslant 2e^x \quad \text{und somit} \qquad e^x \geqslant 6$$

schliesslich $x \geqslant \ln(6)$.
Fall 2: Es ist $e^x - 4 < 0$ oder $e^x < 4$ und somit $e^x \geqslant 3(e^x - 4)$. Damit folgt $e^x \leqslant 6$. Voraussetzung und Resultat stimmen für $e^x < 4$ überein

$$(e^x \leqslant 6) \wedge (e^x < 4) \qquad \Rightarrow \qquad e^x < 4.$$

Damit $x < \ln(4)$. Es gibt also zwei Lösungen. Das Schaubild für $\xi = \exp(x)$ $f(x) = \frac{\xi}{\xi - 4} - 3$ zeigt die Übereinstimmung.

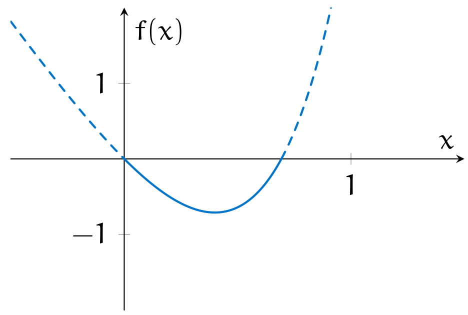


◁

15.26 Übung Man finde den Bereich von x, für den die Ungleichung $xe^{2x} < 4x$ gilt. Wir schreiben um und finden

$$x(e^{2x} - 4) < 0$$

Wann ist das Produkt zweier Zahlen negativ? Wenn ein Term negativ und der andere positiv ist. Damit ergeben sich zwei Fälle.
Fall 1: $x > 0$ und $e^{2x} < 4$. Dies führt über $e^x < 2$ zu $x < \ln(2)$.
Fall 2: $x < 0$ und $e^x > 2$ oder $x > \ln(2)$. Die zwei Aussagen widersprechen sich, sind also nicht gültig. Somit ist die Lösung das Intervall $(0, \ln(2))$. Graphisch $(\ln(2) \approx 0.69314)$



◁

Wir ziehen aus diesen Beispielen den Schluss, dass die Bestimmung von Ungleichungen einges kniffliger ist als das Lösen von Gleichungen.

15.2 Logarithmusgleichungen und Ungleichungen

15.2.1 Logarithmusgleichungen

Die Lösungsmethoden sind ganz analog zu den Exponentialgleichungen. Eigentlich ist nur die $\exp_a(x)$ Funktion mit der $\log_a(x)$-Funktion zu vertauschen. Wir kommen deshalb am Anfang des Abschnitts auf das Rezept und lassen den Übungen folgen.

15.1 Rezept Lösen von Logarithmusgleichugen

(1) Den Term mit der Log-Funktion isolieren,

(2) dann

- Falls möglich, beide Seiten der Gleichung als Logarithmen zur selben Basis ausdrücken und die Argumente gleichsetzen,
- andernfalls, die Logarithmusfunktion als Exponentialgleichung umschreiben.

15.2 Übung Die einfachste Gleichung ist vom Typ $\log_3(x) = 5$. Die Lösung setzt beim Anwenden der Exp-Funktion auf beiden Seiten der Gleichung, also

$$\log_3(x) = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exp_3[\log_3(x)] = x = \exp_3(5) = 3^5$$

◁

15.3 Übung Wir betrachten die Gleichung $\log_{17}(1-3x) = \log_{17}\left(x^2-3\right)$. Die Basis ist bei beiden Termen 17. Deshalb kann man die Argumente, die Ausdrücke in den Klammern, gleichsetzen. Es folgt

$$1-3x = x^2-3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+3x-4=0$$

Mit quadratischem Ergänzen

$$(x+1.5)^2-2.25-4=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1.5=\pm\sqrt{6.25}=\pm 2.5$$

und somit $x = -1.5 \pm 2.5 = \{1, -4\}$. ◁

15.4 Übung Wir suchen x aus $2-\ln(x-3) = 1$. Zuerst vereinfachen wir zu $\ln(x-3) = 1$. Dann nehmen wir die Exponentialgleichung und wenden sie auf beiden Seiten der Gleichung an:

$$\exp(\ln(x-3)) = x-3 = \exp(1) = e$$

Somit ist $x = e+3$. ◁

15.5 Übung Wir lösen $\log_6(x+4)+\log_6(3-x) = 1$ nach x auf. Wir wenden die Produktregel an, d.h. die Summe der Logarithmen ist der Logarithmus des Produkts, also

$$\log_6(x+4)+\log_6(3-x) = \log_6\left((x+4)(3-x)\right) = 1$$

Wir nehmen die Exp-Funktion beidseits

$$\exp_6[\log_6\left((x+4)(3-x)\right)] = (x+4)(3-x) = \exp_6(1) = 6$$

Und nun sind wir wieder bei einer quadratischen Gleichung. Wir schreiben sie

$$(x+4)(x-3) = -6 = x^2+x-12 = (x-0.5)^2-0.25-12$$

und daruaus

$$(x-0.5)^2 = 6.25 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.5 \pm 2.5 = \{3, -2\}.$$

◁

15.6 Übung Folgendes steht an: $\log_2(x+3) = \log_2(6-x)+3$. Wir sortieren um und erhalten

$$\log_2(x+3) - \log_2(6-x) = 3$$

Mit der Quotientenregel und der Exp-Funktion

$$\log_2\left(\frac{x+3}{6-x}\right) = 3$$
$$\exp_2[\log_2\left(\frac{x+3}{6-x}\right)] = \frac{x+3}{6-x} = \exp_2(3) = 2^3 = 8$$

Und weiter

$$\frac{x+3}{6-x} = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+3 = 48-8x$$

und schliesslich $9x = 45$ und damit $x = 5$. ◁

15.7 Übung Übung macht den Meister. Es ist gegeben $1 + 2\log_4(x+1) = 2\log_2(x)$. Man sieht sofort die unterschiedlichen Basen der Logarithmen. Logarithmen unterschiedlicher Basen unterscheiden sich durch einen konstanten Faktor, also $\log_2(x) = \log_4(x) \cdot c$. Dieser ist hier $c = 1/\log_4(2) = 2$. Damit wird die Gleichung mit gleichen Basen

$$1 + 2\log_4(x+1) = 4\log_4(x)$$

Nun wenden wir die Potenzregel an und erhalten

$$1 + \log_4(x+1)^2 = \log_4(x^4)$$

Nun folgt die Quotientenregel und dann die Potenzregel

$$\log_4(x+1)^2 - \log_4(x^4) = \log_4\left(\frac{(x+1)^2}{x^4}\right) = 2\log_4\left(\frac{(x+1)}{x^2}\right) = -1$$

Wir dividieren beide Seiten durch 2 und nehmen dann die Exp-Funktion

$$\exp_4[\log_4\left(\frac{(x+1)}{x^2}\right)] = \frac{(x+1)}{x^2} = \exp_4(-1/2) = 4^{-1/2} = 1/\sqrt{4} = 1/2$$

Es ist also

$$\frac{(x+1)}{x^2} = 1/2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 2x - 2 = 0$$

Schon wieder eine quadratisch Gleichung mit der Lösung

$$(x-1)^2 - 1 - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 1 = \pm\sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 \pm \sqrt{3}$$

Die Lösung $1-\sqrt{3}$ ist negativ und deshalb nicht zulässig, denn in der Ausgangsgleichung wird $\log_4(x)$ verlangt. Irgendwo ist eine Gewinnumformung passiert. ◁

Wichtig 13. Bei Logarithmusgleichungen können aufgrund der Potenzregel Gewinnumformungen geschehen. Deshalb muss man die Resultate an der Ausgangsgleichung testen. ⊣

15.2.2 Ungleichungen mit Logarithmen**

Wir wir bereits wissen, sind Ungleichungen schwieriger als Gleichungen. Wir zeigen ein paar Beispiele.

15.8 Übung Es ist die folgende Ungleichung gegeben: $\frac{1}{\ln(x)+1} \leqslant 1$. Der Nennen darf nicht Null sein. Damit ist $\ln(x) = 1$ nicht erlaubt und damit muss $x \neq e$ sein. Das werden wir berücksichtigen. Wenn wir jeweils die reziproken Brüche nehmen, dann ändert sich das Vorzeichen, also

$$\frac{1}{\ln(x)+1} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x)+1 \geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x) \geqslant 0$$

Nun würde daraus $x \geqslant 1$ folgen. Weil aber $x = 0$ nicht zulässig ist, wird $x > 1$ daraus. ◁

15.9 Übung Wir untersuchen die Ungleichung

$$(\log_2(x))^2 < 2\log_2(x) + 3$$

Nach Rezept werden die Log-Terme auf einer Seite gesammelt

$$(\log_2(x))^2 - 2\log_2(x) < 3$$

Wir setzen $q = \log_2(x)$ und sehen den quadratischen Ausdruck $q^2 - 2q < 3$. Mit quadratischem Ergänzen folgt $(q-1)^2 - 1 < 3$ oder $q - 1 < \pm\sqrt{4} = \pm 2$, daraus $q < 1 \pm 2 = \{3, -1\}$. Die erste Lösung $x_1 = -1$ ergibt $\log_2(x_1) = -1$ und daraus $\exp_2(\log(x_1)) = x = exp_2(-1) = 1/2$. Damit Es bleibt noch $q < 3$ und daraus $\log_2(x_2) < 3$ und weiter $\exp_2(\log_2(x_2)) = x < \exp_2(3) = 2^3 = 8$. Zusammen haben wir $x_1 < 1/2$ und $x_2 < 8$. Die Bedingung zur Lösung x_1 dominiert die andere, also ist $x < 1/2$.

◁

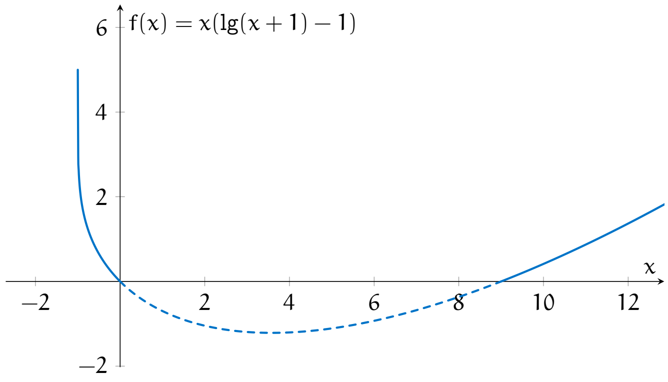
15.10 Übung Wir versuchen uns an der Ungleichung $x\lg(x+1) \geqslant x$. Als erstes stellen wir fest, dass $x + 1 > 0$ aus dem Definitionsbereich des Logarithmus sein muss. Wir stellen um und schreiben

$$x(\lg(x+1) - 1) \geqslant 0$$

Strukturell sieht die Ungleichung wie ein Produkt $p \cdot q \geqslant 0$ aus. Ein Produkt ist positiv, wenn entweder beide Multiplikanden positiv sind oder beide negativ. Wir machen die Fallunterscheidung.

Fall 1: $x \geqslant 0$ und $\lg(x+1) - 1 \geqslant 0$, daraus $\exp_{10}(\lg(x+1)) = x + 1 \geqslant \exp_{10}(1) = 10$ und somit $x \geqslant 9$.

Fall 2: $x \leqslant 0$ und $\lg(x+1) - 1 \leqslant 0$ und analog oben $x \leqslant 9$. Nun fassen wir die dominanten Ungleichungen zusammen. Zum einen ist $x \geqslant 9$ bestimmend. Zum anderen muss $x \leqslant 0$ sein und aus dem Definitionsbereich muss $x > -1$ sein. Die Wertemenge für x ist also $x \in (-1, 0] \cup [9, \infty)$. ◁



$f(x) = x(\lg(x+1) - 1)$
x

Aufgaben

2.11 Löse folgende Gleichungen

(a) $\log_2\left(x^3\right) = \log_2(x)$

(b) $\log_5\left(18 - x^2\right) = \log_5(6 - x)$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) = -3$

(d) $\lg(x^2 - 3x) = 1$

(e) $\lg\left(\frac{x}{10^{-3}}\right) = 4.7$

(f) $10 \log\left(\frac{x}{10^{-12}}\right) = 150$

(g) $3\ln(x) - 2 = 1 - \ln(x)$

(h) $\log_5(2x + 1) + \log_5(x + 2) = 1$

(i) $\ln(x + 1) - \ln(x) = 3$

(j) $2\log_7(x) = \log_7(2) + \log_7(x + 12)$

(k) $\log_3(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x) + 8$

(l) $(\lg(x))^2 = 2\lg(x) + 15$

(m) $\ln(x^2) = (\ln(x))^2$

11 **(a)** Es folgt $x^3 = x$ und $x^2 = 1$ sowie $x = 1$. $x = -1$ ist nicht im Definitionsbereich.

(b) Gleiche Basis, somit $18-x^2 = 6-x$, $x^2-x = 12$, quadratische Ergänzung: $(x-1/2)^2-1/4 = 12$, $x - 1/2 = \pm\sqrt{12.25} = \pm 3.5$, $x = 0.5 \pm 3.5 = \{4, -3\}$.

(c) $\exp_{1/2}(\log_{1/2}(2x - 1)) = \exp_{1/2}(-3) = 0.5^-3 = 2^3 = 8$ damit $2x - 1 = 8$, $2x = 9$, $x = 9/2$.

(d) $x^2 - 3x = 10$, $(x - 1.5)^2 - 2.25 = 10$, $x - 1.5 = \pm\sqrt{12.25}$, $x = 1.5 \pm 3.5 = \{5, -2\}$.

(e) $\frac{x}{10^{-3}} = 10^{4.7}$, $x = 10^{4.7-3} = 10^{1.7}$.

(f) $\lg(\frac{x}{10^{-12}}) = 15$, $x = 10^{15-12} = 1000$

(g) Substitution $3q - 2 = 1 - q$, $4q = 3$, $q = 3/4 = \ln(x)$, $x = \exp(3/4) = e^{3/4}$.

(h) Produktregel $\log_5\left((2x + 1)(x + 2)\right) = 1$, $(2x + 1)(x + 2) = 5^1 = 5$, $2x^2 + 4x + x + 2 = 5$. $2x^2+5x = 3$, $x^2+5/2x = 3/2$ quadratisches Ergänzen $(x+5/4)^2-25/16 = 3/2$, $(x+5/4)^2 = 49/16$, $x = -5/4 \pm 7/4 = \{-3, 0.5\}$. $x - 3$ nicht in Definitionsbereich, also $x = 0.5$.

(i) Definitionsbereich $x > 0$, Quotientenregel $\ln(\frac{x+1}{x} = 3$, $\frac{x+1}{x} = \exp(3)$, $x+1 = xe^3$, $x(1-e^3) = -1$, $x = \frac{-1}{1-e^3} = \frac{1}{e^3-1}$.

(j) Gleiche Basis, Produktregel $2\log_7(x) = \log_7(2(x+12))$, damit $x^2 = 2x+24$, $x^2-2x = (x-1)^2-1 = 24$, $(x - 1)^2 = 25$, $x - 1 = \pm 5$, $x = 1 \pm 5 = \{6, -4\}$, $x = -4$ nicht zulässig, also $x = 6$.

(k) Basiswechsel von $1/3$ zu 3, also $\log_{1/3}(x) = \log_3(x)/\log_3(1/3)$, nun ist $\log_3(1/3) = -1$, denn $3^{-1} = 1/3$. Damit $\log_3(x) - (-1) \cdot \log_3(x) = 8$, $\log_3(x) = 8/2 = 4$ und $x = \exp_3(4) = 3^4 = 81$.

(l) Substitution $q = \lg(x)$, somit $q^2 = 2q+15$, quadratisch ergänzen $(q-1)^2-1 = 15$, $(q-1)^2 = 16$, $q = 1 \pm 4$. Zurücksetzen $\lg(x) = 4$, $x = 10^4$.

(m) Substitution und Potenzregel $q = \ln(x)$ und $2 \cdot q = q^2$, $2 = q = \ln(x)$, $x = e^2$. Es gibt aber noch die Lösung $x = 0$.

2.12 Löse die Ungleichungen

(a) $\frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0$

(b) $x\ln(x) - x > 0$

(c) $10\lg\left(\frac{x}{10^{-12}}\right) \geqslant 90$

(d) $5.6 \leqslant \lg\left(\frac{x}{10^{-3}}\right) \leqslant 7.1$

(e) $\ln(x^2) \leqslant (\ln(x))^2$

12 **(a)** Wegen $\ln(x)$ muss $x > 0$ sein. Zudem ist x^2 grösser als null. Somit reduziert sich die Ungleichung zu $1 - \ln(x) < 0$. Anders $1 < \ln(x)$ und $e < x$. Als Intervall geschrieben $x \in (e, \infty)$.

(b) Es muss $x > 0$ sein. Somit kann man durch x teilen, ohne Relationsänderung. Somit $\ln(x) > 1$ und $x > e$.

(c) Division durch 10: $\lg(\frac{x}{10^{-12}}) \geqslant 9$, Exp-Funktion: $\frac{x}{10^{-12}} \geqslant 10^9$ und $x \geqslant 10^{-3}$.

(d) Exp-Funktion anwenden: $10^{5.6} \leqslant \frac{x}{10^3} \leqslant 10^{7.1}$, mit 10^{-3} multiplizieren, resp. Exponenten addieren $10^{2.6} \leqslant x \leqslant 10^{4.1}$.

(e) Klar muss $x > 0$ sein. Da $\ln(x)$ für $x < 1$ kleiner als 1 ist, muss man eine Fallunterscheidung vornehmen. 1) Für $x < 1$ ist $2 \geqslant \ln(x)$, also $e^2 \geqslant x$. $x < 1$ geht vor. 2) $x > 1$ und somit $\ln(x) > 0$ führt zu $2 \leqslant \ln(x)$ und $e^2 \leqslant x$. Wir haben also zwei Bereiche: $(0, 1)$ und $[e^2, \infty)$.

2.13 Finde x

(a) $5^x = 20$ **(b)** $2 \cdot 3^x = 4$ **(c)** $\exp_3(x+1) = 8$ **(d)** $3^x = 9^{6x+1}$ **(e)** $2^x \cdot 3^{x+1} = 4^{x+2}$
(f) $2^{-2x} = 7$ **(g)** $(\frac{1}{2})^x = 8$

13 **(a)** $\ln(5^x) = \ln(20) = x\ln(5)$ und $x = \dfrac{\ln(20)}{\ln(5)} = 1.86$

(b) $\ln(2) + (x+1)\ln(3) = \ln(4)$, dann $(\ln(4) - \ln(2))/\ln(3) = x+1$ und $\ln(2)/\ln(3) - 1 = x$

(c) $\log_3(\exp_3(x+1) = \log_3(8) = x+1$ und $x = \dfrac{\ln(8)}{\ln(3)} - 1$, $x = 3-1 = 2$

(d) $3^x = 9^{6x+1}$, da $9 = 3^2$ schreiben wir $3^x = 3^{2(6x+1)}$ und vergleichen die Exponenten $x = 12x+2$ und $x = -2/11$.

(e) $2^x \cdot 3^{x+1} = 4^{x+2}$, mit Produktregel $\ln(2^x) + \ln(3^{x+1}) = \ln(4^{x+2})$ und Potenzregel $x\ln(2) + (x+1)\ln(3) = (x+2)\ln(4)$, x isolieren $x(\ln(2)+\ln(3)-\ln(4)) = 2\ln(4) - \ln(3)$ und $x = \dfrac{2\ln(4)-\ln(3)}{\ln(2)+\ln(3)-\ln(4)} = 4.13$

(f) $2^{-2x} = 7$, $-2x\ln(2) = \ln(7)$, $2x = -\dfrac{\ln(7)}{\ln(2)}$, $x = -\dfrac{\ln(7)}{2\ln(2)} = 1.40$

(g) Schematisch: $x\ln(0.5) = \ln(8)$, $x = \ln(8)/\ln(0.5) = -3$, oder $(\frac{1}{2})^x = 2^3 = (1/2)^{-3}$, Koeffizientenvergleich: $x = -3$.

2.14 Schreibe die grossen Zahlen als Dezimalzahlen: $A = 4^{15}$, $B = 7^{101}$ und $C = 16^{16^{16}}$

14 Wir suchen $4^{15} = 10^x$ mit $x = 15\lg(4) = 9.031$, $10^{9.031} = 10^{0.031}10^9 = 1.074 \cdot 10^9$; $101\lg(7) = 85.35$, damit $10^{85.35} = 10^{0.35}10^{85} = 2.24 \cdot 10^{85}$; $16^{16} = 10^x$, deshalb $x = 16\lg(16) = 19.27$ und $16^x = 10^y$, $y = 19.27\lg(16) = 23.20$, also $16^{16^{16}} = 10^{0.20}10^{23} = 1.58 \cdot 10^{23}$.

2.15 Um wie viele Prozent müsste die Zahl der radioaktiven Kerne einer Substanz pro Jahr abnehmen, wenn ihre Zahl in 50 Jahren 1 Billion (10^{12}) Mal kleiner sein soll als heute?

15 Ein Zefallsprozess wird als $N(t) = N_0(1-p)^t$ modelliert. Hier ist $N(t) = 10^{-12}N_0$, $t = 50$ und p gesucht. N_0 kann man kürzen, $(10^{-12})^{1/50} = (1-p)$ und $p = 1-(10^{-12})^{1/50}$ oder $p = 1-10^{-12/50} = 1-0.57544 = 0.42456$ oder 42.456%.

2.16 Herr Lanzo besass Ende 2014 auf seinem Sparkonto CHF 126'450.–. Er rechnet aus, dass Ende 2026 der Kontostand CHF 168'080.– sein wird, falls sich der Zinsfuss nicht ändert und er weder etwas abhebt noch etwas dazulegt. Wie gross ist demnach der Zinsfuss? [60‰]

16 Die Formel für den Kapitalzuwachs ist $K(t) = K_0(1+p)^t$. Es ist $t = 12 = 2016 - 2014$. Umgeformt $\frac{K(t)}{K_0} = (1+p)^t$, weiter $\left(\frac{K(t)}{K_0}\right)^{1/t} = 1+p$ und $p = \left(\frac{K(t)}{K_0}\right)^{1/t} - 1$. Mit Zahlen $p = \left(\frac{168080}{126450}\right)^{1/12} - 1 = 1.329^{1/12} - 1 = 0.024$ oder 2.4%.

2.17 Beim exponentiellen Wachstum einer Grösse nimmt diese jedes Jahr immer wieder um p % zu. Berechnen Sie, für ein allgemeines p exakt, sowie numerisch und sinnvoll gerundet für p % = 5 %, den Wert der Verdoppelungszeit T2 , also derjenigen Zeit, die vergehen muss, bis sich der Wert dieser Grösse jeweils wiederum verdoppelt hat. [40 ‰]

17 Allgemein wird jährliches Wachstum beschrieben mit $A(t) = A_0(1+p)^t$. Für die Verdoppelung ist $A(t) = 2A_0$, somit $2 = (1+p)^{T_2}$. Mit $\ln(2) = T_2 \cdot \ln(1+p)$ folgt $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1+p)}$.
Numerisch (Taschenrechner) folgt $T_2 = \ln(2)/\ln(1.05) = 14.21$ [Jahre]. [Finde Kaufleute wissen, dass sich die Verdoppelung aus der Faustformel 70/p% ergibt, also hier $70/5 = 14$. Denn 70% ist ungefähr $\log(2)$ und $\ln(1+p) \approx p$ für kleine p.]

Kapitel 16

Lineare Gleichungssysteme

16.1 Begriffe

Bis hier hin haben wir nur Gleichungen mit einer Unbekannten betrachtet. Nun erweitern wir die Anschauung auf Gleichungen mit mehreren Variablen. Typischerweise sieht eine solche Gleichung mit drei Unbekannten wie in der folgenden Definition aus:

Definition 21. Eine *lineare Gleichung* mit drei Variablen hat die Form

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d,$$

wobei die Koeffizienten a, b und c reelle Zahlen sind und mindestens einer nicht null ist.

Anmerkung 16.1. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist vom Aussehen $ax + by = c$.

Anmerkung 16.2. Für lineare Gleichungen mit noch mehr Termen schreibt man

$$a_1x_1 + a_2x_2 + +a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = d.$$

Wir werden vor allem Gleichungen mit 3 und 2 Variablen betrachten.

Bis auf weiteres sollen die untersuchten Gleichungssysteme gleich viele Unbekannte wie Variablen aufweisen. Lineare Systeme mit zwei Unbekannten sollen zwei Gleichungen umfassen etc.

Definition 22. Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) ist eine Menge linearer Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten, die alle gleichzeitig erfüllt sein sollen.

Im deutschsprachigen Raum, in Gegensatz zu den Angelsachsen, werden Gleichungssysteme in Vertikalen eingefasst. Ein einfaches LGS ist:

$$\left| \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 5 \\ x & = & 6 \end{array} \right|$$

Was ist neu? Bis anhin haben wird Gleichungen mit einer Variablen betrachtet. Jetzt sind es mehrere. Gesucht wird ein Paar oder Tupel von Lösungen. Diese können wieder als Elemente der Lösungsmengen angeschaut werden, die sich aus dem Durchschnitt der Mengen ergibt, die jeweils eine Gleichung befriedigen.
In diesem sehr einfachen Beispiel ist ein Variable schon isoliert, nämlich $x = 6$. Diese Lösung kann man in die erste Gleichung einsetzen und bekommt:

$$6 + 2y = 5 \quad \text{und somit} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Die Lösungsstrategie ist somit erkennbar: Wie müssen jede Unbekannte am Schluss isolieren. Um dies zu erreichen gibt es mehrere Verfahren, die je nach Struktur des Systems einfacher oder schwieriger sind. Es gibt aber auch für Systeme von 2 und 3 Gleichungen todsichere Methoden.

16.2 Substitutions- oder Einsetzverfahren

Im vorherige Beispiel haben wir genau dies Methode angewendet. Ein weiteres Beispiel soll das Verfahren erklären.

Zwei Unbekannte

Wir beginnen mit einem LGS mit 2 Unbekannten.

$$\left| \begin{array}{rcr} x + 3y &=& 9 \\ 4x + 2y &=& 12 \end{array} \right|$$

Die Gleichungen haben die zwei Unbekannten x und y. Wir isolieren eine dieser Variablen. Das x in der ersten Gleichung steht schon alleine, so dass die Isolierung einfach geht. Die erste Gleichung ist umgeschrieben:

$$x = 9 - 3y$$

Diesen Wert setzen wir in die zweite Gleichung für x ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 4(9 - 3y) + 2y &= 12 \\ 36 - 12y + 2y &= 12 \\ -10y &= 12 - 36 \\ 10y &= 24 \\ y &= 2.4 \end{aligned}$$

Diesen Wert setzen wir wieder in die Gleichung mit dem isolierten x ein und erhalten:

$$\begin{aligned} x &= 9 - 3 \cdot 2.4 \\ &= 9 - 7.2 = 1.8 \end{aligned}$$

Die Lösung ist also das Tupel $(1.8, 2.4)$. Zur Kontrolle setzen wir die Werte ein: Die erste Gleichung $1.8 + 7.2 = 9$ stimme und die zweite $4 \cdot 1.8 + 2 \cdot 2.4 = 7.2 + 4.8 = 12$ stimmt auch.

Drei Unbekannte

Nun nehmen wir eine System mit drei Unbekannten in Angriff. Das LGS lautet:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} 2x &-& y &+& z &=& 1 \\ 2x &+& 2y &-& z &=& 1 \\ 3x &+& 6y &+& 4z &=& 9 \end{array} \right|$$

Nun wird die Rechnerei etwas aufwendiger, denn es sind zwei aufeinanderfolgenden Einsetzungen oder Substitutionen notwendig. Die Wahl der Variablen und die Reihenfolge ist dem Ausführenden überlassen. Am besten fängt man aber bei der oder den Gleichungen an, die die einfachsten Koeffizienten aufweisen.

Als erstes nehmen wir die erste Gleichung und formen nach z um, so dass folgt $z = 1-2x+y$. Dies setzen wir in Gleichung zwei und drei ein:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & - & (1-2x+y) & = & 1 \\ 3x & + & 6y & + & 4(1-2x+y) & = & 9 \end{array} \right|$$

Das führt zu

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 4x & + & y & = & 2 \\ -5x & + & 10y & = & 5 \end{array} \right|$$

Aus der ersten Gleichung isolieren wir y, d.h. $y = 2-4x$ und setzen in die untere Gleichung ein:

$$\left| \begin{array}{rcrcr} -5x & + & 10(2-4x) & = & 5 \end{array} \right|$$

Diese Gleichung lösen wir nach y auf

$$\begin{aligned} -5x + 10(2-4x) &= 5 \\ -5x + 20 - 40x &= 5 \\ 45x &= 15 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nun haben wir einen ersten Teil der Lösung gefunden. Jetzt müssen wir wieder zurückeinsetzen,

$$y = 2 - 4y = 2 - 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Dies ist der zweite Teil und der dritte folgt mit $z = 1 - 2\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.
Die Lösung ist also $\mathbb{L} = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$.

16.3 Eliminationsverfahren

Die wesentliche Idee des Verfahrens beruht auf der Tatsache, dass man die linken und die rechten Seiten von Gleichungen addieren oder subtrahieren kann und eine neue Gleichung bekommt. Schematisch kann man sich vorstellen, dass $a = b$ und $c = d$ ist. Dann gilt natürlich auch, dass $a + c = b + d$ oder auch $a - c = b - d$.

Zwei Unbekannte

Wie gehen wieder vom selben System aus wie oben, nämlich

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 9 \\ 4x & + & 2y & = & 12 \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} |\cdot 4 \\ | \end{array}$$

Wir wollen die zwei Gleichungen subtrahieren, nachdem wir die Koeffizienten der zu eliminierenden Variablen durch Multiplikation gleich gemacht haben. Wir wähle x aus und multiplizieren deshalb die erste Gleichung mit 4. Damit wird das Gleichungssystem zu:

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 4x & + & 4 \cdot 3y & = & 4 \cdot 9 \\ 4x & + & 2y & = & 12 \end{array} \right|$$

Jetzt subtrahieren wir die zweite von der ersten und erhalten:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 12y & = & 36 \\ 4x & + & 2y & = & 12 \\ \hline & & 10y & = & 24 \end{array}\right|$$

Damit resultiert $10y = 24$ und somit $y = 2.4$. Diesen Wert setzen wir in ein der ursprünglichen Gleichungen ein und erhalten $x + 3 \cdot 2.4 = 9$ und damit $x = 9 - 7.2 = 1.8$. Gleiches Resultat.

Drei Unbekannte

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & = & 9 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} |\cdot 3 \\ |\cdot 3 \\ |\cdot 2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & 3y & + & 3z & = & 3 \\ 6x & + & 6y & - & 3 & = & 3 \\ 6x & + & 12y & + & 8z & = & 18 \end{array}\right|$$

Wir können irgend zwei Gleichungen wählen, die wir von der dritten subtrahieren. Da die dritte die höchsten Koeffizienten hat, nehmen wir diese als Subtrahend. Also: Gleichung (3)- Gleichung (1) und Gleichung (3)- Gleichung (2) ergibt:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} 15y & + & 5z & = & 15 \\ 6y & + & 11z & = & 15 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} |\cdot 2 \\ |\cdot 5 \end{array}$$

Die nächste Multiplikation soll das y eliminieren. Dazu wird die erste mit 2 und die zweite mit 5 gestreckt.

$$\left|\begin{array}{rcrcr} 30y & + & 10z & = & 30 \\ 30y & + & 55z & = & 75 \\ \hline & & 45z & = & 45 \end{array}\right|$$

Aus der Differenz ergibt sich einfach $z = 1$. Nehme wir z.B. die Gleichung $6y + 11z = 15$, mit $z = 1$ folgt $6y + 11 = 15$ und $6y = 4$ und schliesslich $y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Nun eine Gleichung mit allen drei Variablen, z.B. $2x - y + z = 1$, eingesetzt $2x - \frac{2}{3} + 1 = 1$ führt zu $x = \frac{1}{3}$. Die Lösung $L = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$ stimmt überein.

16.4 Determinantenverfahren

Wir betrachten ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und schreiben:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} |\cdot c|\cdot d \\ |\cdot a|\cdot b \end{array}$$

Zum einen erweitern wir die Gleichungen mit c und d, zum anderen mit d und b. An diesen zwei Systemen wenden wir die Subtraktion an.

$$\left|\begin{array}{rcrcr} acx & + & cby & = & ce \\ acx & + & ady & = & af \\ \hline & & (ad-cb)y & = & af-ce \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{rcrcr} adx & + & dby & = & de \\ bcx & + & bdy & = & bf \\ \hline (ad-bc)x & & & = & de-bf \end{array}\right|$$

Aus den Differenzen, die ja lineare Gleichungen mit einer Unbekannten sind, kann man einfach auslesen:

$$x = \frac{de - bf}{ad - cb} \quad \text{und} \quad y = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

Zum ersten fällt auf, dass beide Brüche denselben Nenner aufweisen, nämlich $ad - bc$. Nenne wir ihn einmal D. Sodann haben auch die Zähler dieselbe Struktur, eine Differenz von Produkte. Die Faktoren dieser Produkte sind entweder Koeffizienten der Gleichungen oder die konstanten Glieder.
Für die Division muss gelten, dass der Nenner $D = ad - bc$ nicht null sein darf. Damit das Gleichungssystem eine Lösung hat, muss $D \neq 0$ sein.
Wir führen ein paar neue Begriffe ein, die sehr nützlich sind.

Definition 23. Eine $m \times n$ *Matrix* (Plural Matrizen) ist eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

In unserem Fall der Koeffizienten des Gleichungssystems kann man sie als Matrix wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Einer quadratischen Matrix – es gilt $n = m$ – kann man eine spezifische Zahl zuordnen. Sie wird *Derminante* genannt und wie folgt berechnet:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Die zwei Zähler der Lösung haben dieselbe Struktur. Deshalb kann man die zwei weiteren Matrizen aufstellen und ihre Determinanten berechnen. Ausgehend von

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}$$

nehmen wir die x-Koeffizienten und die Konstanten, respektive die Konstanten und die y-Koeffizienten, also

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce, \quad \det(C) = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf$$

Damit lassen sich die Lösungen des allgemeinen linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten berechnen als:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

16.1 Übung Wir wenden diese Methode auf unser wohlbekanntes Beispiel an, nämlich

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 9 \\ 4x & + & 2y & = & 12 \end{array} \right|$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 36 = -18$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 36 = -24$$

und damit die Lösungen

$$x = \frac{\det(B)}{\det(A)} = \frac{-18}{-10} = 1.8$$

$$y = \frac{\det(C)}{\det(A)} = \frac{-24}{-10} = 2.4$$

$\triangleleft$

Drei Unbekannte

Gilt diese Methode auch für mehr als zwei Unbekannte? Die Antwort ist ja. Die Berechnung der Determinanten ist ein bisschen gewöhnungsbedürftig.
Wir nehme wieder zum dritten Mal unser Beispiel für 3 Unbekannte, das ist

$$\left| \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & = & 9 \end{array} \right|$$

Die Matrizen sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir wissen, wie man die Determinante rechnet. Das Wundermittel heisst die Regel von Sarrus und sieht graphisch wie folgt aus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Man nimmt die Matrix und setzt zyklisch, d.h. die erste und die zweite, Spalte hinzu. Dann multipliziert man in südöstlicher Richtung und addiert. Weiters multipliziert man in südwestlicher Richtung und subtrahiert. Insgesamt ergibt das 12 Multiplikationen und 6 Additionen pro Matrize, also mal 4.

$$\det(A): \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right.$$

Diese Zahlen lassen sich gut im Kopf rechnen. Es folgt für die Determinante von A: $2\cdot 2\cdot 4+(-1)(-1)3+1\cdot 2\cdot 6-1\cdot 2\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 6-(-1)\cdot 2\cdot 4]=16+3+12-6+12+8=45$

$$\det(B): \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 4 & 9 & 6 \end{array}\right.$$

Die Rechnung ergibt: $8+9+6-18+6+4=15$

$$\det(C): \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right.$$

Wir rechnen: $8-3+18-3+18-8=30$

$$\det(D): \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{array}\right.$$

und hier: $36-3+12-6-12+18=45$

Daraus folgen die Lösungen

$$x=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}, \quad y=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}, \quad z=\frac{45}{45}=1.$$

Schlussfolgerungen: Allgemein nimmt der Rechenaufwand überproportional zu mit der Anzahl unbekannter Variablen. Mit allen drei Methoden ist die zweite Aufgabe viel intensiver und dadurch auch fehleranfällig. Die Cramer'sche Methode für zwei Unbekannte ist sicher die einfachste und schnellste Methode. Sie liefert mit der Koeffizienten-Determinante auch schnell die Information, ob das Gleichungssystem überhaupt lösbar ist.

16.5 Spezielle Gleichungen

16.5.1 Brüche

In Aufgabenbüchern findet man häufig Gleichungssysteme mit Brüchen. Dabei muss man zuerst die Brüche beseitigen, um an das lösbare lineare System zu gelangen.

16.1 Übung Es ist das folgende Problem gestellt:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} \frac{1}{2x-3y} & + & \frac{1}{3x-2y} & = & \frac{-1}{2x-3y} \\ \frac{1}{x} & - & \frac{1}{y} & = & \frac{1}{xy} \end{array}\right|$$

Wir wissen, dass man Gleichungen mit Faktoren multiplizieren kann, ohne dass sich die Lösungen verändern. Wir erweitern also die erste Gleichung mit $(2x-3y)(3x-2y)$ und die zweite mit xy. Daraus folgt das Gleichungssytem

$$\left|\begin{array}{rcrcr} 3x-2y & + & 2x-3y & = & -3x+2y \\ y & - & x & = & 1 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left|\begin{array}{rcrcr} 8x & - & 7y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array}\right|$$

Wir setzen aus der zweite Gleichung $y=x+1$ in die erste ein: $8x-7(x+1)=0$. Daraus $x-7=0$ und damit $x=7$. Daraus $y=x+1=8$. $\triangleleft$

16.5.2 Substitution

Es gibt Bruchgleichungen, die mit einer Multiplikation mit dem Hauptnenner keine lineare Gleichung hervorbringt. Z.B. ergibt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 17$ mit dem Hauptnenner xy die Gleichung $y + x = 17xy$. Dieses gemischte Glied macht die Gleichung zu einer nicht-lineare.
Es kann gelingen, Variablen zu substituieren und damit die Linearität zu erhalten. Dabei löst man das LGS für die neuen Variablen und muss dann nochmals ein Gleichungssystem lösen für die zurückeingesetzten Variablen.

16.2 Übung Wir betrachten das System

$$\left| \begin{array}{rcrcr} \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & = & 17 \\ \frac{1}{x} & - & \frac{1}{y} & = & 1 \end{array} \right|$$

Wir erkennen, dass man mit der Substitution $u = 1/x$ und $w = 1/y$ ein lineares System erhält der Form

$$\left| \begin{array}{rcrcr} u & + & w & = & 17 \\ u & - & w & = & 1 \end{array} \right|$$

Wir setzen in der ersten Gleichung aus der zweiten $u = w + 1$ ein und erhalten $2w + 1 = 17$ und $2w = 16$ sowie $w = 8$. Daraus $u = 9$. Und nun zurück: $x = 1/u$ und $y = 1/y$. Deshalb $x = 1/9$ und $y = 1/8$. $\triangleleft$

16.6 Lösbarkeit

Lineare Gleichungssysteme haben nicht immer eine eindeutige Lösung. Tatsächlich kann man drei Typen von Lösungen unterscheiden. Das LGS hat

(1) eine Lösung,

(2) keine Lösung oder

(3) unendlich viele Lösungen.

Wir habe es schon angedeutet, wenn die Koeffizienten-Determinante 0 ist, gibt es ein Problem. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 6 \\ 3x & - & 6y & = & 9 \end{array} \right|$$

Wir setzen das Eliminationsverfahren an, indem wir die erste Gleichung mit 3 und die zweite mit 2 multiplizieren und dann die Differenz bilden. Das ist

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 6x & - & 12y & = & 18 \\ 6x & - & 12y & = & 18 \\ \hline & & 0 & = & 0 \end{array} \right|$$

Jetzt berechnen wir die Koeffizienten-Determinante $2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$.
Dass die zwei Gleichungen nach der Multiplikation dieselbe Gleichung darstellen, heisst, dass sie den identische Bedingung für die Variablen fordern. Deshalb liegt nur eine bedeutende Gleichung vor. Deshalb sucht man die Lösungen für eine Gleichung

$$2x - 4y = 6.$$

Diese Gleichung stimmt für *unendlich* viele Paare (x, y).
Man kann eine Variable als Parameter verstehen mit folgender Definition.

Definition 24. Als *Parameter* (Formvariable) wird eine Variable bezeichnet, die man für einen gerade betrachteten Fall konstant setzt, für den nächsten Fall aber variiert werden kann. Parameter sind "beliebig aber fest".

Wählen wir y als Parameter und setzen dafür die Menge $\{1, 2, 3\}$ fest, so ergibt die Lösung drei Werte für x. Da man beliebige und beliebig viel Werte setzen könnte, hat die ursprüngliche Gleichung unendlich viele Lösungen.
Wir betrachten nun das System

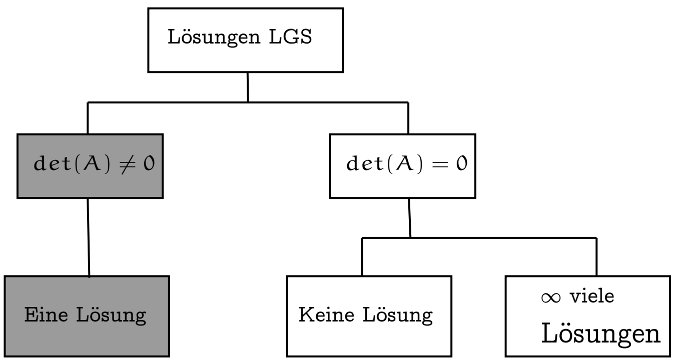
$$\left| \begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & 5 \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir mit 2 und subtrahieren.

$$\left| \begin{array}{rcrcl} 2x & - & 4y & = & 6 \\ 2x & - & 4y & = & 5 \\ \hline & & 0 & = & 1 \end{array} \right|$$

Die zwei Gleichungen sind widersprüchlich, denn es folgt die falsche Aussage $0 = 1$. Es ist wie wenn man sagt: "Fritz und Franz haben zusammen 100 Franken" und auch sagt "Fritz und Franz haben zusammen 120 Franken". Und was sagt die Determinante? $D = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 = 0$.
Zusammenfassend kann man folgende Regel nach Cramer formulieren:

Satz 16.1. Ein lineares System mit $n \times n$ Koeffizientenmatrix A besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.



16.7 Praxis

Die Berechnung von $n \times n$-Systemen, worunter wir n Gleichungen mit n Unbekannten verstehen, werden ab $n = 3$ mühsam, fehleranfällig und ineffizient zu berechnen. Taschenrechner verfügen über solche internen Programme. Häufig wird die Eingabe als sogenannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* verlangt. Das LGS sieht folgendermassen aus:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9 \\ & & 2y & - & 5z & = & -17 \\ & & & - & (1/2)z & = & -(3/2) \end{array} \right|$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist dafür wie folgt:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{array}\right]$$

In bestimmen Wissensgebieten wird mit enorm grossen Systemen gearbeitet, zum Beispiel bei der Wettervorhersage, in Strömungssimulationen oder bei der Berechnung von Erdbeben. Diese System sind auch ein einige Millionen gross.

Aufgaben

0.1 Bestimme die Anzahl Lösungen, indem die Determinante berechnet wird, und falls diese null ist, ob es keine oder unendliche viele Lösungen gibt. Wende das Eliminationsverfahren an.

(a) $\left|\begin{array}{rcl} x+2y &=& 5 \\ x &=& 6 \end{array}\right|$ **(b)** $\left|\begin{array}{rcl} -5x+y &=& 17 \\ x+y &=& 5 \end{array}\right|$ **(c)** $\left|\begin{array}{rcl} x+4y &=& 6 \\ \frac{1}{12}x+\frac{1}{3}y &=& \frac{1}{2} \end{array}\right|$

(d) $\left|\begin{array}{rcl} 3y-\frac{3}{2}x &=& -\frac{15}{2} \\ x-2y &=& 3 \end{array}\right|$

1 **(a)** Die Determinante ist $2\cdot 1-2\cdot 0=2$. Das System hat eine Lösung.

(b) Die Determinante ist $(-5)\cdot 1-1\cdot 1=-6$, eine Lösung.

(c) Determinante $1\cdot 1/3-4/12=0$. Die zweite Gleichung wird mit 12 multipliziert und wird zu $x+4y=6$, genau wie die erste. Die Elimination führt zu $0=0$. Das System hat ∞ viele Lösungen.

(d) Achtung, die Reihenfolge der Variablen sollte man beachten, d.h. $\left|\begin{array}{rcl} -\frac{3}{2}x+3y &=& -\frac{15}{2} \\ x-2y &=& 3 \end{array}\right|$. Die Determinante ist 0. Die erste Gleichung mit $-\frac{2}{3}$ multipliziert ergibt das System

$$\left|\begin{array}{rcl} x-2y &=& 5 \\ x-2y &=& 3 \\ \hline 0 &=& 2 \end{array}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

0.2 Löse folgende Gleichungssyssteme

(a) $\left|\begin{array}{rcl} 4x-3y &=& 9 \\ \frac{1}{3}x+y &=& 0 \end{array}\right|$ **(b)** $\left|\begin{array}{rcl} 4(x-7)+9y &=& 80 \\ 2(x-7)-5.5y &=& 0 \end{array}\right|$ **(c)** $\left|\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& \frac{13}{4} \\ 6x-3y &=& \frac{3}{4} \end{array}\right|$

(d) $\left|\begin{array}{rcl} 25(7x-3y) &=& 175 \\ 53(3x+7y) &=& 477 \end{array}\right|$ **(e)** $\left|\begin{array}{rcl} \frac{4}{5}x+\frac{9}{10}y &=& 1 \\ \frac{2}{5}x+\frac{7}{10}y &=& 1 \end{array}\right|$ **(f)** $\left|\begin{array}{rcl} \frac{x+1}{y+2} &=& \frac{x-3}{y-3} \\ \frac{x-1}{y-1} &=& \frac{x+4}{y+5} \end{array}\right|$

(g) $\left|\begin{array}{rcl} \frac{5}{x+y}+\frac{3}{x-y} &=& 5 \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y} &=& 8 \end{array}\right|$

2 **(a)** Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit 3 und erhalten

$$\left|\begin{array}{rcl} 4x-3y &=& 9 \\ x+3y &=& 0 \end{array}\right|$$

Wir addieren die zwei Gleichungen bekommen $5x=9$ und daraus $x=9/5$. Wir setzen x ein, z.B. in die zweite Gleichung des ursprünglichen Systems und erhalten $3/5+y=0$ und somit $y=-3/5$.

(b) Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit 2 und subtrahieren. Es folgt $9y+11y=80-0$ und $20y=80$ womit $y=4$. In die zweite eingesetzt folgt $2(x-7)-22=0$ und $x-7=11$ woraus $x=18$.

(c) Die Gleichungen addieren produziert die Gleichung $8x=13/4+3/4=16/4=4$. Damit $x=1/2$ und eingesetzt $1+3y=13/4$ und $3y=9/4$ womit $y=3/4$.

(d) Glücklicherweise lassen sich die Gleichungen durch den Leitkoeffizienten, hier 25 und 53 teilen. Das System wird zu

$$\left|\begin{array}{rcl} 7x-3y &=& 7 \\ 3x+7y &=& 9 \end{array}\right|$$

Wir wenden die Determinantenmethode an, bestimmen diese für die Koeffizienten als $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 49+9=58$. Für x folgt die Determinante $d_x=\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}=7\cdot 7-(-3)\cdot 9=49+27=76$. Analog $d_y=\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=7\cdot 9-7\cdot 3=63-21=42$. Damit $x=76/58=38/29$ und $y=42/58=21/29$.

(e) Wir transformieren das Gleichungssystem, indem wir beide Gleichungen mit 10 multiplizieren. Wir erhalten

$$\left| \begin{array}{rcl} 8x + 9y &=& 10 \\ 4x + 7y &=& 10 \end{array} \right|$$

Die zweite Gleichung multiplizieren wir wiederum mit 2 und subtrahieren. Das ergibt $9y - 14y = 10 - 20$ oder $5y = 10$ womit $y = 2$. Eingesetzt folgt $4x + 7 \cdot 2 = 10$ oder $4x = -4$ und $x = -1$. Kontrolle bestätigt das geschwind.

(f) Wir müssen die Brüche loswerden. Wir multiplizieren kreuzweise mit den Nennern (entspricht dem Erweitern) und erhalten: $\left| \begin{array}{rcl} (x+1)(y-3) &=& (x-3)(y+2) \\ (x-1)(y+5) &=& (x+4)(y-1) \end{array} \right|$. Ausmultiplizieren ergibt $\left| \begin{array}{rcl} \cancel{xy} - 3x + y - 3 &=& \cancel{xy} + 2x - 3y - 6 \\ \cancel{xy} + 5x - y - 5 &=& \cancel{xy} - x + 4y - 4 \end{array} \right|$ und weiter $\left| \begin{array}{rcl} -5x + 4y &=& -3 \\ 6x - 5y &=& 1 \end{array} \right|$. Man erkennt, dass die Determinante 1 ist, denn $5 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Mit $d_x = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 11$ und $d_y = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 18 = 13$ folgt $x = 11$ und $y = 13$.

(g) Wie bis anhin könnte man versuchen, einfach die Nenner wegzubringen. Dabei entsteht allerdings auf der rechten Seite der Gleichungen ein Term $x^2 + y^2$. Damit sind wir aufgeschmissen. Anderseits könnte man eine Substitution anwenden, z.B. $u = \frac{1}{x+y}$ und $w = \frac{1}{x-y}$. Damit erscheint das LGS als $\left| \begin{array}{rcl} 5u + 3w &=& 5 \\ 3u + 4w &=& 8 \end{array} \right|$. Mit $d = 20 - 9 = 11$, $d_u = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 24 = -4$ und $d_w = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 15 = 25$. Somit $u = -4/11$ und $w = 25/11$. Daraus entsteht das neue Gleichungssystem $u = \frac{1}{x+y} = -4/11$ und $w = \frac{1}{x-y} = 25/11$ oder mit den Reziproken $\left| \begin{array}{rcl} x + y &=& -11/4 \\ x - y &=& 11/25 \end{array} \right|$. Addition der beiden Gleichungen ergibt $2x = -11/4 + 11/25 = (-275 + 44)/100 = -231/100$. Daraus $x = -231/200$. Die Gleichungen subtrahieren ergibt $2y = -11/4 - 11/25 = -(275+44)/100$ und $y = -319/200$. Es mag erstaunen, aber die Kontrollrechnung bestätigt das Resultat. Der guten Ordnung halber sollten wir noch erwähnen, dass $x \neq y$ und $x \neq -y$ sein muss, was es auch ist.

0.3 ** Bestimme mit dem Determinantenverfahren folgende Gleichungssysteme

(a) $\left| \begin{array}{rcr} 3x - 2y + z &=& -5 \\ x + 3y - z &=& 12 \\ x + y + 2z &=& 0 \end{array} \right|$ **(b)** $\left| \begin{array}{rcr} 2x - 4y + z &=& -7 \\ x - 2y + 2z &=& -2 \\ -x + 4y - 2z &=& 3 \end{array} \right|$

3 **(a)** $\det(A) : \left| \begin{array}{rrr|rr} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right. = 18 + 2 + 1 - 3 + 3 + 4 = 25.$

Für x: $\det(A_x) : \left| \begin{array}{rrr|rr} -5 & -2 & 1 & -5 & -2 \\ 12 & 3 & -1 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right. = -30 + 0 + 12 - 0 - 5 + 48 = 25$. Damit $x = 1/1 = 1$.

Für y: $\det(A_y) : \left| \begin{array}{rrr|rr} 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 12 & -1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right. = 72 + 5 + 0 - 12 - 0 + 10 = 75$. Somit $y = 75/25 = 3$

Für z: $\det(A_z) : \left| \begin{array}{rrr|rr} 3 & -2 & -5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 12 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right. = 0 - 24 - 5 + 15 - 36 - 0 = -50$. Somit $z = -2$.

(b) $\det(A) : \left| \begin{array}{rrr|rr} 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right. = 8 + 8 + 4 - 2 - 16 - 8 = -6.$

Für x: $\det(A_x): \left|\begin{array}{rrr|rr} -7 & -4 & 1 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right| = -28-24-8+6+56+16 = 18$. Somit $x = 18/(-6) = -3$

Für y: $\det(A_y): \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -7 & 1 & 2 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right| = 8+14+3-2-12-14 = -3$. Damit $y = 3/6 = 1/2$.

Für z: $\det(A_z): \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -4 & -7 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right| = -12-8-28+14+16+12 = -6$. Somit $z = (-6)/(-6) = 1$.

0.4 Sagt ein Mädchen: "Ich habe fünfmal soviele Brüder wie Schwestern", sagt ein Bruder: "Ich habe zweimal soviele Brüder wie Schwestern". Wieviele Knaben und Mädchen hat die Familie?

4 Es bezeichnen m die Anzahl Mädchen und k die Anzahl Knaben. Ein Mädchen hat $m-1$ Schwestern und k Brüder, ein Knabe hat $k-1$ Brüder und m Schwestern. Ihre Gleichung ist (i) $5(m-1) = k$, seine (ii) $k-1 = 2m$. Die erste Gleichung in die zweite eingesetzt ergibt : $5(m-1)-1 = 2m$ oder $5m-5-1 = 2m$ und $3m = 6$ womit $m = 2$. Daraus folgt $k = 5(2-1) = 5$. Eine zahlreiche Kinderschar.

0.5 Zwei Röhren füllen ein Becken in 2 Stunden. Die eine Röhre führt 4 Mal mehr Wasser zu als die andere. In welcher Zeit würden die Rohre das Becken einzeln füllen?

5 Wir bezeichnen die Wasserzufuhr pro Stunde als x_1 und x_2. Der Beckeninhalt kann als 1 gewählt werden. Eine Beckenfüllung ist $x_1 + x_2$ mal 2 Stunden. Sodann ist $x_1 = 4x_2$. Das Gleichungssystem ist

$$\left|\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & = & 4x_2 \end{array}\right|$$

Die zweite in die erste Gleichung eingesetzt: $8x_2 + 2x_2 = 1$ oder $10x_2 = 1$ womit $x_2 = 0.1$. Damit folgt $x_1 = 4x_2 = 0.4$. Das eine Rohr füllt gemäss $x_1 t_1 = 1$ oder $t_1 = 1/x_1 = 2.5$ Stunden, das andere $x_2 t_2 = 1$ oder $t_2 = 1/x_2 = 10$ Stunden.

0.6 Zwei Spirituosen unbekannten Alkoholgehalts werden folgendermassen gemischt und enthalten dann denselben Gehalt von 50%: 1) 10 l Sorte A mit 16 l Sorte B und 7,4 l Wasser und 2) 6 l Sorte A mit 10 l Sorte B und 4.6 l Wasser. Welche Alkoholgehalte haben die Sorten?

6 Wir bezeichnen mit x (y) den Gehalt an Alkohol der Sorte A (B). Der Gehalt x ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Ein Liter der Sorte A enthält x Liter Alkohol und $(1-x)$ Liter Wasser. Die Mischung enthält gleichviel Wasser wie Alkohol. Die erste Mischung enthält somit $10 \cdot x + 16 \cdot y$ Liter Alkohol, der der Hälfte von $10 + 16 + 7.4 = 33.4$ Liter entspricht. Somit die Gleichung $10x + 16y = 16.7$. Für die zweite Mischung analog, d.h. $6x + 10y = 20.6/2$ oder $6x + 10y = 10.3$ Das System ist also

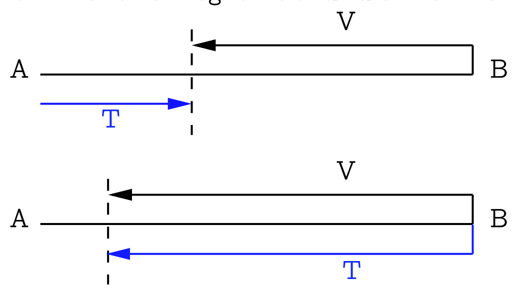
$$\left|\begin{array}{rcl} 10x + 16y & = & 16.7 \\ 6x + 10y & = & 10.3 \end{array}\right| \quad \text{oder multipliziert mit 5 und 3} \quad \left|\begin{array}{rcl} 30x + 48y & = & 50.1 \\ 30x + 50y & = & 51.5 \end{array}\right|$$

Subtraktion führt zu $2y = 1.4$ und somit $y = 0.7$. In der zweite Gleichung eingesetzt erhält man $30x + 35 = 51.5$ oder $30x = 16.5$ sowie $x = 0.55$.

0.7 ** Der Vater wandert von A über B zurück nach A in 6.5 Stunden. Seine Tochter fährt später mit dem Fahrrad dieselbe Strecke ab. Sie trifft ihren Vater auf seinem Rückweg nach einer Viertelstunde nach Abfahrt. Dann trifft sie ihn nochmals auf ihrem Rückweg und zwar an dem Ort, von dem der Vater noch eine Viertelstunde bis nach A braucht. Um wieviel schneller fährt sie im Verhältnis zur Geschwindigkeit des Vaters? Um wieviel später startet die Tochter? Um wieviel früher kommt sie an?

7 Wir müssen uns hier zuerst ein mathematisches Modell entwerfen. Davon kann es mehrere Varianten geben. Prinzipiell gilt: 1) die Formel $s = v \cdot t$, also Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit, und 2)

"treffen" bedeutet, dass beide Orte gleich sind (und beide Zeiten). Bei genauem Lesen fällt auf, dass das Verhältnis der Geschwindigkeiten gesucht ist, also $v_T/v_V = x$.
Wir führen Variablen ein: v_T Geschwindigkeit der Tochter, v_V Geschwindigkeit des Vaters, s gesamte Strecke, (s_1, t_1) Strecke/Zeit erstes Treffen, (s_2, t_2) zweites Treffen und T Abfahrtzeit Tochter. Eine Graphik ist meist sehr wertvoll. Hier eine Möglichkeit für die zwei Treffen:



Wir beschreiben das erst Treffen. Die Tochter hat die Strecke $s_1 = V_T \cdot 0.25$ zurückgelegt, der Vater die ganze s minus $v_V(T + 0.25)$ oder $s_1 = s - v_V(T + 0.25)$. Daraus folgt $V_T 0.25 = s - v_V(T + 0.25)$. Wir dividieren mit v_V und erhalten $v_T/v_V 0.25 = x0.25 = 6.5 - T - 0.25 = 6.25 - T$ oder einfacher $x = 4(6.25 - T) = 25 - 4T$. Denn $s/v_V = 6.5$.
Das zweite Treffen bedeutet $s_2 = v_V \cdot (6.5 - 0.25) = v_T(6.5 - 0.25 - T)$, denn die Zeit ist gegeben als 6.5 Stunden minus die Viertelstunde. Einfacher: $v_V \cdot (6.25) = v_T(6.25 - T)$ und $6.26 = x(6.25 - T)$
Wir setzen ein: $6.25 = x(6.25-T) = 4(6.5-T)(6.25-T) = (2(6.25-T))^2$. Das ist halt eine quadratische Form. Radizieren $\pm 2.5 = 2(6.25 - T))$ oder $T = 6.25 \pm 1.25$ uns $T = \{5, 7.5\}$. Die Lösung 7.5 ist nicht möglich, weil da der Vater schon zurück ist, also $T = 5$. Daraus $x = 25-4T = 5$. Und als letztes: Wenn der Vater noch 0.25 braucht für das latzte Stück, dann schafft dies die Tocher in 0.25/5 Stunden, also $0.05 \cdot 60$ Minuten oder 3 Minuten. Sie ist also 12 Minuten vor ihm zurück.

Index