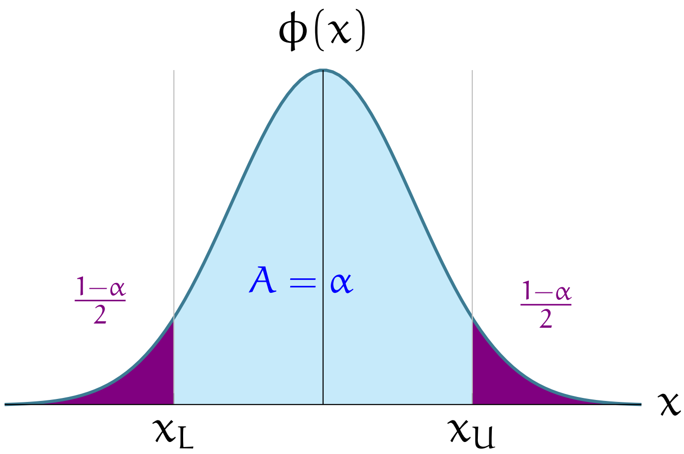
Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Kapitel 32
Wahrscheinlichkeit



Claudio Franzetti

19. Oktober 2021

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

die Begriffe Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erklären
die Ereignisse nicht-A, A oder B, A und B, unabhängige und unvereinbare (disjunkte) Ereignisse definieren
das sichere und unmögliche Ereignis definieren
bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen
unabhängige Ereignisse und Folgen von Zufallsversuchen erkennen
einen Ergebnisbaum aufstellen und anwenden
die Begriffe Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung einer Zufallsvariablen definieren, insbesondere bei einer Binomialverteilung
die Binomialverteilung anwenden
die Normalverteilung als Näherung der Binominalverteilung kennen

Inhaltsverzeichnis

32 Wahrscheinlichkeitstheorie

32.1 Zufallsexperiment . . . 32-1
- 32.1.1 Begriffe . . . 32-1
- 32.1.2 Verknüpfung von Ereignissen . . . 32-2
- 32.1.3 Ereignisbaum . . . 32-3
- 32.1.4 Zufallsvariable . . . 32-4

32.2 Wahrscheinlichkeit . . . 32-4
- 32.2.1 Klassische Wahrscheinlichkeit . . . 32-5
- 32.2.2 Häufigkeitsinterpretation . . . 32-6
- 32.2.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit . . . 32-7
- 32.2.4 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . 32-7
- 32.2.5 Elementare Sätze . . . 32-7
- 32.2.6 Regeln für Baumdiagramme . . . 32-11
- 32.2.7 Bayes'sche Formel** . . . 32-11
- 32.2.8 Unabhängige Ereignisse . . . 32-12

32.3 Zufallsvariablen* . . . 32-13
- 32.3.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion, Verteilung . . . 32-14
- 32.3.2 Erwartungswert, Streuung . . . 32-15
- 32.3.3 Funktion einer Zufallsvariablen** . . . 32-17

32.4 Binomialverteilung* . . . 32-17
- 32.4.1 Grundmodell . . . 32-17
- 32.4.2 Typische Fragestellungen . . . 32-20
- 32.4.3 Multinomiale Verteilung** . . . 32-22

32.5 Stetige Zufallsvariablen* . . . 32-22

32.6 Normalverteilung* . . . 32-24
- 32.6.1 Näherung von Moivre-Laplace . . . 32-24
- 32.6.2 Eigenschaften der Standard-Normalverteilung . . . 32-26
- 32.6.3 Stetigkeitskorrektur . . . 32-27
- 32.6.4 Beispiel mit Tabelle . . . 32-27
- 32.6.5 Standardfehler** . . . 32-28

Kapitel 32

Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat ihren Ursprung in praktischen Fragestellung, d.h. dem Glücksspiel. Ein Leiter einer Spielbank, der Chevalier De Méré, beobachtete die Resultate, die er sich vom Mathematiker und Philosophen Blaise Pascal erklären liess. Einfache Vorgänge wie ein Wurf einer Münze, der Zug eines Loses, das Drehen am Roulette haben ungewisse Ausgänge. Aber lange Folgen von Versuchen zeigen Regelmässigkeiten. Dieser Zusammenhang von Ungewissheit im Einzelnen und der Regelmässigkeit im Kollektiv ist das Wesen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

32.1 Zufallsexperiment

32.1.1 Begriffe

Definition 1. Ein *Zufallsexperiment* $\mathcal{E}$ bezeichnet einen Versuch, der unter genau festgelegten Versuchsbedingungen durchgeführt wird und einen zufälligen Ausgang (Ergebnis) hat.

Wichtig 1. Wir verwenden die Wörter "Ereignis", "Ergebnis" und "Ausgang" synonym. ⊣

Damit ein Experiment ein Zufallsexperiment ist, muss es folgende Eigenschaften aufweisen:

(1) Es gibt einen genau festgelegten Plan zur Durchführung,

(2) alle möglichen Ergebnisse des Experiments sind vorab bekannt,

(3) das Ergebnis jedes einzelnen Experiments kann nicht vorhergesagt werden (Zufälligkeit).

Anmerkung 32.1. Das Wort Experiment klingt sehr wissenschaftlich. Die Experimente sind aber auch, oder vor allem, Glücksspiele wie Würfeln oder Kartenspiele. Der Wurf eines Würfels ist ein Zufallsexperiment mit den drei obigen Eigenschaften. Die Wartezeit an einer Bushaltestelle ist auch ein Zufallsexperiment.

Anmerkung 32.2. Der Zufall kann von einem künstlichen Ding erzeugt werden, z.B. Würfel, oder aus der Natur (Geschlecht eines Neugeborenen) oder der menschlichen Umwelt (Buswartezeit) stammen.

Definition 2. Die Menge Ω aller möglichen Elementarereignisse ω_i eines Zufallsexperiments nennt man *Ereignisraum*.

Es ist das Zufallsexperiment das zweimalige Werfen einer Münze mit Kopf oder Zahl. Dann ist der Ereignisraum $\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$. Beim Experiment "Augenzahl eines Würfels" ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Anmerkung 32.3. Der Ereignisraum enthält alle wesentlichen Informationen eines Zufallsexperiments.

Definition 3. Ein *zusammengesetztes Ereignis* A ist eine Teilmenge des Ereignisraums Ω, d.h. $A \subset \Omega$.

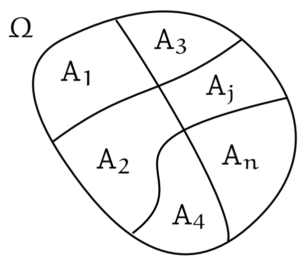
32.4 Beispiel Das Experiment besteht im Werfen eines blauen und eines roten Würfels. Es interessieren die zusammengesetzte Ergebnisse A: "Summe gleicher Zahlen". Der Ereignisraum ist $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots(6,5),(6,6)\}$ und $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$, also Teilmenge des Ereignisraums.

32.5 Formel Ein zusammengesetztes Ereignis A tritt genau dann ein, wenn das eingetretene Elementarereignis ω Element von A ist, also $\omega \in A$.

Das Beispiel fortführend: Es wird $\omega = (1,6)$ geworfen, es ist nicht Elemente von A, damit ist A nicht eingetreten. Es wird $(4,4)$ geworfen, dieses Elementarereignis ist Element von A, A ist eingetroffen.

Definition 4. Eine *Zerlegung* oder *Partition* vom Ereignisraum Ω sind n paarweise disjunkte Ereignisse A_j, die Ω aufteilen. Es ist

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{mit} \quad A_i \cap A_j = \varnothing$$



Bei einem Zufallsexperiment tritt genau ein Ereignis A_j ein.

32.1.2 Verknüpfung von Ereignissen

Ereignisse können auf *drei* Arten verknüpft werden:

- Komplement,
- (logische) Summe und
- (logisches) Produkt.

In Analogie zur Mengenlehre und zur mathematischen Logik kann man Ereignisse wie Mengen behandeln. Es gibt das komplementäre Ereignis zu A.

Definition 5. Das zum Ereignis A *komplementäre Ereignis* $\overline{A}$ besteht darin, dass A nicht eintritt, also $\overline{A} = \{\omega | \omega \notin A\}$

Man kann auch schreiben: $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Definition 6. Die *Summe zweier Ereignisse* A und B, $A \cup B$, ist das Ereignis, dass A oder B eintritt.

32.1 Beispiel Wurf eines Würfels: Es ist A die Augenzahl kleiner als 4 $\{1, 2, 3\}$ und B die ungerade Augenzahl $\{1, 3, 5\}$. Daraus $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.

Definition 7. Das *Produkt zweier Ereignisse* A und B, $A \cap B$, ist das Ereignis, dass sowohl A als auch B eintritt.

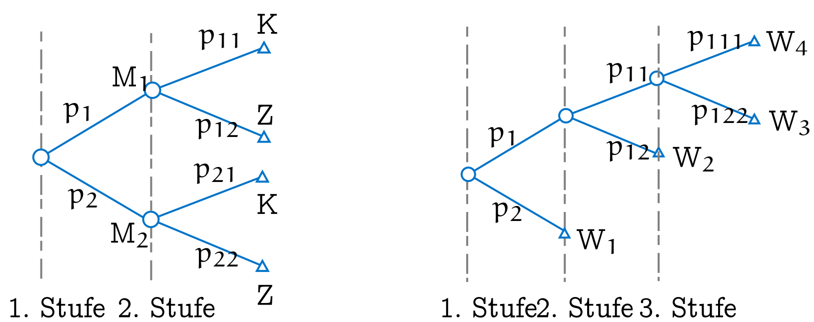
32.2 Beispiel Wurf eines Würfels: Es ist A die Augenzahl kleiner als 4 $\{1, 2, 3\}$ und B die ungerade Augenzahl $\{1, 3, 5\}$. Daraus $A \cap B = \{1, 3\}$.

Definition 8. Ω heisst *sicheres Ereignis*, $\varnothing = \overline{\Omega}$ heisst *unmögliches Ereignis*.

Definition 9. Zwei Ereignisse A und B heissen *unvereinbar* oder *disjunkt*, wenn sie nicht gleichzeitig eintreten können, also $A \cap B = \varnothing$.

32.1.3 Ereignisbaum

Zufallsexperimente können einstufig oder mehrstufig sein. Der einmalig Wurf einer Münze ist einstufig (und wird Bernoulli-Experiment genannt). Das Experiment, ziehe ein von zwei Münzen aus dem Sack und Werfe einmal, ist ein zweistufiges Experiment. Mehrstufige Zufallsexperimente, und damit auch Glücksspiele, lassen sich übersichtlich als Graphen darstellen. Ausgehend von einem sogenannten Zufallsknoten (◯) (1. Stufe) gelangt man zu den nächsten Zufallsknoten durch eine Kante (Linie), deren Anzahl von der Anzahl Ereignisse abhängt. Am Schluss erscheinen die Endknoten als Elementarereignisse. Sie werden Blätter (△) genannt. Man beachte, dass häufig, aber nicht zwangsmässig, die Bäume von links nach rechts wachsen.



32.1 Übung Wir zeichnen einen Baum für das obige zweistufige Zufallsexperiment. Vom ersten Zufallskonoten gehen zwei Kanten ab, eine für jede Münze. Nun gehen von jedem Zufallsknoten wieder je zwei Kanten ab, die in den Blättern enden. Die Abbildung oben links gibt dies wieder. ◁

Die Bäume müssen nicht symmetrisch sein und können auch mehr als zwei Äste aufweisen. In der obigen Abbildung rechts könnte ein Würfelspiel dargestellt sein, das entweder abbricht oder weitergeht, und nach 3 Zügen fertig ist.
Bei den Blättern stehen die Ereignisse oder Ergebnisse oder Ausgänge. Als Vorgriff sein erwähnt, dass an den Kanten (Ästen) die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten dargestellt wird.

32.1.4 Zufallsvariable

Der Ereignisraum enthält alle Ereignisse als Elemente. Diese sind nicht nur Zahlen sondern können beliebige Elemente sein. Zum Beispiel ist $\Omega_1 = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$ oder $\Omega_2 = \{$⚀, ⚂, ⚄, ⚅$\}$ und $\Omega_3 = \{(\clubsuit,\diamondsuit),(\heartsuit,\spadesuit),(\clubsuit,\heartsuit)\}$. Häufig ist man nicht so sehr am konkreten Ergebnis interessiert als an einer zahlenmässigen Darstellung. Beim Doppelwurf ist es die Summe der Augenzahl, oder beim Münzwurf die Anzahl von "Kopf" usw. Diese Zuordnung von Zahlen X_i zu den Ereignisse ω_i nennt man Zufallsvariable.

Definition 10. Eine *Zufallsvariable* ist die einem Ereignis $\omega \in \Omega$ zugeordnete reelle Zahl $X(\omega)$.

Anmerkung 32.1. Aus der Definition geht hervor, dass die Zufallsvariable, oder auch Zufallsgrösse, eine *Funktion* ist (und der Name nicht glücklich gewählt ist).

32.2 Beispiel Es ist $\omega = KKZKZZKZKZZZZKKKZKKZ$ die Folge von zwanzigmaligem Werfen einer Münze. Zu diesem Ergebnis wird die Anzahl "Kopf" zugeordnet, also $X(\omega) = 10$.

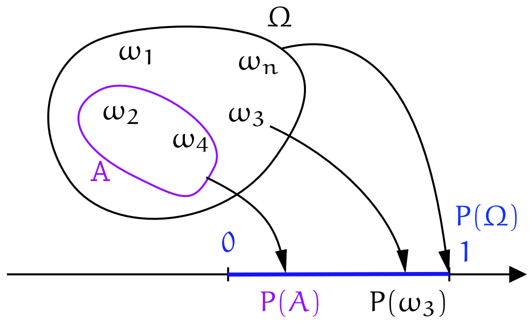
Definition 11. Die Werte $W = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ der Zufallsvariablen X heissen *Realisationen* von X.

32.2 Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit als Begriff besitzt mehrere Interpretationen. Man übergeht diese Schwierigkeit, indem man grundlegende Forderungen an das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten stellt. Man spricht dann von den Axiomen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wie man zu den Wahrscheinlichkeiten kommt, mit Rechnung oder Schätzung, ist der erste Schritt, der mehrere Möglichkeiten offenlässt. Sind sie aber einmal festgelegt, gelten die Axiome.
Die Vielzahl von Interpretationen hat auch mit der Vielseitigkeit der Verwendung des Begriffs zu tun. Die Ungewissheit ist mit der unvorhersehbaren Zukunft verknüpft, die in vielen Lebensbereichen vorkommt. Wie wahrscheinlich ist ein Sieg von Kandidat Q? Wird es morgen regnen? Wie sicher ist ein Atomkraftwerk? Wie entwickeln sich die Aktienkurse? Ist die Prämie meiner Versicherung gerechtfertigt? Ist das ein faires Spiel? Ist das neue Medikament wirksam?
Aber auch rückblickend gibt es Fragestellungen mit Ungewissheit. War Homer eine Frau? Zu 99% nicht. Hat A seine Frau umgebracht, gegeben die verschiedenen Indizien?
Gewisse Ungewissheiten werden sich klären, wenn ein Ereignis eintritt, z.B. die Wahl von Kandidat P, oder viele Daten mit der Zeit anfallen, z.B. die Erfahrung mit den neuen Medikament oder die Gewinne der Versicherungsgesellschaft. Andere wird man nie klären können, d.h. das Skelett von Homer finden. Gewissen Wahrscheinlichkeiten werden immer Schätzungen bleiben.

Wir stellen die drei wichtigsten Interpretationen und Herleitungen dar. Wir sprechen vor allem von Wahrscheinlichkeiten für bestimme Ereignisse aber auch für Aussagen.

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion der Elementarereignisse oder zusammengesetzten Ereignisse eines Zufallsexperiments in das reelle Intervall $(0, 1)$.



32.2.1 Klassische Wahrscheinlichkeit

Die klassische Auffassung stammt vom Glückspiel, vom Wurf von Münzen, der Augenzahl von Würfeln, dem Roulette oder von Kartenspielen. Aus den Regeln des Spiels und der Beschaffenheit des Spielmaterials ergibt sich die Wahrscheinlichkeit als Verhältnis von günstigen Ergebnissen zu möglichen.

Definition 12. Ein Zufallsexperiment besitzt n gleichwahrscheinliche Ausgänge. Es ist n_A die Anzahl Ausgänge, bei denen A eintritt. Dann ist die *Wahrscheinlichkeit* für das Ereignis A

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Anmerkung 32.1. Schon in der Definition sieht man, dass das Argument zirkulär ist, auf sich selber bezieht. Die Wahrscheinlichkeit ist Voraussetzung des zu definierenden. Meist wird dies kaschiert, indem von *fairen* Würfel o.ä. gesprochen wird.

Diese Definition, spezialisiert für Glücksspiele, lässt viele Fragestellungen offen, z.B. wie wahrscheinlich regnet es morgen?

32.2 Übung Wir betrachten den zweimaligen Wurf einer Münze mit Kopf oder Zahl. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit eines Doppelkopfes. Es gibt drei Ausgänge ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, nämlich $(KK), (ZK)$ und (ZZ). Diese Ausgänge sind nicht gleichwahrscheinlich, denn (ZK) kann auf zwei Arten zustande kommen. Deshalb gibt es 4 Möglichkeiten für 3 Ausgänge. Die günstigen Fälle für (KZ) sind 2, für (KK) und (ZZ) jeweils 1. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten $P(KZ) = 2/4$, $P(KK) = P(ZZ) = 1/4$. ◁

32.3 Übung Wir betrachten das Würfelexperiment "Doppelwurf zweier Würfel".

Der Ausgang oder das Ereignis ist die Summe der Augenzahlen. Damit ist der Ereignisraum $\Omega = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 11, 12\}$. Die Tabelle zeigt alle möglichen Kombinationen von Summen. Die Diagonalen ergeben die gleichen Summen. Deren Anzahl kann man als die für das entsprechende Ergebnis günstigen Fälle anschauen. Wir zählen und erstellen die folgende Tabelle:

Σ	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ω	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
günstige Fälle ω_i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

◁

32.4 Übung Der Spielbankleiter De Méré hatte die Erfahrung gemacht, dass beim Dreifachwurf eines Würfels die Summe 11 häufiger auftrat als die Summe 12, obwohl es je sechs Anordnungen gibt, die zu den Summen führen. Es sind dies

11	146	155	236	245	335	344
12	156	246	255	336	345	444

Bei Dreifachwurf gibt es total $6^3 = 216$ Möglichkeiten. Eine Anordnung 146 mit lauter unterschiedlicher Zahlen hat $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Eine Anordnung mit zwei unterschiedlichen Zahlen hat $3!/2! = 3 \cdot 2 \cdot 1/2 = 3$ Möglichkeiten und schliesslich eine Anordnung mit drei gleichen Zahlen hat 1 Möglichkeit. Wenn man diese Einsicht auf die Anordnungen anwendet, dann erhält man für 11: $6+3+6+6+3+3 = 27$ Möglichkeiten und für 12: $6+6+3+3+6+1 = 25$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlicheten sind also:

$$P(X = 11) = \frac{27}{216} \qquad P(X = 12) = \frac{25}{216}$$

Die Beobachtung von De Méré waren also richtig. ◁

32.2.2 Häufigkeitsinterpretation

Die Häufigkeit hat zwei Ausprägungen, nämlich die absolute und die relative. Wir unterstellen ein wiederholtes Zufallsexperiment.

Definition 13. Die *absolute Häufigkeit* $H_n(A)$ eines Ereignisses A ist die Anzahl dessen Eintretens bei n Versuchen. Die *relative Häufigkeit* $h_n(A)$ ist die absolute Häufigkeit im Verhältnis zur Gesamtanzahl Experimente n. Also

$$H_n(A) = n_A \qquad h_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

32.1 Beispiel Es wurde eine Münze 120 Mal geworfen und dabei ist Kopf 63 Mal erschienen. Die absolute Häufigkeit ist 63, die relative 63/120=0.525.

Der Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit wird hergestellt, indem gefordert wird, dass bei sehr grossen n die relative Häufigkeit $h_n(A)$ gegen den Wert $P(A)$ strebt.

Definition 14. Die *Wahrscheinlichkeit* für das Ereignis A ist

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A)$$

Anmerkung 32.2. Aus dieser Definition ersieht man sofort, dass die Wahrscheinlichkeit für Ereignisse, die sich nicht wiederholen lassen, nicht existiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet, kann so nicht festgelegt werden, weil es nur ein “morgen” gibt. Ebenso kann die Wahrscheinlichkeit, eine schwere Krankheit für Frau Q zu überleben, nicht festgelegt werden. Für den Metereologen sieht die Situation anders aus als für das Brautpaar, das morgen heiraten will. Er sagt sich: morgen ist ein Tag mit bestimmten Eigenschaften. Tage mit solchen Eigenschaften zeitigen in 25% der Fälle Regen. Oder für den Arzt: Patienten mit solchen Symptomen wie Frau Q sterben in 45% aller Fälle.

32.2.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit

Die subjektive Wahrscheinlichkeit, drückt den subjektiven Überzeugungsgrad über das Eintreffen oder Nicht-Eintreffen eines Ereignisses aus und entsteht durch Überlegungen und Vorwissen. Zur Erfassung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten benutzt man üblicherweise Wetten oder aleatorische Verträge.
Mit subjektiv ist nicht gemeint, dass jeder seine Wahrscheinlichkeit selber festlegen kann. Diese Wahrscheinlichkeit muss alle bekannten Fakten und Analogien miteinbeziehen.
Buchmacher legen die Preise für Wetten fest. Da es mehrere Anbieter gibt, gleichen sich die Preise an. Die Anbieter machen die Preise implizit miteinander. Die einfache Preismechanik ist: Gewinn $=$ Einsatz $\times$ Quote. Die Quote ist der Kehrwert der Wahrscheinlichkeit. Umgeformt resulitiert: implizite Wahrscheinlichkeit $=$ Einsatz /Gewinn.
Ein Anbieter stellt die Quoten, ohne Profit für ihn, für ein Fussballspiel zwischen Bayern München und Leverkusen mit

Ereignis	Quote	Implizite WS
Sieg München	1.82	0.54
Unentschieden	3.7	0.27
Sieg Leverkusen	5.25	0.19

Bei Hunde- und Pferdewetten gibt es auch zusammengesetzte Ereignisse, z.B. Hund wird erster oder zweiter oder dritter.

32.2.4 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Axiome sind grundlegende Forderungen, die nicht bewiesen werden können. Sie sind das Fundament, auf dem eine Theorie gebaut wird.
Es besteht Einigkeit darüber, was eine Wahrscheinlichkeit ist, nämlich das Mass für den Grad der Gewissheit eines Sachverhalts. Wie man diesen bestimmt, ist kontrovers. Sobald man annimmt, man kennt die Wahrscheinlichkeiten, kann man mit den Axiomen fortfahren. Wir betrachten Axiome wie Sätze.

Satz 32.1. Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung Es ist $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in \Omega$ und Ω der Ereignisraum.

- **A1**: $P(A) \geqslant 0$ für alle $A \subset \Omega$
- **A2**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle A und B mit $A \cap B = \varnothing$
- **A3**: $P(\Omega) = 1$

32.2.5 Elementare Sätze

Die folgenden Sätze folgen aus den Axiomen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Unmögliches Ereignis

Satz 32.1. Ist $\varnothing$ das unmögliche Ereignis, dann gilt

$$P(\varnothing) = 0$$

Denn mit Axiom 2 gilt: $P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$ und damit $P(\varnothing) = 0$.

Komplement

Satz 32.2. Ist $\overline{A}$ das komplementäre Ereignis (*Gegenereignis*) von A, dann gilt

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Denn $\Omega = A \cup \overline{A}$ und (Axiom 2 und 3) $P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\overline{A})$ und somit $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Anmerkung 32.3. Dieses Gesetz braucht man häufig, dann nämlich, wenn $P(\overline{A})$ viel einfacher zu berechnen ist als $P(A)$. Dies ist auch dann der Falle, wenn die Ereignismenge A viel mächtiger ist als $\overline{A}$.

Additionssatz

Aus den Axiomen, als Wiederholung:

32.4 Formel Axiom 2 Für zwei unvereinbare, disjunkte, Ereignisse A und B ($A \cap B = \varnothing$) gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Satz 32.5. Für n paarweise disjunkte Ereignisse $A_i \cap A_j = \varnothing$ und $i \neq j$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n).$$

Nun verallgemeinert für nicht-disjunkte Ereignisse

Satz 32.6. Für zwei beliebige Ereignisse A und B gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Die Schnittmenge ist doppelt gezählt, weshalb sie in Abzug gebracht werden muss. Man erinnere sich an die Hundehalter und die Katzenhalter, von deren Vereinigung man die Hunde- und Katzenhalter abziehen muss.

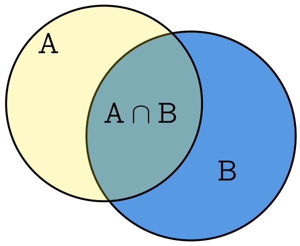
32.7 Übung Es interessiert die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Würfel bei gleichzeitigem Wurf *mindestens* eine Sechs aufweisen. Eine Sechs hat die Wahrscheinlichkeit 1/6. Ein Student gibt die Antwort: 1/6+1/6=2/6=1/3. Bei näherem Betrachten muss man sich die Frage stellen, sind $A = \{(6)\}$ und $B = \{(6)\}$ unvereinbar? Oder anders $A \cap B = \varnothing$? Nein, denn es ist ja $(6, 6)$ möglich. Diese wurde doppelt "gezählt". Diese WS ist 1/36. Also ist die richtige Antwort $P(X) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$. Hätte man das Gegenereignis "keine Sechs" verwendet, hätte man argumentiert: WS erster Würfel keine Sechs $p = 5/6$, ebenso für den zweiten. Die Ereignisse sind unabhängig, also total $p = 25/36$. Damit $P(x) = 1 - p^2 = 1 - 25/36 = 11/36$. $\triangleleft$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 15. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A|B$ ist die Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B mit $P(B) \neq 0$ eingetreten ist, formell

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Anmerkung 32.8. Man kann die Formel auch als Normierung auf die Basis B verstehen, als Verhältnis des Teils von B, der auch zu A gehört, zu B.



Es zeigt das Verhältnis der Hunde- und Katzenhalter $A \cap B$ im Verhältnis zu den Katzenhalter B.

Wichtig 2. ☠ Im allgemeinen gilt $(P(A|B) \neq P(B|A)$. ⊣

32.9 Übung Wir betrachten Familien mit zwei Kindern. Die Wahrscheinlichkeit für beide Geschlechter sei 50%. Es ist A die Menge von Familien mit 2 Knaben und B die Menge von Familien mit *mindestens* einem Knaben. Wir wählen eine Familie aus B und fragen uns, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass sie 2 Knaben aufweist. Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ ist das Komplement zu "keine 2 Mädchen". Zwei Mädchen haben die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Damit $P(B) = 1 - 1/4 = 3/4$. Da A Teilmenge von B ist, folgt $P(A \cap B) = P(A)$ mit $P(A) = 1/4$. Damit folgt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Das ist nicht für alle besonders intuitiv. ◁

Multiplikationssatz

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit kann man umschreiben als

32.10 Formel

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Für das gleichzeitige eintreten von n Ereignissen A_i gilt die Verallgemeinerung

Satz 32.11.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Für drei Ereignisse folgt:

32.12 Formel

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

32.13 Übung Das Lottospiel sieht vor, 6 aus 49 Zahlen ohne Wiederholung zu ziehen. Alle 6 Zahlen richtig angekreuzt zu haben bedeutet, die Ereignisse $A_1, A_2 \ldots, A_6$ stimmen mit den gezogenen Nummern überein. Wir suchen also $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6)$. Es ist

$P(A_1) = \frac{6}{49}$, $P(A_2|A_1) = \frac{5}{48}$, $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{47}$ usf. Es gibt immer eine Zahl weniger, die man auf einen Platz weniger setzen kann.

$$P(A_1, A_2 \ldots, A_6) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

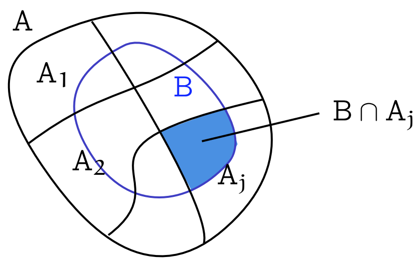
Wir erinnern uns an die Kombination ohne Zurücklegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 aus 49 zu wählen? Antwort $C(49, 6) = \binom{49}{6}$. Es gibt nur eine günstige Wahl. Damit ist die Wahrscheinlichkeit eben

$$\frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Die Überlegung mit der Kombinatorik im Hinterkopf ist bei gleichwahrscheinlichen Ereignissen einfacher als das Handhaben von Wahrscheinlichkeiten. ◁

Totale Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten eine Menge A, die in n disjunkte Teilmengen A_j zerlegt ist. Die Menge B ist eine echte Teilmenge von A. Damit ist die Menge B auch darstellbar als $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$. Damit folgt



$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n) \end{aligned}$$

Deshalb:

Satz 32.14. Satz von der totalen WS

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

32.15 Formel Für $n = 2$ gilt

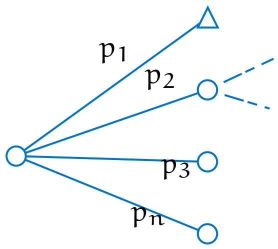
$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})$$

32.16 Übung Ein Fabrikant hat drei Lieferanten, die fehlerhafte Produkte mit Wahrscheinlichkeiten 0.06, 0.1 und 0.05 liefern. Sein Lager besteht aus 40%, 25% und 35% Produkte je Lieferant. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig entnommenes Element fehlerhaft ist? Es sind B die fehlerhaften und A_i die Produkte von Lieferant i. Wir nehmen die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit für $n = 3$, die lautet:

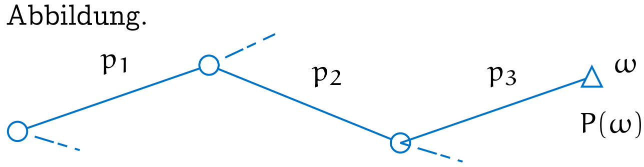
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) \\ &= 0.06 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.25 + 0.05 \cdot 0.35 \\ &= 0.0665 \end{aligned}$$

Intuitiv ist es einfacher mit ganzen Zahlen zu operieren. Wir nehmen an, das Lager bestehe aus 40, 25 und 35 Produkten. Von diesen sind 2.4, 2.5 und 1.75 defekt, total 6.65 von Hundert, oder 0.0665. ◁

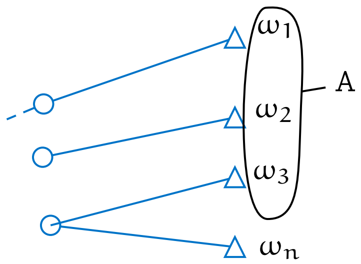
32.2.6 Regeln für Baumdiagramme



Die Baumdiagramme, die eine meist mehrstufiges Zufallsexperiment beschreiben, sind so konsstruiert, dass gewisse Regelmässigkeiten herrschen. Die Wahrscheinlichkeiten der Kanten (Äste) aus einem Knoten summieren sich zu 1, also $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Siehe Abbildung.



$$P(\omega) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots$$



Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Blatt) ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines zusammengesetzten Ereignisses $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\omega \in A$, also

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Wir fassen zusammen

32.1 Eigenschaften Ereignisbaum

- die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses am Ende eines bestimmten Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang eben dieses Pfades
- Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis bestehend aus mehreren Pfaden ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade

32.2.7 Bayes'sche Formel**

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt folgender Zusammenhang.

Satz 32.1. Die A_j bilden eine Zerlegung von Ω und B ist irgendein Ereignis, so dass

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

32.2 Formel

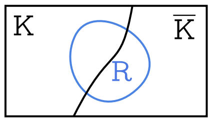
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

32.3 Rezept Die Bayes'sche Formel kann man als Modell verstehen für Ursache und Wirkung. Z.B. ist bekannt, dass eine Ereignis B eingetreten ist, die Wirkung. Es steht eine Menge von Ursachen A_j zur Verfügung, die Zerlegung von Ω. Welche der Ursachen A_j die Wirkung erzielt hat ist nicht bekannt aber die Wahrscheinlichkeit schon $P(B|A_j)$. Damit lässt sich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit A_j als Ursache, als Bedingung, in Frage kommt.

32.4 Übung Mit Röntgenuntersuchungen kann man Tuberkulosekranke finden. Es ist K das Ereignis krank mit der Wahrscheinlichkeit $P(K) = 0.001$ und folglich nicht-krank $P(\overline{K}) = 0.999$. Wir suchen das Ereignis $P(K|R)$, also Kranke, die röntgenpositiv sind. Die Röntgenuntersuchung liefert positive Resultate für Kranke mit Wahrscheinlichkeit $P(R|K) = 0.9$ und für Nicht-Kranke von $P(R|\overline{K}) = 0.01$. Mit der Formel folgt:

$$P(K|R) = \frac{P(R|K)P(K)}{P(R|K)P(K) + P(B|\overline{K})P(\overline{K})}$$

$$P(K|R) = \frac{0.9 \cdot 0.001}{0.9 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999} = 0.083$$

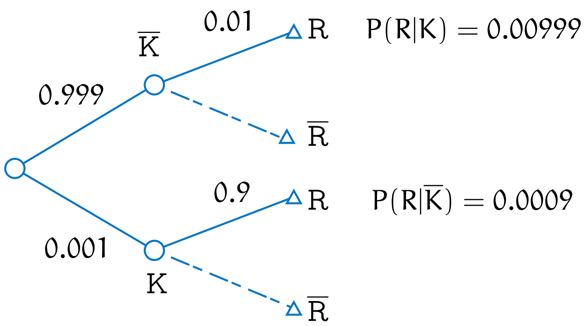


Psychologen haben gezeigt, dass man die Formel mit ganzen Zahlen besser beherrschen kann. Gehen wir von einer Bevölkerung von 100000 Personen aus. Davon sind 100 krank und 99900 gesund. Von 100 kranken werden 90 positiv getestet, von den 99900 Gesunden sind 1% positiv, also 999. Insgesamt sind 1089 positiv. Die Wahrscheinlichkeit einen Kranken aus den Positiven zu ziehen ist

$$\frac{90}{1089} = 0.083$$

Die Quote von 8.3% ist sehr gering, weshalb das Röntgenverfahren nicht effizient ist. Dies hätten wir aus den gegebenen Zahlen, vor allem wegen der 90%, intuitiv nicht erahnt. Es ist das 1%, das zu hoch ist. ◁

32.5 Übung Wir stellen denselben Zusammenhang mit einem Ereignisbaum dar. Dieser sieht z.B. so aus



Die Ergebnisse mit $\overline{R}$ interessieren nicht. Man sieht sofort, dass $P(R) = P(R|\overline{K}) + P(R|K) = 0.01809$ ist. $P(K|R) = 0.0009/0.01809 = 0.083$. Der Baum ist sehr nützlich für den Überblick. ◁

32.2.8 Unabhängige Ereignisse

Wir besprechen ein wichtiges Konzept ausgehend von den bedingten Wahrscheinlichkeiten und von disjunkten (unvereinbaren) Ereignissen. Sind A und B unvereinbar, d.h. $A \cap B = \varnothing$, dann folgt $P(A|B) = 0$. Ist B eine Teilmenge von A, also $B \subset A$, dann folgt $P(A|B) = 1$. Ist eine Frau gewählt worden, dann ist auch ein Mensch gewählt worden, als Illustration. Das Ereignis B bestimmt die Wahrscheinlichkeit von A mit.

Nun wird gezeigt, dass es Fälle gibt, bei denen der Eintritt von B keine Wirkung auf A zeigt. Zur Illustration der Doppelwurf von zwei Würfeln. Es ist natürlich nicht so, dass das Resultat des ersten Würfels den Ausgang des zweiten irgendwie beeinflusst.

32.1 Übung Es ist das Ereignis A: Augenzahl auf Würfel 1 ungerade und B: Augenzahl Würfel 2 ist grösser als 2. Es ist dann $P(A) = 1/2$ und $P(B) = 1/3$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide eintreten ist $P(A \cap B) = 1/6$. Wenden wir die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit an, so folgt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/3} = 1/2 = P(A)$$

und

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3 = P(B)$$

Sind $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, dann folgt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Darauf bauen wir die Definition. ◁

Definition 16. Zwei Ereignisse A und B sind genau dann *unabhängig*, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Aus der Definition entspringen folgende Sätze.

Satz 32.2. Die Ereignisse A und B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn ein der Bedingungen

$$P(A|B) = P(A) \qquad \text{oder} \qquad P(B|A) = P(B)$$

erfüllt ist

Anmerkung 32.3. Es gilt auch für A und B unabhängig für die Komplemente:

$$P(A) = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

32.3 Zufallsvariablen*

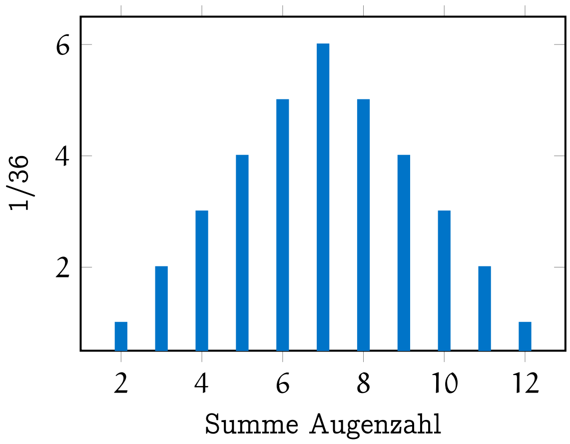
Nun da wir den Begriff der Wahrscheinlichkeit beschrieben haben, kommen wir auf das Zufallsexperiment zurück. Es wird durch zwei oder drei Elemente definiert: die Ereignisse $\Omega = \{\omega\}$, evtl. die zusammengesetzten Ereignisse $S = A \cap B \cup C \ldots$ mit $A \subset \Omega$ etc. und die Wahrscheinlichkeiten P. Das Duo (Ω, P) oder das Trio (Ω, S, P) nennt man *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Wir haben bereits die Zufallszahl definiert (Def. 10 auf Seite 32-4) als Abbildung $X(\omega_i) = x_i$ vom Ereignis ω_i in die reellen Zahlen, und die Wertemenge $W = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ als Realisationen (Def. 11) der Zufallszahl.

32.3.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion, Verteilung

Es ist X eine (diskrete) Zufallsvariable "über" Ω. Es interessiert die Wahrscheinlichkeit, mit denen X die Realisationen $x_1, x_2, \dots, x_n$ annimmt. Das Ereignis $A_j \subset \Omega$ umfasst genau jene Elemente von Ω, für die gilt $X(\omega) = x_i$. A_j ist also die Menge $\{\omega | X(\omega) = x_i\}$. Damit ist $P(A_j) = P(X = x_j)$.

32.1 Übung Wir betrachten den Doppelwurf mit den Ereignissen $\Omega = \{(i, j)\}$. Wir haben die Abbildung $X((i, j)) = i + j$, d.h. die Summe der Augenzahlen. $A_k = \{(i, j) | i + j = k\}$ sind die Ereignisse, dass die Summe k erscheint. In der Abbildung sind die Wahrscheinlichkeiten $P(A_k)$ in $1/36$ angegeben.



◁

Definition 17. Für $A_i = \{\omega \,|\, X(\omega) = x_i\}$ ist die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = P(A_i) & \text{falls} \quad x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für das obige Beispiel des Doppelwurfs ist die Funktion

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

32.2 Übung Für den einfachen Wurf mit x der Augenzahl ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ einfach

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

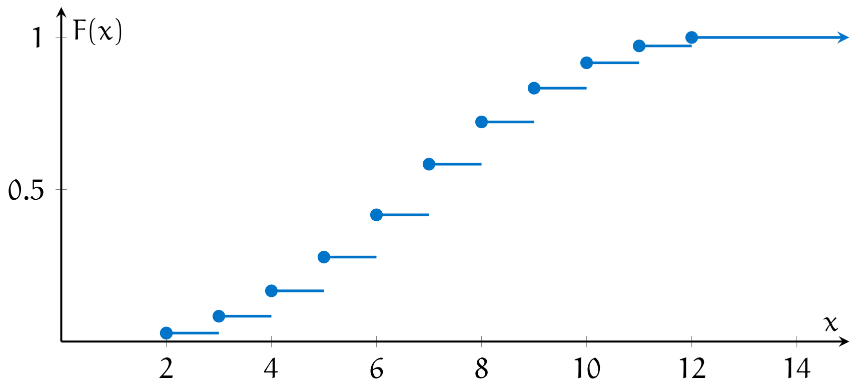
◁

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion geht aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion hervor. Es wird gefragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable X einen bestimmten Wert x nicht übersteigt. Dazu müssen die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$, für die $x_i \leqslant x$ ist, aufsummiert werden.

Definition 18. Die *Verteilungsfunktion* $F(x)$ zu $f(x)$ ist

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} f(x_i)$$



Satz 32.3.

$$P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$$

32.4 Eigenschaften Verteilungsfunktion

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$$
$$F(x_{i+1}) = F(x_i) + f(x_{i+1})$$

32.3.2 Erwartungswert, Streuung

Unser Zufallsmodell kann man tabellarisch wie folgt darstellen, als Abbildung der Ereignisse in die Zufallszahlen und die Zufallszahlen in die Wahrscheinlichkeiten

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	$\ldots$	ω_n
$X(\omega)$	x_1	x_1	x_3	$\ldots$	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

oder konkret für den fairen Würfel mit der Augenzahl als Zufallsgrösse

Ω	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Eine übersichtliche Charakterisierung von Verteilungs- oder Wahrscheinlichkeitsfunktionen sind Mittelwert oder Erwatungswert und Varianz. Der Erwartungswert gibt Auskunft über die Lage (wo ungefähr?) und die Varianz über die Streuung (wie weit auseinander?).

Definition 19. Der *Erwartungswert* $E(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X ist

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(x = x_i)$$

Beim Würfel ergibt sich der Erwartungswert (auch Mittelwert genannt) als

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$$

Anmerkung 32.1. Der Erwartungswert ist vor dem Gebrauch von Wahrscheinlichkeiten verwendet worden, nämlich als "gerechter" Preis von Verträgen, wo eine feste Zahlung für ein ungewisses Resultat entschädigt wird, z.B. Preis des nächsten Fischfangs, oder Prämie für eine Versicherung. Der Erwartungswert ist der Einsatz für ein faires Spiel.

Definition 20. Die *Varianz* $V(X) = \sigma_X^2$ einer diskreten Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ_X ist

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot P(X = x_i)$$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ heisst *Standardabweichung*.

Für den fairen Würfel ist die Varianz:

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{6}\left[(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.252\right] \\ &= 2.92 \end{aligned}$$

Die Standardabweichung ist $\sigma = 1.71$.

Anmerkung 32.2. Die Varianz hat nicht dieselbe Masseinheit wie X. Wenn X in Meter gemessen würde, dann ist die Varianz in Quadratmeter. Die Standardabweichung hingegen hat dasselbe Mass wie die Zufallsgrösse.

32.3 Eigenschaften Erwartungswert E(X) Mit Konstanten c gilt:

$$\begin{aligned} E(c) &= c \\ E(cX) &= cE(X) \\ E(X_1 + X_2) &= E(X_1) + E(X_2) \end{aligned}$$

Die Varianz ist auch ein Erwartungswert und zwar von $(X-\mu)^2$, also $V(X) = E((X-\mu)^2)$. Man kann also mit $E(X) = \mu$ schreiben:

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-\mu)^2) = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Man kann alternativ auch folgende Darstellung zeigen:

$$V(X) = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2 - X + X - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2 - X) + E(X) - \mu^2$$

und mit $\mu = E(X)$ folgt

$$V(X) = E(X(X-1)) - \mu(\mu - 1) \tag{32.1}$$

32.4 Eigenschaften Vaianz V(X) Mit Konstanten c gilt:

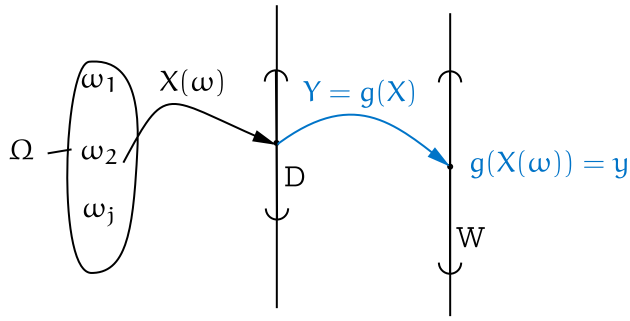
$$\begin{aligned} V(c) &= 0 \\ V(cX) &= cV(X) \quad \text{und} \quad \sigma_{cX} = \sqrt{c}\sigma_x \\ V(X) &= E(X^2) - \mu^2 = E(X(X-1)) - \mu(\mu - 1) \end{aligned}$$

32.3.3 Funktion einer Zufallsvariablen**

Wir haben mit der Zufallsvariablen eine Abbildung, genauer eine Funktion, der Ereignisse auf die Zahlenebene $X(\omega)$. Diese Zahlen können wiederum die unabhägige Variable einer beliebigen Funktion $Y = g(X)$ sein. Wenn X eine bestimmte Wahrscheinlickeitsfunktion und damit Verteilung besitzt, so wird ie Zufallszahl Y eine andere, von der Funktion $g(X)$ bestimmte Verteilung aufweisen.

Satz 32.1. Ist $Y = g(X)$ eine Funktion der Zufallsvariablen X, dann ist auch Y eine Zufallsvariable.

Die Verteilung von Y ergibt sich aus $P(W) = P(D|g(B) = W)$. Die Berechnung ist meist sehr aufwendig und auch häufig nicht einfach. Wir gehen nicht weiter darauf ein. Als Beispiel nehmen wir die Funktion $Y = X^2$. Ein weiteres Beispiel könnte eine Auszahlungsfunktion in Abhängigkeit von einem Glücksspiel sein.



Kurioserweise braucht man für $E(Y)$ nicht die Verteilung von Y. Es gilt nämlich $E(Y) = E(g(X)) = \sum_i g(x_i)P(X = x_i)$ respektive $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.

32.4 Binomialverteilung*

Es gibt unendlich viele Verteilungen, denn gemäss Definition sind nur gewisse Eigenschaften einzuhalten. Hier wird vor allem auf die Binomialverteilung eingegangen.

32.4.1 Grundmodell

Die Grundvorstellung kann eine Serie von Münzwürfen sein. Es könnte dies z.B. folgende Ereignis eintreten bei 20 Würfen:

$$\mathsf{KKZZKZZZKKKZKZKKKZZK}$$

Uns intereissiert nicht die Reihenfolge, somit ist diese Serie der folgenden äquivalent

$$\mathsf{KKKKKKKKKKKZZZZZZZZZ}$$

Es sind 11 mal "Kopf" und 9 mal "Zahl". Aus der Kombinatorik wissen wir, dass es $C(20, 11) = \binom{20}{11}$ Möglichkeiten gibt für diese Muster und total 2^{20} Anordnungen. Das Verhältnis ist $\frac{167960}{1048576} = 0.1602$, die Quote von günstigen zu mögliche Anordnungen. Dies ist eine Wahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung, dass die Münze fair ist, also gleichwahrscheinlich die Seiten zeigt.

Die Wahrscheinlichkeit für die Köpfe ist, da alle Würfe unabhängig sind

$$P(KKKKKKKKKKK) = P(K) \cdot P(K) \ldots = P(K)^{11}$$

und analog für Zahl

$$P(ZZZZZZZZZ) = P(Z)^9$$

und damit

$$P(KKKKKKKKKKKZZZZZZZZZ) = P(K)^{11} \cdot P(Z)^{9}$$

Wir interessieren uns nicht für die Reihenfolge. Deshalb gibt es $\binom{20}{11}$ Mögliche Anordnung. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit in einer Serie von 20 Würfen 11 mal Kopf zu bekommen ist somit

$$P(n_K = 11, n = 20) = \binom{20}{11} P(K)^{11} \cdot P(Z)^{9}$$

Weil $Z = \overline{K}$ ist, d.h. entweder Kopf oder Zahl tritt mit Wahrscheinlichkeit 1 ein, muss $P(Z) = 1 - P(K)$ gelten. Wenn die Münze fair ist, dann gilt auch $P(Z)P(K) = \frac{1}{2}$. Damit wird

$$P(n_K = 11, n = 20) = \binom{20}{11} (\frac{1}{2})^{20} = 0.1602$$

Das ist die Zahl, die wir schon mit kombinatorischer Anschauung oben bestimmt haben. Wenn nun der Würfel nich fair ist, sondern $P(K) = 0.53$ und damit $P(Z) = 0.47$, dann ist

$$P(n_K = 11, n = 20) = \binom{20}{11} (0.53)^{11} (0.47)^{9} = 0.1742$$

Wir fassen zusammen

32.1 Formel Die Anzahl von Sequenzen der Länge n von K und Z, in der K m mal erscheint, ist

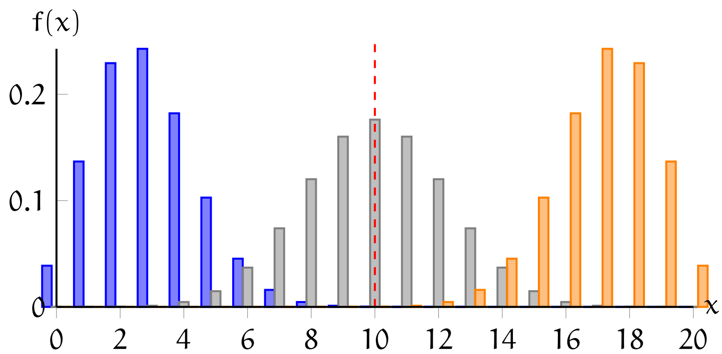
$$C(n, k) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* für dieses Zufallsexperiment, Anzahl Erfolge x mit Wahrscheinlichkeit p in n Versuchen, ist:

Satz 32.2. WS-Funktion x aus n mit p

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{für} \quad x = 0, 1, 2 \ldots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Rechts sehen wir ein paar Ausprägungen der Binomialverteilung. Falls $p = 0.5$ ist, ist sie symmetrisch, andernfalls nicht. Es besteht eine Symmetrie zwischen Funktionen mit Parameter p und $1 - p$. Mit der Definition 18 folgt sie sogenannte Binomialverteilung, häufig mit $B(n, p)$ bezeichnet:



Satz 32.3. Binomialverteilung

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Man schreibt für eine Zufallsvariable X, die binomialverteilt ist, $X \sim B(n,p)$.

Satz 32.4. Eine binomialverteile Zufallvariabel $X \sim B(n,p)$ besitzt

- den Erwartungswert $E(X) = np$
- die Varianz $V(X) = np(1-p)$

32.5 Übung ** Die Herleitung des Erwartungswerts setzt die Kenntnis des binomischen Lehrsatzes voraus. Repetition:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Der Erwartungswert folgt aus der Definition:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l}
\end{aligned}$$

mit $m = n-1$ und $l = k-1$ und dem Lehrsatz folgt

$$E(X) = np \cdot (p + (1-p))^m = np \cdot 1 = np.$$

Die Varianz bestimmt sich mit denselben Argumenten, wobei noch ein bisschen mehr umgeformt werden muss. Wir verwenden Gleichung 32.1. Der zweite Term ist einfach

$$\mu(\mu-1) = np(np-1)$$

Der erste ist

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} (k-1) \cdot k \cdot P(X=k)$$

Die rechte Seite unterscheidet sich von der obigen Herleitung nur durch den blauen Term $(k-1) = l$. Somit können wir ihn bis zur letzten Form einfach stehen lassen und bekommen

$$E(X(X-1)) = np \sum_{l=0}^{m} l \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l}$$

Die Summe ist der Erwartungswert $mp = (n-1)p$. Also ist $E(X(X-1)) = np(n-1)p$. Die zwei Teile zusammen ergeben

$$\begin{aligned} V(X) &= np(n-1)p - np(np-1) = n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 + np \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

◁

Die Wahrcheinlichkeiten der Binomialverteilung können auch rekursiv, d.h. mit dem Vorgänger bestimmt werden.

32.6 Formel Rekursionseigenschaft von $B(n,k)$

$$\begin{aligned} f(0) &= (1-p)^n \\ f(k+1) &= f(k)\frac{(n-k)}{(k+1)}\frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

32.4.2 Typische Fragestellungen

Die Binomialverteilung $B(n,q)$ hat vier potentiell zu bestimmende Grössen:

(1) die Wahrscheinlichkeit $P(X)$,

(2) die elementare Wahrscheinlichkeit p,

(3) die Anzahl Versuche n und

(4) die Anzahl Treffer/Erfolge k.

Daraus ergeben sich vier typische Fragestellungen.

Wahrscheinlichkeit

32.1 Übung Ein Schüler hat für eine Multiple-Choice-Prüfung nichts gelernt. Die Prüfung stellt 10 Fragen mit je 4 Antworten, von denen nur eine richtig ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig 6 richtige anzukreuzen?
Aus der Frage bestimmen wir $n = 10$, $k = 6$ und $p = 1/4$, denn für jede Frage stehen 4 möglich Antworten zur Verfügung. Die Lösung ist

$$P(X=6) = f(6) = \binom{10}{6} 0.25^6 \cdot 0.75^4 = 210 \cdot 0.0002 \cdot 0.32 = 0.0162$$

Eine genügende Note bedeutet 6, 7, 8, 9 oder 10 richtige. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig genügend zu sein? Man muss die einzelnen WS summieren, also

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 6) &= P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) \\ &= 0.0162 + 0.00309 + 0.000386 + 0.000028 + 0.00000095 \\ &= 0.0197 \end{aligned}$$

Diese Zahlen wurden mit einem programmierbaren Rechner berechnet. Von “Hand” ist die Rechnung mühsam. Fazit: sich nicht auf die Prüfung vorzubereiten ist nicht besonders schlau, denn die Wahrscheinlichkeit ist keine 2% genügend zu sein. ◁

Anzahl Versuche

32.2 Übung Eine Fabrik stellt Glühbirnen her, von denen 0.5% defekt sind. WWie viele muss er herstellen, so dass mindestens eine defekt ist? Das Wort "mindesten" löst den Reflex aus, an das Gegenereignis "kein" zu denken. Also $P(X \geqslant 1) = 1 - P(0)$. Wir kennen $p = 0.005$, $k = 0$ (keine defekt) und $P(0) = 0.99$. Gesucht ist n. Daraus gibt die Formel

$$P(0) = 0.99 = \binom{n}{0} 0.005^0 \cdot 0.995^n$$

und damit $P(X \geqslant 1) = 1 - P(0) = 0.01$

$$0.01 = 1 \cdot 1 \cdot 0.995^n$$

und damit

$$\log(0.01) = n \cdot \log(0.995)$$

und

$$n = \frac{\log(0.01)}{\log(0.995)} = \frac{\ln(0.01)}{\ln 0.995)} = \frac{\lg(0.01)}{\lg(0.995)} = 918.7 \approx 919$$

$\lhd$

Einzelwahrscheinlichkeit

32.3 Übung In einem Gugelhopf sind 50 Rosinen verteilt. Wie viele Stücke x darf man schneiden, wenn mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Rosinen pro Stück sein sollen? Die Wahrscheinlichkeit für eine Rosine in x Stücken ist $p = 1/x$ und damit $1 - p = (x-1)/x$. Mit dem Gegenereignis $P(k \geqslant 1) = 1 - P(0) \geqslant 0.99$ folgt $P(0) \leqslant 0.01$. Es ist

$$P(0) = \binom{50}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^0\left(\frac{x-1}{x}\right)^{50} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{50} \leqslant 0.01$$

und daraus

$$\frac{x-1}{x} \leqslant 0.01^{\frac{1}{50}} = 0.912$$

damit

$$x - 1 \leqslant 0.912x \quad \Leftrightarrow \quad x(1 - 0.912) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 11.37$$

Es dürfen höchstens 11 Stücke geschnitten werden. $\lhd$

Anzahl Treffer

32.4 Übung Ein fairer Würfel wird 20 Mal geworfen. Wir möchten wissen, welche Anzahl k von Sechsen dazu führen, dass die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis eine Wahrscheinlichkeit von weniger als 5% aufweist. Die Binomialverteilung gibt $P(X \leqslant k)$ wieder. Hier wird aber $P(X > k) < 0.05$ verlangt. Nun ist das Gegenereignis $1 - P(X \leqslant k-1) < 0.05$ und somit $P(X \leqslant k-1) > 0.95$. Die Lösung lässt sich nicht analytisch, d.h. durch elementares Rechnen finden. Für diese Fragestellung muss man in der Wertetabelle der Binomialverteilung die Werte abgleichen.

0	1	2	3	4
0.026084	0.130420	0.328659	0.566545	0.768749
5	6	7	8	9
0.898159	0.962864	0.988746	0.997158	0.999401

An der Stelle 6 ($P(X \leqslant 6)$) ist die (kumulierte) Wahrscheinlichkeit zum ersten Mal grösser als 0.95. Das heisst, dass $k - 1 = 6$ ist und somit das gesuchte k 7 ist. $\lhd$

32.4.3 Multinomiale Verteilung**

Die Binomialverteilung beruht auf dem Modell einer Urne mit zwei Sorten von Kugeln, oder mit mehr Sorten aber der Fragestellung von "diese Sorte" (rot) gegen "einer der anderen Sorte" (nicht rot).

Eine Urne enthalte 6 Kugeln, 1 rote, 2 blaue und 3 gelbe. Die Wahrscheinlichkeiten (Ziehen mit Zurücklegen) sind $p_1 = 1/6$, $p_2 = 1/3$ und $p_3 = 1/2$. Es werden 5 Ziehungen gemacht. Wir möchten die Wahrscheinlichkeit wissen, dass 2 Mal rot, einmal blau und zweimal gelb gezogen wird, also $P(x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2)$. Für "rot/nicht rot" folgt $P(x_1 = 2) = \binom{5}{2}p_1^2(1-p_1)^3 = \binom{5}{2}p_1^2 \cdot Q_1$. Jetzt gilt für die übrigen 3 Ziehungen mit einer blauen $P(x_2 = 1) = Q_1 = \binom{3}{1}p_2^1(1-p_2)^2 = \binom{3}{1}p_2^1 \cdot Q_2$ und weiter $P(x_3 = 2) = Q_2 = \binom{2}{2}p_3^2(1-p_3)^0$. Zusammengefasst und eingesetzt ergibt sich

$$P(x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2) = \binom{5}{2}p_1^2 \cdot \binom{3}{1}p_2^1 \cdot \binom{2}{2}p_3^2(1-p_3)^0$$

Vereinfacht und mit aufgelösten Fakultäten

$$P(x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2) = \frac{5!}{2!1!2!}p_1^2 \cdot p_2^1 \cdot p_3^2$$

Daraus folgt die richtige Vermutung

32.1 Formel

$$P(n_1, ..., n_s) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_s!}p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$$

mit $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ und $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = 1$.

Um das Beispiel zu Ende zu führen rechnen wir noch aus

$$P(x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2) = \frac{120}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.0694$$

32.5 Stetige Zufallsvariablen*

Bis hierhin haben wir diskrete Zufallsvariablen angeschaut, also solche, die nur ganzzahlige Werte annehmen können. Dies ergibt sich in vielen Grundmodelle wie z.B. dem Münzwurf, dem Würfeln, dem Roulette, dem Lotto etc. Eine Zufallsgrösse (Zufallsvariable) kann aber auch reelle Werte annehmen. Man denke hier an die Wartezeit am Postschalter, der Zeigerstellung bei der Draufsicht auf die Uhr u.v.m. Zudem werden Zufallsvariablen reell, wenn man Anteile betrachtet, z.B. Anteil der Schüler, die genügende Noten schreiben (rationale Zahlen). Weil das Rechnen mit reellen Zahlen erheblich einfacher sein kann als der Kalkül mit ganzen Zahlen wählt man Näherungen im Reellen. Wir werden eben die Binomialverteilung durch eine stetige Verteilung annähern.

Die Begriffe, die wir für reelle Zufallszahlen erweitern wollen sind etwa die Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Verteilung und die Masszahlen Erwartungswert und Varianz. Es zeigt sich, dass man im Wesentlichen einfach die Summen durch Integrale ersetzt.

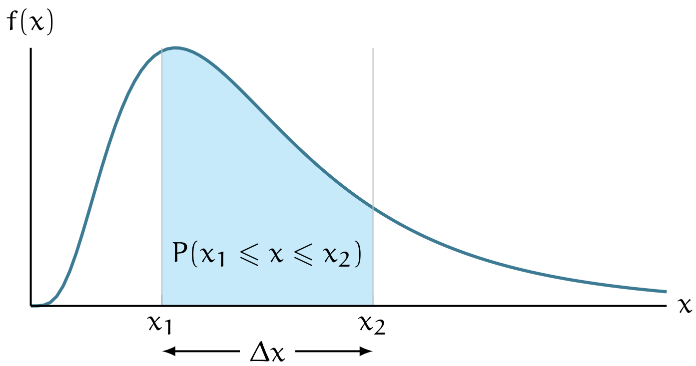
Definition 21. Eine stetige Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$, *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* genannt, besitzt die Eigenschaften:

(1) $f(x) \geqslant 0$,

(2) $P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$,

(3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

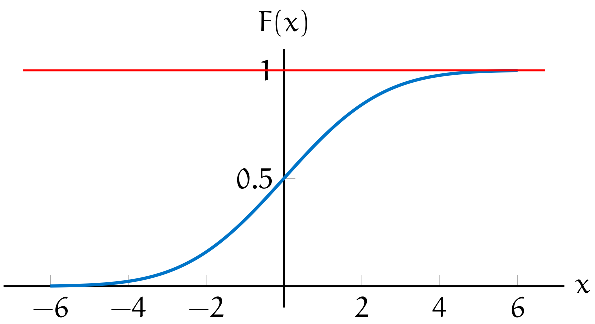
Die Dichte $f(x)$ ist keine Wahrscheinlichkeit; sie muss mit Δx multipliziert werden, um es zu werden. Die Wahrscheinlichkeit ist ein Flächenstück unter der Dichtekurve. In der Abbildung entspricht $P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ der Fläche unter der Kurve $f(x)$ zwischen x_2 und x_1.



Definition 22. Die *Verteilungsfunktion* der stetigen Zufallsvariablen X ist

$$F(X) = P(X \leqslant x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist *Stammfunktion* von der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$.



Die Abbildung zeigt die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable. Die Funktion geht für wachsendes x asymptotisch nach 1. Sie ist non-decreasing? An einer Stelle a bedeutet $F(a)$ die Wahrscheinlichkeit, dass $x \leqslant a$ ist. Für $P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ muss man die Differenz $F(x_2) - F(x_1)$ bilden. Die Inverse von $F(x)$, also die zu $F(x) = p$ gehörigen x-Werte nennt man *Quantile* x_p. Das Quantil $x_{0.5}$ nennt man Median. In der Abbildung ist der Median null.

32.2 Eigenschaften Stetige Zufallsvariable

- $F'(X) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$
- $P(X = a) = 0$
- $P(a < X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$
- $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
- $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx$

Anmerkung 32.3. Bei einer stetigen Zufallsvariable ist $P(X = a)$ null, denn $P(X = a) = P(a \leqslant x \leqslant a) = F(a) - F(a) = 0$. Für eine diskrete Zufallsvariable existiert $P(X = k)$, für eine stetige aber nicht.

32.6 Normalverteilung*

Die Normalverteilung beschreibt die berühmte Gauss'sche Glockenkurve. Sie dient auch als Näherungsfunktion für die Binomialverteilung, je nach Parameter besser oder schlechter. Die Binomialverteilung hat den grossen Nachteil, für grosse Zahlen n die Fakultäten bestimmen zu müssen. Deshalb hat man im 18. Jahrhundert nach Wegen gesucht, diese Rechnung zu vereinfachen. Zur Vorbereitung betrachten wir grosse Fakultäten N. Dafür existiert eine relativ einfache Näherung, die aus folgender Überlegung hervorgeht:

$$\begin{aligned}\ln(N!) &= \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N) \\ &= \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \ldots + \ln(N) = \sum_{k=1}^{N} \ln(k)\end{aligned}$$

Nun machen wir einen Übergang vom diskreten $k \in \mathbb{N}$, d.h ganzzahligen, zum reellen $k \in \mathbb{R}$ mit der Näherung (Integral anstatt Summe):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \ln(k) &\approx \int_1^N \ln(k)dk \\ &= [x\ln(x) - x]_1^N = N\ln(N) - N + \cancel{1} \\ &\approx N\ln(N) - N\end{aligned}$$

und daraus dann einfach

$$N! = \exp(N\ln(N) - N) = \exp(\ln(N^N) - N) = \frac{N^N}{e^N} = \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

32.4 Formel Näherung Fakultät Mit der Euler'sche Zahl $e = 2.71828\ldots$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

N	10	20	50	100	150
Exakt	15.1	42.3	148.5	363.7	605.0
Genähert	13.0	39.9	145.6	360.5	601.6

32.6.1 Näherung von Moivre-Laplace

Die Näherung für grosse n der Binomialverteilung $B(n, p)$ besitzt die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ gemäss folgender Formel

Satz 32.1.

$$f(x) = P(X = k) \;=\; B(k \mid p, n) \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\frac{k}{n} - p\right)^2\right)$$

Die (kumulierte) Verteilungsfunktion ist:

Satz 32.2.

$$F(x) = P\left(x_1 \leqslant \frac{X - np}{\sqrt{n}} \leqslant x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Definition 23. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = \phi(x)$ zur *Standard-Normalverteilung* $F(X) = \Phi(X)$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

Man nennt sie auch *Gauss'sche Glockenkurve*.

Die zugehörige Verteilung ist die Summe aller Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion. Weil die Zufallsgrösse reell ist, wird aus der Summe das Integral über den gesamte Wertebereich von X. Der Wert $1/\sqrt{2\pi}$ stellt sicher, dass die totale Wahrscheinlichkeit gleich 1 ist*

Definition 24. Die *Standard-Normalverteilung* $F(X) = \Phi(X)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

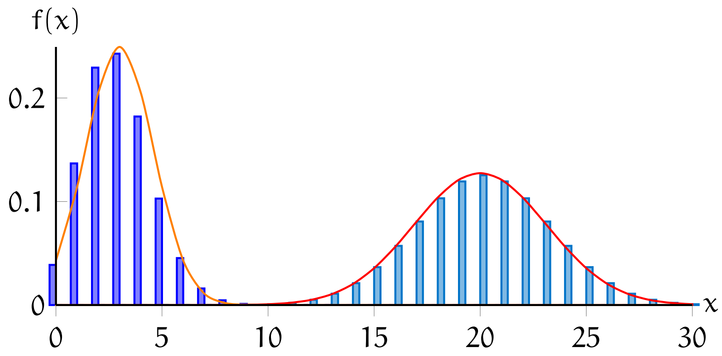
Anmerkung 32.3. Die Standard-Normalverteilung $\Phi(Z)$ für eine Zufallsvariable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist tabelliert (siehe Seite 32-39), weil nicht elementar berechenbar, und besitzt den Erwartungswert $\mu_Z = E(Z) = 0$ und die Varianz $V(Z) = 1$. Mit $X = Z\sigma + \mu$ kann man Z zurücktransformieren.

32.4 Formel Approximation der Binomialverteilung Mit $\mu = np$ und $\sigma = np(1-p)$:

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \underbrace{\sum_{k=x_1}^{x_2} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{Binomialverteilung}}$$
$$\approx \underbrace{\Phi\left(\frac{x_2 + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)}_{\text{Normalverteilung}}.$$

Anmerkung 32.5. Man übernimmt also die Parameter μ und σ von der Binomialverteilung für die Normalverteilung. Damit stimmen sie in Lage und Streuung ungefähr überein.

* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2\pi}$.



In der Abbildung sieht man zwei Approximationen der binomialen Wahrscheinlichkeitsfunktion durch die Dichte der Normalverteilung. Im linken Fall ist sie nicht besonders gut, weil sowohl n nicht besonders gross ist und p nicht nahe bei 0.5. Im rechten Fall ist die Näherung sehr gut, die rote Kurve schmiegt sich mit geringer Abweichung an.

Wichtig 3. Wann ist die Näherung sinnvoll, weil qualitativ genug gut? Es hat sich die Bedingung nach Laplace eingebürgert, wonach gelten sollte

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) > 9.$$

Die Güte der Näherung ist hoch, wenn

- n möglichst gross ist und
- p möglichst nahe bei 0.5.

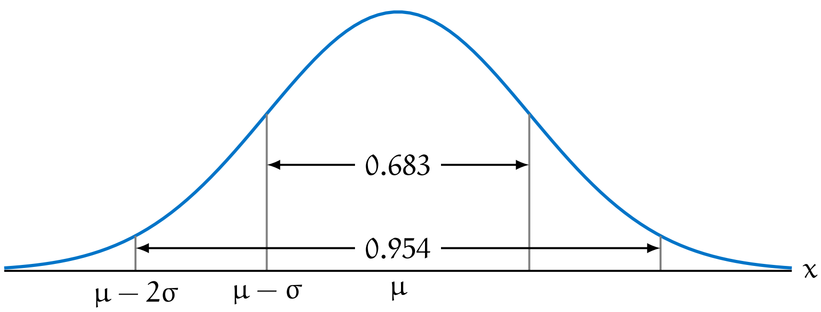
⊣

32.6.2 Eigenschaften der Standard-Normalverteilung

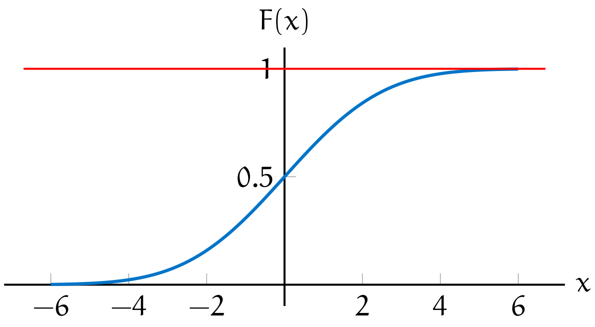
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$, siehe Abbildung, ist symmetrisch zur Achse $x = \mu$. Die Fläche unter dieser Kurve ist 1. Die x-Werte liegen im Intervall $(-\infty, \infty)$, auch wenn die $f(x)$ relativ schnell nach 0 streben. Die Kurve hat zwei Parameter, nämlich Mittelwert und Varianz. Der Mittelwert bestimmt die *Lage* der Kurve, die Varianz die *Streuung*.

32.1 Eigenschaften Normalverteilung

- $P(-a \leqslant X \leqslant -b) = P(b \leqslant X \leqslant a)$ oder $\Phi(-b) - \Phi(-a) = \Phi(a) - \Phi(b)$,
- $P(-a) = 1 - P(a)$ oder $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$



Die Wahrscheinlihckeitsfunktion oder Dichte der Normalverteilung $\phi(x)$ hat die typische Glockenform. Die Verteilung ist das Integral, d.h. Fläche, dieser Funktion und hat den Wertebereich von $(0, 1)$, wie abgebildet:



32.6.3 Stetigkeitskorrektur

In der Formel 32.4 sieht man sehr gut, dass mit der Näherung eine Umstellung von k, einer natürlichen Zahl, auf x, eine reelle Zahl, stattfindet. Zwei Dinge müssen bem Übergang beachtet werden:
Erstens muss man die Ordnungsrelationen "grösser (gleich)" und "kleiner (gleich)" genau verstehen, bevor man die Näherung verwendet

$$P(X_{BV} < x) = P(X_{BV} \leqslant x-1) \quad \text{respektive} \quad P(X_{BV} > x) = P(X_{BV} \geqslant x+1)$$

$$P(X_{BV} \leqslant x) = P(0 \leqslant X_{BV} \leqslant x) \quad \text{respektive} \quad P(X_{BV} \geqslant x) = P(x \leqslant X_{BV} \leqslant n)$$

und besonders

32.1 Formel

$$P(X_{BV} = x) = P(x-0.5 \leqslant X_{BV} \leqslant x+0.5)$$

32.6.4 Beispiel mit Tabelle

32.1 Übung Wir vergleichen eine Binomialverteilung $B(50, 0.3)$ mit der Approximation. Als erstes nehmen wir $P(X = 10)$, also genau 10 Treffer aus 50 Versuchen. Es ist $\mu = np = 15$ und $V(X) = np(1-p) = 10.5$ (nach unserem Kriterium ist ein Approximation zulässig, weil $V(X) > 9$).

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} \cdot \left(0.3\right)^{10} \cdot \left(0.7\right)^{40} = 0.0386$$

Die Näherung ist

$$P\left(\frac{9.5-15}{\sqrt{10.5}} \leqslant X \leqslant \frac{10.5-15}{\sqrt{10.5}}\right)$$

und daher

$$P(-1.7 \leqslant N \leqslant -1.39) = P(1.39 \leqslant N \leqslant 1.7) = \Phi(1.7) - \Phi(1.39) = 0.9554 - 0.9177 = 0.0377$$

Wir zeigen hier eine Ausschnitt der Tabelle 32.6.5 von Seite 32-39.

z	0.00	0.01	0.02 ...	0.07	0.08	0.09
1.2	0.8849	0.8869	0.8888 ...	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066 ...	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222 ...	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357 ...	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474 ...	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573 ...	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656 ...	0.9693	0.9699	0.9706

Für $\Phi(1.7\,0)$ ist die erste Spalte mit der Zeilenbeschriftung 1.7 die gesuchte Zahl, für $\Phi(1.3\,9)$ sucht man die Zeile mit 1.3 und geht zur Spalte mit 0.09. ◁

32.2 Übung Eine Industriebäckerei stellt sehr viele Brote her mit einem Gewicht von x mit einem Mittelwert von $\mu = 1$kg und einer Streuung von $\sigma = 0.05$kg. Wir gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $x \leqslant 0.95$ ist? Gesucht wird $P(x \leqslant 0.95)$, für die Tabelle brauchen wir $z = \frac{x-1}{0.05}$ und damit $x = 0.05z + 1$, eingesetzt $P(0.05z + 1 \leqslant .95)$, daraus $P(0.05z \leqslant -0.05) = P(z \leqslant -1)$. Das ist $P(z \leqslant -1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.413 = 0.159$. ◁

32.6.5 Standardfehler**

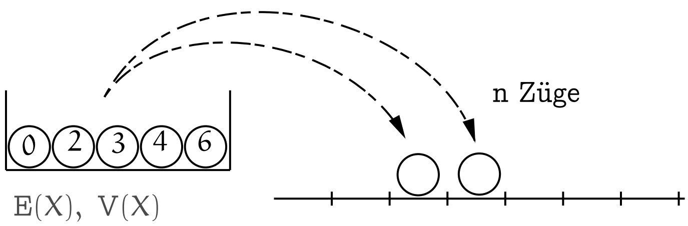
Der wohl wichtigste Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der *Zentrale Grenzwertsatz*, von dem es viele Varianten gibt. Ganz einfach ausgedrückt lautet der einfachste:

Satz 32.1. Zentraler Grenzwertsatz Eine Summe von sehr vielen unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen X_i mit endlicher Varianz ist approximativ normalverteilt.

Anmerkung 32.2. Man beachte, die X_i müssen nicht normalverteilt sein; sie müssen derselben Verteilung angehören, wie es z.B. die gleichverteilten Würfelaugen sind.

Anmerkung 32.3. Messungen sind regelmässig fehlerbehaftet. Führt man viele unabhängige Messungen (mit denselben Instrumenten) durch, so sind die Fehler als Abweichung vom wahren Wert als normalverteilt anzusehen.

32.4 Übung Wir betrachten eine Urne mit fünf Kugeln. Sie tragen Zahlen. Alle Kugeln haben dieselbe Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden.

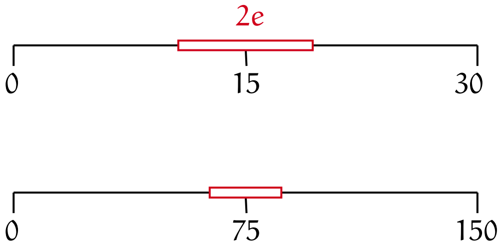


Das Urnenmodell hat den Erwartungswert $E(X) = \frac{1}{5}(0+2+3+4+6) = 3$. Die Varianz ist $V(X) = \frac{1}{5}((-3)^2 + 1 + 0 + 1 + 9) = 20/5 = 4$. Die Standardabweichung ist $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$.

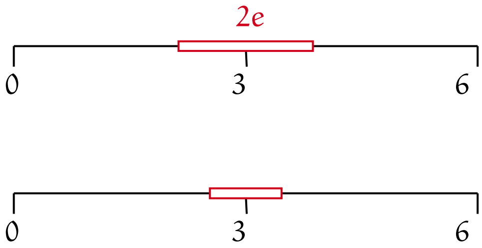
Unser Experiment soll das n-fache Ziehen von Kugeln mit Zurücklegen sein, wobei die Zufallsvariable Y_n die Summe der gezogenen Zahlen sein soll, also $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Wir wählen $n = 25$. Die Summe Y_n kann theoretisch von minimal 0 bis maximal 150 reichen. Es ist aber eher anzunehmen, dass Y_n in der Nähe von $E(Y) = 25 \cdot E(X) = 25 \cdot 3 = 75$ zu liegen kommt. Die Streuung, also Standardabweichung, von Y ist $\sigma_Y = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$ (siehe Eigenschaften 32.4 auf Seite 32-16). ◁

Definition 25. Der *Standardfehler* einer Summe Y mit n Summanden von Zufallsgrössen X_i einer Verteilung mit Standardabweichung σ ist die Grösse

$$e = \sigma_Y = \sqrt{n} \cdot \sigma.$$



Wir vergleichen das Intervall um den Erwartungswert für unser $n = 25$ und $e = 10$ mit dem Fall $n = 5$. Relativ gesehen verringert sich das Intervall mit zunehmendem n. Nun verwenden wir die Normal-Näherung. Aus der Tabelle 32.6.5 von Seite 32-39 lesen wir bei 1.00, das ist σ in standardisierter Form, 0.8413 ab. Für $P(X \leqslant -\sigma)$ würden wir $1 - 0.8413$ erhalten. Für $P(\mu - \sigma < Y < \mu + \sigma)$ also $2 \cdot (0.8413 - 0.5) = 0.6826$.



Wir betrachten anstelle der Summe den Mittelwert, also Summe geteilt durch Anzahl Züge. Wir übernehmen die Abbildung und beschriften sie neu. Man erkennt, dass der Standardfehler des Mittelwertes mit wachsendem n geringer wird. Aufgrund der Eigenschaften 32.4 ist klar, dass gilt $E(Y/n) = E(Y)/n$ und $V(Y/n) = V(Y)/n$ und damit

$$\sigma_{\overline{Y}} = \frac{\sigma_Y \sqrt{n}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Satz 32.5. Der Standardfehler $e_{\overline{Y}}$ des Mittelwertes $\overline{Y}$ ist

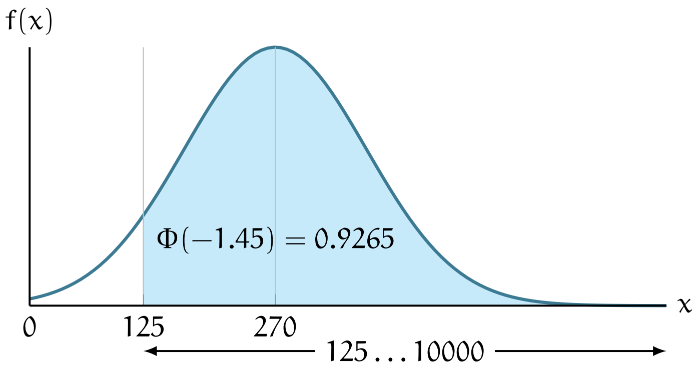
$$\sigma_{\overline{Y}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Anmerkung 32.6. Dies ist eine äusserst wichitige Erkenntnis. Bei gegebener Wahrscheinlichkeit $P(\mu - e_{\overline{Y}}\sigma < \overline{Y} < \mu - e_{\overline{Y}})$ wird das Intervall $\mu \pm e_{\overline{Y}})$ mit n zwar immer kleiner, aber nur nach dem Wurzelgesetz. Wenn man von 10 Würfen auf 100 Würfe geht, den Aufwand also verzehnfacht, dann wird der Standardfehler nur um $\sqrt{10} \approx 3$ mal kleiner.

Für den Mittelwert von n-fach wiederholten Zufallsexperimenten besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{y}$ im Intervall $\mu \pm e_{\overline{Y}}$ zu liegen kommt, 0.683 ist. Das ist der Wert aus der Tabelle 32.6.5 für $\Phi(1) - \Phi(-1)$ und $\Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 = 0.683$.

32.7 Übung Beim (europäischen) Roulette gibt es insgesamt 37 Elementarereignisse, d.h. die Zahlen 0,1,2, ...,36. (Beim amerikanischen gibt es noch die Doppelnull, also 38.) Neben den Zahlen kann man auch auf gerade/ungerede, hoch/tief und rot/schwarz setzen. Wir analysieren nur das Setzen auf rot oder schwarz. Es werde 10,000 mal gedreht, der Einsatz sei immer 1 Geldeinheit, die Auszahlung jeweils 2 Geldeinheiten. Wir betrachten die Zufallsgrösse Nettogewinn der Spielbank.
Das analoge Urnenmodell ist eine Urne mit 19 Kugel "+1" und 18 Kugel "-1". In 19 von 37 Fällen behält die Bank den Einsatz, in 18 von 37 bezahlt sie eine Geldeinheit. Der Erwartungswert des Gewinns eines Spieles für die Bank ist $E(X) = \frac{19}{37} \cdot 1 + \frac{18}{37}(-1) = \frac{1}{37}$.
Die Varianz ist $V(X) = \frac{19}{37} \cdot (1 - \frac{1}{37})^2 + \frac{18}{37} \cdot (-1 - \frac{1}{37})^2 \approx 1$.
Eine mögliche Frage ist: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielbank einen Gewinn von mindestens 150 Geldeinheiten macht?
Der Standardfehler der Gewinnsumme ist $e_Y = \sqrt{10000} \cdot 1 = 100$, der Erwartungswert $E(Y) = 10000 \cdot \frac{1}{37} = 270$. Mit 68.3% Wahrscheinlichkeit ist der Gewinn Y zwischen $y =$

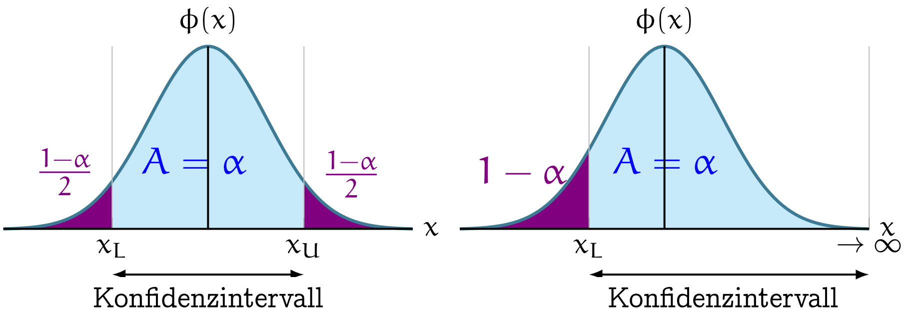
270 ± 100. Für unsere Frage kommt wieder der Zentrale Grenzwertsatz zum tragen mit der Standard-Normalverteilung als Tabelle. Gesucht ist $P(Y \geqslant 125) = 1 - P(Y \leqslant 125)$. Deshalb transformieren wir Y mit $Z = \frac{Y-270}{100}$, speziell $z = \frac{125-270}{100} = -1.45$. $P(z \geqslant -1.45) = 1 - \Phi(-1.45) = \Phi(1.45)$, aus der Tabelle $\Phi(1.45) = 0.9265$. ◁



Das Beispiel stellt sich graphisch wie in der Abbildung dar: Uns interessiert die Strecke von 125 bis zum maximal möglichen, also 10000 mal gewonnen. Weil uns ein Resultat "grösser als" oder "mindestens" interessiert, ist die Wahrscheinlichkeit einseitig. In der Abbildung sieht man auch, wie eine Zufallsgrösse, die nur positiv, grösser als null, sein kann, durch die Normalverteilung, die von $-\infty$ bis ∞ nur angenähert wird. Die Fläche der Funktion im negativen Bereich wird vernachlässigt. Man könnte dies korrigieren, indem man die Fläche neu normiert. Man nennt das Stutzen.

Konfidenzintervall

Konfidenzintervalle sind eine Art Verallgemeinerung des Standardfehlers, der ja das Intervall $\mu \pm \sigma$ umfasst und mittels Normalverteilung damit 68.3% abdeckt.
Nun kann man das Intervall in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit festlegen und anstatt 68.3% etwa 90, 95 oder 99% wählen. Wie aus den obigen Beispielen ersichtlich, kann man das Intervall symmetrisch um den Mittelwert wählen; dann ist es zweiseitig. Oder man wählt ein Intervall einseitig, wie beim Roulette-Beispiel.



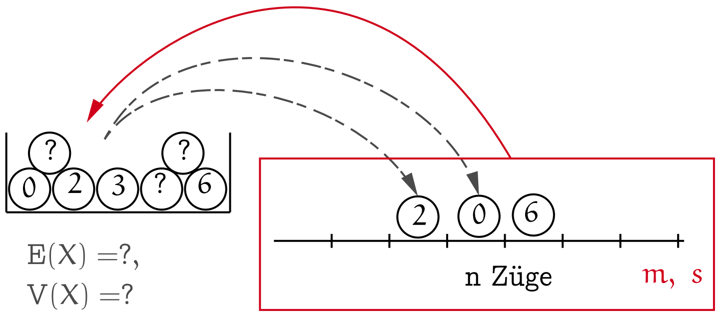
Definition 26. Ein Intervall (x_L, x_U) mit der Eigenschaft

$$P(x_L \leqslant Y \leqslant x_U) = 1 - \alpha$$

heisst *Konfidenzintervall* für den Zufallsvariable Y zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

Anmerkung 32.8. Übliche Konfidenzniveaus sind 90%, 95% und 99%.

In unseren Beispielen war das Urnenmodell bekannt, damit auch der Mittelwert und Varianz von X und der Summe Y. In vielen Fällen ist aber nur die Realisierung, also das Resultat eines Zufallsversuchs bekannt. Damit ist der Mittelwert m und die Standardabweichung s eine Zufallsvariable. Man verwendet Konfidenzintervalle, um solche Parameter zu schätzen. Solche Fragestellungen werden in der beurteilenden Statistik behandelt.


?
?
0
2
3
?
6
2
0
6
n Züge
m, s
E(X) =?,
V(X) =?

Aufgaben

5.9 Anlässlich einer Umfrage unter 750 Personen geben 225 der Befragten an, im Jahr 2019 eine Flugreise unternommen zu haben.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 Personen mindestens 1 Person geflogen ist? [54 ‰]

Von den übrigen 525 Personen sind 40% Vegetarier. Insgesamt sind 68% der Befragten keine Vegetarier. Eine der befragten Personen werde nun zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(b) sie 2019 eine Flugreise unternahm und zu den Vegetariern gehört? [54 ‰]

(c) sie 2019 eine Flugreise unternahm, falls sie zu den Vegetariern gehört? [27 ‰]

(d) sie 2019 eine Flugreise unternahm oder zu den Vegetariern gehört? [27 ‰]

(e) sie 2019 eine Flugreise unternahm und zu den Vegetariern gehört oder beides nicht der Fall ist? [27 ‰]

9 **(a)** "Mindestens", d.h. Gegenereignis $P(\text{mindestens } 1) = 1 - P(\text{keine})$. $p_g = \frac{225}{750} = 0.3$ und $p_{ng} = 0.7$. $P(\text{keine}) = 0.7^3 = 0.343$. Deshalb $P(\text{mindestens } 1) = 1 - 0.343 = 0.657$.

(b) Von den nicht-geflogenen sind $0.4 \cdot 525 = 210$ Vegetarier. Insgesamt sind $1 - 0.68 = 0.32$ Vegetarier, also $0.32 \cdot 750 = 240$. Somit sind $30 = 240 - 210$ geflogene Vegetarier. Tabelle

	geflogen	nicht geflogen	total
Anzahl	225	525	750
Vegetarier	30	210	240
Nicht Veg.	195	315	510

Antwort: $\frac{30}{750} = 0.04$.

(c) Antwort: $\frac{225+210}{750} = 0.58$.

(d) Antwort: $\frac{30+315}{750} = 0.46$

5.10 Erkan ist der Elfmeterschütze seiner Fussballmannschaft. Zu Spielbeginn verwertet er einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% zu einem Tor. Nachher sinkt seine Treffsicherheit bis zum Spielende nach 90 Minuten linear auf 65%. Erkan schiesst nach der 18., nach der 54. und nach der 81. Minute je einen Elfmeter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) verwertet er den dritten Elfmeter? [24 ‰]

(b) verwertet er keinen Elfmeter? [48 ‰]

(c) verwertet er genau einen Elfmeter? [48 ‰]

(d) verwertet er im Training genau drei von fünf Versuchen, wenn seine Treffsicherheit dort konstant 90% beträgt? [48 ‰]

(e) Für welche Elfmeter hätte die Mannschaft im Spiel auf Roland als Schützen setzen sollen, dessen Treffsicherheit $g(t)$ folgender Zeit-Wahrscheinlichkeits-Funktion gehorcht? [24 ‰]

$$g(t) = 0.2 \cdot \ln(-t + 100)$$

10 Die Formel für die Wahrscheinlichkeit ist gemäss $y = m \cdot t + b$, hier $y = -0.25 \cdot t/90 + 0.9$. (Prüfung: bei $t = 0$ folgt 0.9, bei $t = 90$ folgt 0.65) $y_1 = -0.25 \cdot 18/90 + 0.9 = 0.85$, $y_2 = -0.25 \cdot 54/90 + 0.9 = 0.75$ und $y_3 = -0.25 \cdot 81/90 + 0.9 = 0.675$.

(a) $p = 0.675$

(b) $p = (1 - 0.85)(1 - 0.75)(1 - 0.675) = 0.0122$

(c) $P = 0.85(1 - 0.75)(1 - 0.675) + (1 - 0.85)(0.75)(1 - 0.675) + (1 - 0.85)(1 - 0.75)0.675 = 0.131$

(d) Binomialverteilung $B(5, 0.9)$, also $P = \binom{5}{3} 0.9^3 0.1^2 = 9 \cdot 0.729 \cdot 0.01 = 0.0656$

(e) Wir rechnen die Funktion für $t = (18, 54, 81)$ aus, das gibt $g(\{18, 54, 81\}) = \{0.88, 0.77, 0.59\}$. Auf die ersten zwei, denn 0.88>0.85 und 0.77>0.75.

5.11 Eine Urne enthält 10 Kugeln, nämlich 1 weisse, 2 blaue, 3 rote und 4 schwarze. Es wird viermal eine Kugel herausgezogen, ihre Farbe notiert und wieder zurückgelegt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle vier Kugeln die gleiche Farbe ?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle vier Kugeln von verschiedener Farbe?

Nun werden vier Kugeln gleichzeitig gezogen.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle gezogenen Kugeln blau oder rot?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit halten wir mehr blaue als weisse Kugeln in der Hand?

11 **(a)** Die "gleiche Farbe" bedeutet die disjunkten Ereignisse (w,w,w,w), (b,b,b,b), (r,r,r,r) und (s,s,s,s). Die Wahrscheinlichkeiten sind nach Anteil an der Urne $p_w = 1/10 = 0.1$, $p_b = 0.2$, $p_r = 0.3$ und $p_s = 0.4$. Es ist wegen der Unabhängigkeit $P((w,w,w,w)) = 0.1^4$, $P((b,b,b,b)) = 0.2^4$, $P((r,r,r,r)) = 0.3^4$ und $P((s,s,s,s)) = 0.4^4$. Total $P(\text{gleichfarbig}) = 0.1^4 + 0.2^4 + 0.3^4 + 0.4^4 = 0.0001 + 0.0016 + 0.0081 + 0.256 = 0.0354$.

(b) Gesucht $P((w,b,r,s)) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.0024$.

(c) Blau oder rot bedeutet, fünf Kugel von 10, also $p = 0.5$. Damit $P(b oder r) = 0.5^4 = 0.0625$.

(d) "Mehr blaue als weisse" sind die Ereignisse (w,b,b,x) mit $x \in \{b,r,s\}$, also (w,b,b,b), (w,b,b,r) und (w,b,b,s). Mit $P((w,b,b,b)) = 0.1 \cdot 0.2^3$, $P((w,b,b,r)) = 0.004 \cdot 0.3$, $P((w,b,b,s))) = 0.004 \cdot 0.4$ und zusammen $P = 0.004(0.2 + 0.3 + 0.4) = 0.004 \cdot 0.9 = 0.0036$.

5.12 An einer Cocktail-Bar kontrollieren zwei Angestellte die Gäste auf Volljährigkeit. Der Angestellte A begutachtet 40% aller Ausweise und die Angestellte B die restlichen 60%. Die Wahrscheinlichkeit, dass A den gefälschten Ausweis eines inderjährigen Gastes als solchen erkennt, ist 50%. Die Erfolgsquote von B beträgt 30%.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein minderjähriger Gast nicht erwischt wird?

(b) In einer Partygruppe von 10 Personen hat es genau einen minderjährigen Gast. B wählt aus dieser Gruppe zufällig drei Personen aus und kontrolliert sie. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ihn entdeckt?

(c) Einem minderjährigen Gast ist es gelungen, an der Bar harten Alkohol zu rhalten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er von A kontrolliert wurde?

(d) Wie viele Minderjährige müssen es versuchen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer Alkohol erhält, 99.99% übersteigt?

12 **(a)** Zur Übersicht kann man eine Tabelle, einen Ereignisbaum oder ein Mengendiagramm machen. Z.B. Tabelle

	A	B	Total
Minderj. Gäste	40	60	100
Erkannt	20	18	38
Nicht erkannt	20	42	62

Die Nicht-Erkannten sind 62 von Hundert, also 0.62=62%.

(b) WS ausgewählt zu werden (Binomialverteilung): $p = \binom{3}{1} 0.1 \cdot 0.9^2 = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.81 = 0.243$. WS erkannt zu werden von B. $\frac{18}{60} = 0.3$. Zusammen $P = 0.429 \cdot 0.3 = 0.129$.

(c) Aus der Tabelle: $p = \frac{20}{62} = 0.323$.

(d) "Mindestens", deshalb Gegenereignis "keiner": $P(x \geqslant 1) = 1 - P(x = 0) > 0.999$. Daraus $0.001 > P(x = 0)$, $P(x = 0) = p^n$ mit $p = \frac{38}{100} = 0.38$, also $P(x = 0) = 0.38^n$. Einsetzen $0.001 > 0.38^n$. Logarithmieren $\ln(0.001) > n \cdot \ln(0.38)$, mit Werten $-6.91 > n \cdot (-0.968)$. Mit (-1) multiplizieren und Zeichen wechseln: $6.91 < 0.968n$, $7.14 < n$. Damit $n = 8$.

5.13 Bei einem idealen Würfel sind 3 Seiten rot, 2 Seiten gelb und 1 Seite blau gefärbt.

(a) Der Würfel werde einmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Würfel rot oder gelb? [34‰]

(b) Der Würfel werde zweimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Würfel nie blau? [17‰]

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Würfel zweimal dieselbe Farbe? [34‰]

(d) Der Würfel werde dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird genau einmal rot geworfen? [52‰]

(e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens einmal rot geworfen?[34‰]

(f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jede Farbe geworfen? [52‰]

13 **(a)** Es ist $p_r = 1/2$, $p_g = 1/3$ und $p_b = 1/6$. Es hat 5 rote oder gelbe Seiten, also ist $p = \frac{5}{9}$.

(b) "Nie blau" heisst "nur rot oder geld". Also $p = \frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{36} = 0.694$.

(c) Disjunkte Ereignisse (r,r), (b,b) und (g,g). Damit $P = P((r,r)) + P((g,g)) + P((b,b)) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{18+9+1}{36} = \frac{28}{36} = 0.778$.

(d) Typ Binomialverteilung: $P = \binom{3}{1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$.

(e) "Mindestens", also Gegenereignis $P(r \geqslant 1) = 1 - P(r = 0)$ $P(r = 0) = (\frac{1}{3})^3 = 1/8$ also $P(r \geqslant 1) = 7/8$.

(f) $P(r,g,b) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

5.14 In einem Frühjahr trägt ein Apfelbaum viele Blüten. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Blüte bestäubt wird, ist 0.5. Die Wahrscheinlichkeit, dass aus einer bestäubten Blüte ein reifer Apfel wird, ist 0.4.

(a) An einem Ast hat es 6 Blüten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Blüte bestäubt wird? [36‰]

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus zwei Blüten zwei reife Äpfel werden? [36‰]

(c) An einem Ast hat es 12 Blüten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Ast genau 3 reife Äpfel tragen wird? [36‰]

(d) Wie viele Blüten muss ein Ast haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass an diesem Ast mindestens ein reifer Apfel wächst, grösser als 99,9% ist? [71‰]

14 **(a)** "Höchstens eine" bedeutet $k \in \{0,1\}$ also $P = P(k=0)+P(k=1)$. $P(k=0) = 0.5^0 \cdot 0.5^6 = 0.5^6$, $P(k=1) = 0.5 \cdot 0.5^5 = 0.5^6$, damit $P = 2 \cdot 0.5^6 = 0.0313$.

(b) $P(\text{reifer Apfel}) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$, zwei reife Äpfel: $p = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$

(c) Binomialmodell, $P = \binom{12}{3}0.2^3 0.8^9 = 0.236$.

(d) Tipp: "mindestens", damit Gegenereignis, $P(x \geqslant 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0) > 0.999$. Damit $0.001 > P(x = 0)$. Mit $P(x = 0) = 0.8^n$ folgt $0.001 > 0.8^n$. Logarithmieren: $\ln(0.001) > n \cdot \ln(0.8)$ oder $-6.91 > n(-0.223)$ und $6.91 < 0.223n$. Daraus $n > 30.99$. Damit $n = 31$.

5.15 Ein gewöhnlicher Spielwürfel wird sechs Mal hintereinander geworfen. [200‰]

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau drei Mal eine '5' gewürfelt wird?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei jede der sechs Augenzahlen genau einmal vorkommt?

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei alle Augenzahlen genau in der Reihenfolge '1', '2', '3', '4', '5', '6' nacheinander auftreten?

(d) Ein anderer, gefälschter Würfel hat eine veränderte Wahrscheinlichkeit $p \neq \frac{1}{6}$ für die Augenzahl '6'. Die Wahrscheinlichkeit, in zwei Würfen mit diesem Würfel genau einmal eine '6' zu würfeln, ist $\frac{3}{8}$. Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit p ?

(e) Zwei gewöhnliche Würfel sollen 180 Mal gleichzeitig miteinander geworfen werden. Wie oft kann dabei eine Augensumme beider Würfel von 7 erwartet werden? Wie gross ist die zu erwartende Standardabweichung von diesem Mittelwert?

15 **(a)** Das ist die Grundmodell zur Binomialverteilung. Antwort: $P(X = 3) = \binom{6}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^3 = 20 \cdot \frac{5^3}{6^6} = 0.0536$.

(b) Angenommen wir haben alles unterschiedliche Zahlen gewürfelt. Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt, gibt es 6! Kombinationen. Insgesamt gibt es 6^6 Anordnungen. Damit also $p = \frac{6!}{7^6} = \frac{720}{46656} = 0.0154$.

(c) Es gibt nur eine Möglichkeit für dieses Resultat. Alle Möglichkeiten sind 6^6. Damit ist $p = 1/6^6 = 1/46656 = 0.000021$.

(d) Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs sei p, für nicht eine Sechs deshalb $(1-p)$ und somit für genau eine Sechs $\binom{2}{1}p(1-p)$ als $P = 2p(1-p) = 3/8$. Damit folgt $p - p^2 = -3/16$. Quadratische Ergänzen gibt $(p-0.5)^2 - 0.25 = -3/16$ und $(p-0.5)^2 = 1/4 - 3/16 = 1/16$. Daraus $p - 0.5 = \pm 1/4$ und $p = 0.5 \pm 0.25$ und $p_{1,2} = \{0.25, 0.75\}$. Es gibt zwei Lösungen.

(e) Es gibt 6 Möglichkeiten für eine 7 (das ist (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)). Insgesamt gibt es 36 Anordnungen. Also ist $P(7) = 1/6$. Der Erwartungswert bei 180 Würfen ist 180/6=30, nämlich 180 mal den Erwartungswert eines Doppelwurfes. Wir haben die Ereignisse $(7, \text{nicht}7)$ mit den Zufallsgrössen $(1, 0)$. Der Erwartungswert ist $1/6$. Die Varianz des Doppelwurfs ist $V(x) = 1/6(1-1/6)^2 + 5/6(0-1/6)^2$ und somit $\frac{5^2}{6^3} + \frac{5}{6^3} = \frac{30}{216}$. Die Standardabweichung für einen Zug ist $\sigma = \sqrt{30/216}$. Für die Summe von 180 Zügen ist dann $\sigma_{180} = \sqrt{180}\sqrt{30/216} = \sqrt{25} = 5$.

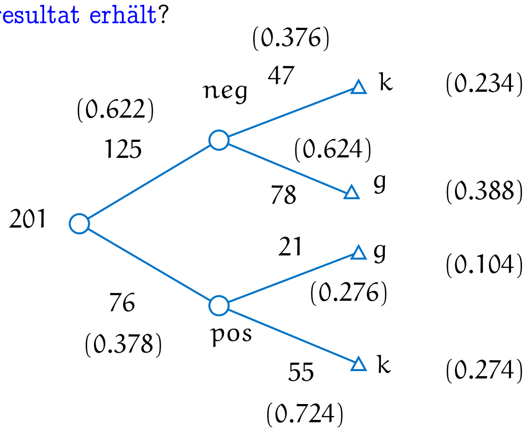
5.16 Eine Gruppe von insgesamt 201 Personen wird mit einem noch nicht erprobten Test auf eine Erbkrankheit getestet. Bei 125 Personen fällt dieser Test negativ aus; 47 Personen haben diese Krankheit, obwohl der Test negativ ausgefallen ist, und 21 Personen haben diese Krankheit nicht, obwohl der Test positiv ausgefallen ist. [200‰]

(a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm, das für diese Gruppe die absoluten Häufigkeiten sowie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten jedes Teilpfades enthält.

(b) Eine Person wird nun zufällig herausgegriffen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person diese Krankheit aufweist?

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit negativem Testergebnis diese Krankheit aufweist?

(d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit dieser Krankheit ein negatives Testresultat erhält?



16 (a)

(b) $P(k) = 0.234 + 0.274 = 0.508$.

(c) $P(k|neg) = 0.234$

(d) $P(neg|k) = \frac{47}{47+55} = 0.461$.

5.17 Wir platzieren 16 rote und 24 blaue Kugeln in einer Urne und mischen kräftig. Das Ziehen der Kugeln erfolgt mit Zurücklegen darf als vollkommen zufällig betrachtet werden. [186‰]

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Ziehen nur gleiche Farben gezogen werden? [21‰]

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei fünfmaligem Ziehen mindestens einmal eine rote Kugel zu ziehen? [21‰]

(c) Wie oft muss man ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal eine blaue Kugel zu ziehen, grösser als 0.95 ist? [29‰]

(d) Wir betrachten folgendes Spiel:

- Man zieht nacheinander Kugeln aus der Urne.
- Zieht man eine blaue Kugel beim ersten Zug, so erhält man Fr. 5.–, zieht man eine blaue beim zweiten Zug Fr. 10.–, zieht man eine blaue beim dritten Zug Fr. 15.–.
- Zieht man eine rote Kugel, so muss man Fr. 5.– bezahlen.

- Das Spiel ist beendet, wenn entweder eine blaue Kugel gezogen wird, oder wenn die dritte Kugel gezogen wurde.

Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn bei diesem Spiel. [43‰]

(e) Sie gewinnen beim Spiel aus d) Fr. 5.–. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie beim zweiten Zug das Spiel beendet? [36‰]

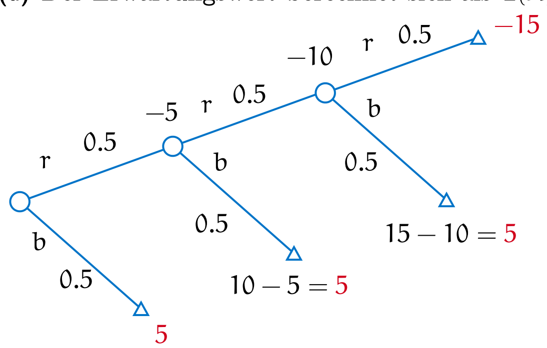
(f) Wir ziehen 20 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 20 Kugeln 8, 9 oder 10 Kugeln rot sind? [36‰]

17 **(a)** Gleiche Farbe, 2 Ereignisse (r, r, r) und (b, b, b). $P((r, r, r)) = (\frac{2}{5})^3 = 0.0604$ und $P((b, b, b)) = (\frac{3}{5})^3 = 0.216$, total $P() = 0.276$

(b) Tipp: “mindestens”, deshalb Gegenereignis. $P((b, b, b, b)) = (\frac{24}{40})^4 = (\frac{3}{10})^4 = 0.000006$, damit $P() = 1 - 0.000006 = 0.999994$

(c) Mit der binomischen Verteilung und Gegenereignis $P(b \geqslant 1) > 0.95$ wird dann $1-P(b = 0) > 0.95$ und $-P(b = 0) > -0.05$ weiter $P(b = 0) < 0.05$. Mit Formel $P(b = 0) = \binom{n}{0}(\frac{3}{5})^0(\frac{2}{5})^n = (\frac{2}{5})^n$ also $(\frac{2}{5})^n < 0.05$. Damit $n \log(0.4) < \log(0.05)$ und $n(-0.92) < (-3)$ und $n(0.92) > 3$, $n > \frac{3}{0.92} = 3.26$ also $n = 4$.

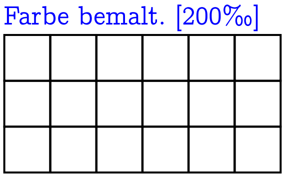
(d) Der Erwartungswert berechnet sich als $E(X) = 0.5 \cdot 5 + 0.25 \cdot 5 + 0.125 \cdot 5 - 0.125 \cdot 15 = 1.25$.



(e) Es gibt drei Möglichkeiten für eine 5. Die Wahrscheinlichkeiten sind 1/2, 1/4 und 1/8. Eine 5 im zweiten Zug hat die WS 1/4. Daraus folgt $P(5|(b, b)) = \frac{1/4}{1/4+1/2+1/8} = \frac{2/8}{2/8+4/8+1/8} = \frac{2/8}{7/8} = \frac{2}{7}$.

(f) Frage nach binomialverteilten Ereignissen, denn Modell “n mal Kopf in 20 Zügen”. $P(A = \{8, 9, 10\}) = P(k = 8) + P(k = 9) + P(k = 10)$. $P(k = 8) = \binom{20}{8}(0.4)^8(0.6)^{12} = 125970 \cdot 0.000655 \cdot 0.002176782 = 0.180$, $P(k = 9) = \binom{20}{9}(0.4)^9(0.6)^{11} = 0.160$ und $P(k = 10) = \binom{20}{10}(0.4)^{1}0(0.6)^{10} = 0.117$, zusammen $P = 0.457$.

5.18 Jedes der 18 Felder des rechts skizzierten Rechtecks wird entweder mit schwarzer oder mit weisser Farbe bemalt. [200‰]



(a) Wie viele verschieden bemalte Rechtecke sind möglich?

(b) Wie viele verschiedene Rechtecke mit 10 weissen und 8 schwarzen Feldern gibt es

(c) Jedes Feld werde zufällig – entsprechend dem Ausfall eines Münzenwurfs – schwarz oder weiss bemalt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es auf diese Weise mindestens eine Spalte (3 übereinander liegende Felder) gibt, die schwarz ist.

(d) Sie haben ein Rechteck mit 10 weissen und 8 schwarzen Feldern vor sich. Darauf wer- fen Sie zufällig 12 Sandkörner. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 dieser Sandkörner in einem schwarzen Feld zu liegen kommen?

(e) Auf ein anders bemaltes Rechteck werden nun wieder zufällig 2 Sandkörner geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines davon auf einem weissen und das andere auf einem schwarzen Feld zu liegen kommt, ist gleich $\frac{5}{18}$. Wie viele Felder dieses Rechtecks sind schwarz bemalt?

18 **(a)** Mit zwei Farben: $M = 2^{18} = 262'144$.

(b) $\binom{18}{10} = \binom{18}{8} = 43758$.

(c) $P((s,s,s)) = 0.5^3 = 1/8 = 0.125$, Modell: schwarze Spalten auf 6 Plätze verteilen. "mindestens", deshalb Gegenereignis "keine schwarze Spalte". $P = 1 - P(k=0) = 1 - \binom{6}{0}(7/8)^6 = 1 - 0.449 = 0.551$

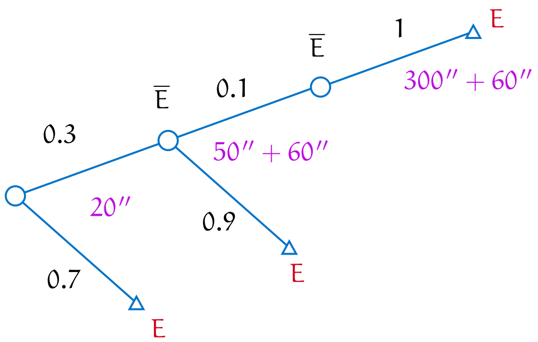
(d) $p_s = 8/18 = 4/9$, Binomialmodell $P = \binom{12}{5}(4/9)^5(5/9)^7 = 0.224$.

(e) Zwei Ereignisse (s, w) und (w, s). Jedes hat WS $p(1-p)$, zusammen $2p(1-p)$, damit $2p(1-p) = 5/18$ oder äquivalent $p(1-p) = 5/36$ und weiter $p^2 - p = -5/36$, quadratisch ergänzt $(p-1/2)^2 - 1/4 = -5/36$, $(p-1/2)^2 = 4/36$, radiziert (Wurzel gezogen) $p - 1/2 = \pm 1/3$ und schliesslich $p = 1/2 \pm 1/3$ und $\{1/6, 5/6\}$. Anzahl Felder entweder 3 oder 15.

5.19 (Teilaufgabe) Das Handgepäck auf diesem Flughafen wird mit maximal drei Kontrollen geprüft: Eine erste Kontrolle mit einem Schnellscanner führt mit 70%iger Wahrscheinlichkeit zu einem eindeutigen Resultat; andernfalls wird eine zweite Kontrolle mit einem hochauflösenden 3D–Scanner durchgeführt, die mit 90%iger Wahrscheinlichkeit zu einem eindeutigen Resultat führt. Bringt auch diese kein eindeutiges Resultat, wird in einer dritten Kontrolle das Gepäckstück eöffnet und genau durchsucht, was auf jeden Fall zu einem eindeutigen Resultat führt.

(a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, welches diesem Ablauf entspricht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass spätestens nach der zweiten Kontrolle ein eindeutiges Resultat vorliegt? [40‰]

(b) Die erste Kontrolle dauert 20 Sekunden, die zweite Kontrolle dauert 50 Sekunden, und die dritte Kontrolle dauert 5 Minuten. Zwischen zwei Kontrollvorgängen vergeht jeweils eine Minute. Wie lange dauert eine solche Gepäckkontrolle im Mittel? [40‰]



19 **(a)** Nach zwei Stufen haben die Ereignisse E die Wahrscheinlichkeit $p = 0.7 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.97$.

(b) Wahrscheinlichkeitsgewichtete Zeiten als Mittel. $M = 0.7 \cdot 20 + 0.3 \cdot 0.9 \cdot (20 + 110) + 0.3 \cdot 0.1 \cdot 1 \cdot (20 + 110 + 360) = 63.80\text{s}$

5.20 In einem Geldbeutel befinden sich 15 Münzen, von denen 5 gezinkt sind. [200‰]

(a) Es werden drei Münzen ohne Zurücklegen aus dem Geldbeutel genommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine davon gezinkt ist.

(b) Wie viele Male muss eine Münze zufällig gezogen und sofort wieder zurückgelegt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine gezinkte gezogen wird?

(c) Eine zufällig gezogene Münze aus dem Geldbeutel wird zwei Mal geworfen. Zeigt sie zuerst Kopf und dann Zahl, so gewinnt ein erster Spieler. Bei der umgekehrten Reihenfolge gewinnt ein zweiter Spieler. In den anderen Fällen wird das Spiel wiederholt. Begründen Sie, warum dadurch tatsächlich ein faires Spiel garantiert wird.

(d) Ein Casino bietet das folgende Spiel an: Ein Spieler bezahlt einen Einsatz von 18 CHF. Dafür wird eine gezinkte Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% Kopf zeigt, zweimal geworfen. Zeigt die Münze zweimal Zahl, erhält der Spieler 30 CHF, zeigt sie zwei Mal Kopf, erhält er 10 CHF; in allen anderen Fällen erhält er x CHF. Wie gross muss x sein, damit dieses Spiel fair ist?

(e) Eine erste Münze zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% Kopf, eine zweite zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% Kopf. Die beiden Münzen werden miteinander geworfen: Eine der beiden Münzen zeigt nun Kopf, die andere Zahl. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es die erste Münze ist, die Kopf zeigt?

20 **(a)** "Mindestens", Gegenereignis betrachte: $P(k \geqslant 1) = 1 - P(k = 0)$ mit $p_z = 5/15$ und $p_{nz} = 10/15$ folgt $P(k = 0) = (10/15)^3 = 0.3$, damit $P(k \geqslant 1) = 1 - 0.3 = 0.7$

(b) $P(k \geqslant 1) \geqslant 0.95$ oder $1 - (10/15)^x \geqslant 0.95$ und $0.05 \geqslant (10/15)^x$. Logarithmieren $\ln(0.05) \geqslant x \ln(10/15)$ und $-3 \geqslant x(-0.406)$ ist gleich (Ordnungsrelation umkehren) $3 \leqslant 0.406x$ und $3/0.406 = 7.39 \leqslant x$, so dass $x = 8$.

(c) Bei jeder Münze, ob gezinkt oder nicht, gilt $p_K + p_Z = 1$. Die Ereignisse (K, Z) und (Z, K) sind gleichwahrscheinlich, denn die Ausgänge sind unabhängig. Es ist fair, weil jeder Spieler die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit besitzt.

(d) Faires Spiel heisst, Einsatz gleich erwartetem Gewinn. Hier also $E(\text{Gewinn}) = 18$. Es ist $P(Z, Z)) = 0.4^2 = 0.16$, $P((K, K)) = 0.6^2 = 0.36$ und $P(\text{sonst}) = 1 - P(Z, Z)) - P((K, K)) = 1 - 0.52 = 0.48$. Der Erwartungswert $E(G) = 30P(Z, Z)) + 10P(K, K)) + x0.48 = 18$ oder $30 \cdot 0.16 + 10 \cdot 0.36 + x0.48 = 18$ und $8.4 + 0.48x = 18$, $0.48x = 9.6$ und $x = 20$.

(e) Die Wahrscheinlichkeit ist $p = \frac{70}{110} = 0.636$, denn der eine zeigt Kopf in 70 von Hundert und der andere in 40 von Hundert. Damit erscheint in 110 von 200 Kopf, oder in 55 von 100 Doppelwürfen. Von den 110 stammen 70 vom ersten Würfel.

Standard-Normalverteilung $\Phi(z = \frac{x-\mu}{\sigma^2})$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Index

Binomialverteilung, 32-18

Definition
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 32-8
- disjunkt, 32-3
- Ereignisraum, 32-1
- Erwartungswert, 32-15
- Häufigkeit, 32-6
- komplementäre Ereignis, 32-3
- Konfidenzintervall, 32-30
- Partition, 32-2
- Produkt zweier Ereignisse, 32-3
- Realisationen, 32-4
- sicheres Ereignis, 32-3
- Standard-Normalverteilung, 32-25
- Standardabweichung, 32-16
- Standardfehler, 32-28
- Summe zweier Ereignisse, 32-3
- unabhängig, 32-13
- unmögliches Ereignis, 32-3
- unvereinbar, 32-3
- Varianz, 32-16
- Verteilungsfunktion, 32-15, 32-23
- Wahrscheinlichkeit, 32-5, 32-6
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, 32-23
- Wahrscheinlichkeitsfunktion, 32-14
- Wahrscheinlichkeitsraum, 32-13
- Zerlegung, 32-2
- Zufallsexperiment, 32-1
- Zufallsvariable, 32-4
- zusammengesetztes Ereignis, 32-2

Gauss'sche Glockenkurve, 32-25
Gegenereignis, 32-8

Median, 32-23

Zentraler Grenzwertsatz, 32-28