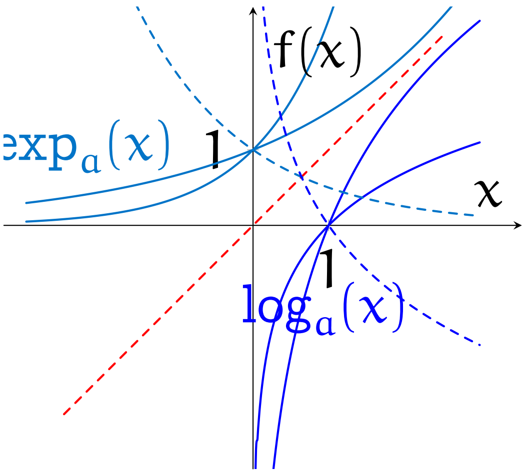
Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Exponentialgleichungen und Logarithmen



Claudio Franzetti

14. Oktober 2021

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

Aufbaukapitel

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Exponentialgleichungen und Logarithmen

1.1 Exponentialgleichungen und -ungleichungen

1.1.1 Grundlagen

Die Definition lautet: Als Exponentialfunktion bezeichnet man eine Funktion der Form $f(x) = a^x$ mit einer reellen Zahl $a > 0$ und $\neq 1$ als Basis (Grundzahl). Man kann auch $\exp_a(x) = a^x$ schreiben. Speziell ist $\exp_e(x) = \exp(x) = e^x$.

1.1 Eigenschaften Exponentialfunktion Es ist $\exp_b(x) = b^x$ eine Exponentialfunktion mit $b > 0$ und $b \neq 1$, und es sind u und w reelle Zahlen. Dann gilt

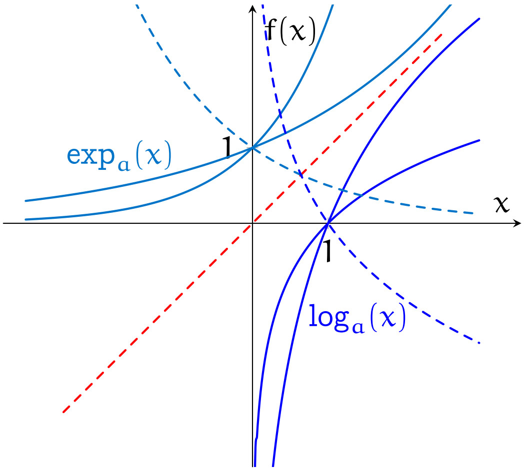
Produktregel	$b^{u+w} = b^u b^w$	,	$\exp_b(u + w) = \exp_b(u) \cdot \exp_b(w)$
Quotientenregel	$b^{u-w} = \frac{b^u}{b^w}$	,	$\exp_b(u - w) = \frac{\exp_b(u)}{\exp_b(w)}$
Potenzregel	$(b^u)^w = b^{u \cdot w}$	,	$\exp_b(u)^w = \exp_b(u \cdot w)$
Inverse	$\log_b(b^u) = u$	,	$\log_b(\exp_b(u)) = u$
	$b^{\log_b(u)} = u$	,	$\exp_b(\log_b(u)) = u$
Nullelement	$b^0 = 1$	,	$\exp_b(0) = 1$
injektiv	$(b^u = b^w) \Rightarrow (u = w)$	,	$\exp_b(u) = \exp_b(w) \Rightarrow (u = w)$

In den meisten Übungen wird man gleichzeitig die Expoenential- und die Logarithmusfunktion brauchen. Deshalb macht es Sinn, hier schon die Eigenschaften der Log-Funktion zu wiederholen.

1.2 Eigenschaften Logarithmus Es ist $w = \log_b(u) \Leftrightarrow b^w = u$ eine Logarithmusfunktion mit $b > 0$ und $b \neq 1$, und es sind u und w reelle Zahlen. Dann gilt

Produktregel	$\log_b(u \cdot w) = \log_b(u) + \log_b(w)$
Quotientenregel	$\log_b(\frac{u}{w}) = \log_b(u) - \log_b(w)$
Potenzregel	$\log_b(u^w) = w \cdot \log_b(u)$
Inverse	$\log_b(\exp_b(u)) = \log_b(b^u) = u$
	$\exp_b(\log_b(u)) = b^{\log_b(u)} = u$
Nullelement	$\log_b(1) = 0$
injektiv	$(\log_b(u) = \log_b(w)) \Rightarrow (u = w)$
Basiswechsel	$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

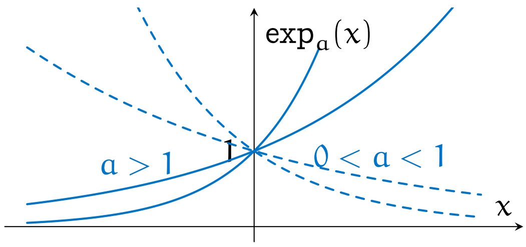
Anmerkung 1.3. Der Basiswechsel zeigt, dass sich die Logarithmen des gleichen Wertes x nur durch einen konstante Koeffizienten unterscheiden $\log_a(x) = c \cdot \log_b(x)$. Z.B. ist $\log_{10}(a) = \lg(a) = 0.43429 \ln(a)$.

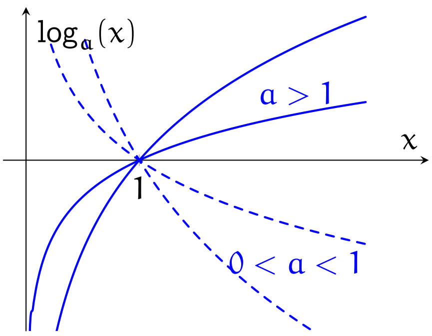


Es ist nützlich, sich den Verlauf der beiden Funktionen vor Augen zu führen. Das sie jeweils die Inverse der anderen sind, sieht man gut an der Spiegelungsachse $x = y$. Die Exponentialfunktion hat einen positiven Wertebereich, so dass der Definitionsberich der Logarithmusfunktion eben auch nur positive Werte zulässt.
Man erkennt auch die Bedingungen, wonach $\exp_a(0) = 1$ und sein Spiegelbild $\log_a(1) = 0$ erscheint.

Das Lösen von Gleichungen mit Exponenten unterscheidet sich nicht grundsätzlich von anderen algebraischen Gleichungen. Es gibt keine Methode für alle Fälle und nicht jede Gleichung ist lösbar oder hat eine Lösung.

Die Basis a bestimmt, ob die Funktion monoton steigend oder monoton fallend ist. In der Definition haben wir $a \neq 1$ gefordert. Für $a > 1$ und speziell $a = e = 2.71828\ldots$ ist die Funktion steigend. Für $0 < a < 1$ ist sie fallend.





Die Logarithmusfunktion ist monoton steigend mit dem Parameter $a > 1$ und fallend mit $0 <$. Die ganze Kurvenschar geht durch den Punkt $(0, 1)$. Die zwei speziellen Funktionen $\lg(x) = \log_{10}(x)$ und $\ln(x)) < \log_e(x)$ sind monoton steigend. Diese Eigenschaft ist für die Ungleichungen wichtig.

1.1.2 Wachstums- und Zerfallsprozesse

Die Exponentialfunktion ist das elementare Modell von Wachstum, Wachstum von Bevölkerungen, Bakterienkulturen, Kapital, Ansteckungen etc.

Unbegrenztes Wachstum

Ein Kapital von K_0 wird mit $z = 4\% = 0.04$ per annum verzinst. Das heisst, nach einem Jahr ist das Kapital auf $K_0(1 + 0.04)$ angewachsen. Nach zwei Jahre wird daraus $K_0(1+0.04)^3$ und nach t Jahren $K_0(1+0.04)^t$. Es ist also

$$K(t) = K_0(1+z)^t$$

Es gibt Wertpapiere, die einen Zinssatz von 4% versprechen, der Zins wird aber halbjährlich gutgeschrieben. Nach einem halben Jahr ist das Kapital $K_{h=2}(1/2) = K_0(1+0.02)$ und nach einem Jahr $K_{h=1/2}(1) = K_0(1+0.02)^2$. Ein weiteres Papier verspricht auf 4%, zahlt allerdings quartalsweise. Nach einem Jahr ist das Kapital dann $K_{h=4}(1) = K_0(1+0.01)^4$. Verallgemeinert folgt eine Zinssatz p.a. ist nicht absolut, sondern hängt von der Zahlungsfrequenz ab. Die Formel lautet also mit der Frequenz als Parameter

$$K_h(t) = K_0\left(1+\frac{z}{h}\right)^{t\cdot h}$$

Jetzt kann man sich die Frequenz immer höher vorstellen, gar $h \to \infty$. Das ist dann die augenblickliche Verzinsung. Hier kommt uns der berühmte Grenzwertsatz von Euler entgegen, der da lautet:

Satz 1.1. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = \exp(x)$$

Damit wird die Verzinsung zum kontinuierlichen Zins mit

$$K_c(t) = K_0 e^{zt} = K_0 \exp(zt).$$

Die Bevölkerung kann auch kontinuierlich als $P(t) = P_0 e^{bt}$ dargestellt werden, neben $P(t) = (1+b)^t$.

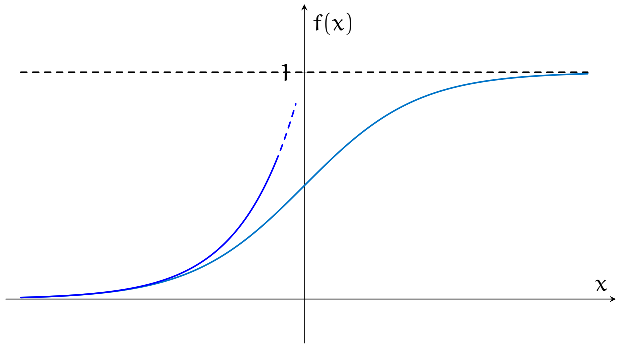
Begrenztes Wachstum**

In der realen Welt gibt es aber kein grenzenloses Wachstum, denn dafür sind Ressourcen notwendig, die knapp sind. Bakterien in einer Schale können nur nach Massgabe der vorhandenen Nährlösung wachsen. Die Bevölkerung entzieht sich die Grundlage durch Wachstum, so dass sie danach trachtet, die Reporduktion zu drosseln. Je mehr sich anstecken, desto weniger sind übrig, die sich noch anstecken können. Um dieses typische begrenzte Wachstum zu modellieren, hat sich die logistische Funktion herausgebildet.

1.2 Formel Logistische Funktion

$$b(t) = \frac{b_0}{b_0 + (1-b_0)e^{-kt}}$$

Die logistische Funktion in der Abbildung zeigt den typischen S-Verlauf. Am linken Ende ist das Wachstum noch näherungsweise exponentiell. Dann beginnt die Ressourcenknappheit das Wachstum zu dämpfen bis zur Sättigung.



Zerfallsprozesse

Zerfallsprozesse sind typischerweise der radioaktive Zerfall von Isotopen, die Abkühlung einer Substanz nach Newton und der Wertzerfall eines Konsumgutes, z.B. eines Autos.
Angenommen der Wert eines Autos sinkt um 20% pro Jahr. Dann ist sein Wert in der Zeit $A(t) = A_0(1-k)^t$ oder kontinuierlich

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-kt}.$$

Die Newtonsche Formel der Abkühlung einer Substanz ist von gleichen Typ. Die Temperatur $T(t)$ geht asymptotisch mit der Zeit auf die Umgebungstemperatur T_U zurück. Die Konstante k ist eine Stoffgrösse.

$$T(t) = (T_0 - T_U)e^{-k \cdot t} + T_U$$

Substituiert man die Temperatur mit der Differenz $\vartheta = T - T_U$, dann folgt

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

1.3 Übung Fritz macht sich hinter eine volle Literflasche Gin seines Vaters. Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil h des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schliesslich die Ginkonzentration in der Flasche auf $c(t) \leqslant 1/2$ gesunken ist. Wieviel Liter Gin und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im ganzen getrunken? Berechne die Grenzwerte für $h \to 0$. $\triangleleft$

1.1.3 Beispiele Exponentialgleichungen

1.1 Übung Das grundlegende Problem hat die Form $5^x = 9$. Die Lösung ist das beidseitige logarithmieren, was aufgrund der eigenschaften der Log- und Exp-Funktion zulässig ist. Es wird dann mit der Potenzregel

$$5^x = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(5^x) = x\ln(5) = \ln(9) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\ln(9)}{\ln(5)}.$$

$\triangleleft$

1.2 Übung Wir betrachten die Gleichung $2^{3x} = 16^{1-x}$. Wir versuchen als erstes, beide Exponentialterm auf dieselbe Basis zu bringe. Das gelingt, weil $16 = 2^4$ ist. Also können wir schreiben

$$2^{3x} = 16^{1-x} = (2^4)^{1-x} = 2^{4(1-x)}$$

Wir haben also die Potenzregel verwendet. Nun folgt wegen der injektiven Eigenschaft, dass die Exponenten gleich sein müssen, um die Gleichung zu befriedigen. Also muss sein

$$3x = 4(1-x) \quad \text{und somit} \quad x = 4/7 = 0.571.$$

$\triangleleft$

1.3 Übung Wir wandeln das obige Beispiel ein wenig ab. Es soll die Gleichung gelten $2^{3x} = 15^{1-x}$. Damit funktioniert das auf die gleiche Basis stellen nicht. Wir logarithmieren beide Seiten, also

$$\log(2^{3x}) = \log(15^{1-x})$$

Mit der Potenzregel folgt

$$3x\log(2) = (1-x)\log(15)$$

und

$$3x = (1-x)\frac{\log(15)}{\log(2)} = (1-x)\cdot 3.91$$

Daraus folgt die Lösung

$$x = \frac{3.91}{6.91} = 0.566$$

Man beachte, dass wir nicht explizit gesagt haben, welchen Logarithmus wir nehmen. Bei einem Quotienten von Logarithmen spielt das keine Rolle, denn Logarithmen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich nur durch eine Konstante, die gekürzt werden kann. Es ist also

$$\frac{\ln(15)}{\ln(2)} = \frac{\lg(15)}{\lg(2)} = \frac{\log_a(15)}{\log_a(2)}.$$

$\triangleleft$

1.4 Übung Häufig muss man die Term zuerst umarbeiten, um die Terme mit den Exponenten zu isolieren. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5$$

Wir sehen, dass der Term e^x und $e^{-x} = 1/e^x$ auftaucht. Wir können vorübergehend substituieren $q = e^x$. Damit sieht die Gleichung folgendermassen aus

$$\frac{1}{2}(q - \frac{1}{q}) = 5$$

und weiter

$$q^2 - 1 = 10q \quad \text{oder} \quad q^2 - 10q - 1 = 0$$

Nun haben wir eine quadratische Gleichung, deren Lösungen entweder mit der Mitternachtsformel, der pq-Formel oder mit quadratischem Ergänzen gefunden werden. Mit Ergänzung folgt

$$(q-5)^2 - 25 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad q = 5 \pm \sqrt{26} = 5 \pm 5.1$$

und $q_{1,2} = \{-0.1, 10.1\}$. Zurücksubstituiert ist $e^x = 10.1$ Die negative Lösung -0.1 fällt weg, weil die Exponentialfunktion nie negativ ist. Somit folgt für x

$$x = \ln(10.1) = 2.31$$

Zur Kontrolle können wir noch testen, dass

$$10.1 - \frac{1}{10.1} = 10.$$

◁

1.5 Übung Wir betrachten die Gleichung $2 = 3^{-0.1t}$. Es gibt nur einen Term mit einem Exponenten und dieser ist schon isoliert. Wir können also auf beiden Seiten den Logarithmus und das Potenzgesetz anwenden

$$2 = 3^{-0.1t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \log(2) = (-0.1t)\log(3)$$

Mit 10 multiplizieren führt auf

$$10\log(2) = -t\log(3) \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -10\frac{\log(2)}{\log(3)} = -10\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = -6.31$$

◁

1.6 Übung Wir suchen z für die Gleichung $125 = \frac{81}{1+5e^{-2z}}$. Erster Schritt, die Unbekannte isolieren. Wir können z.B. das Reziproke hinschreiben und dann weiter umformen

$$\frac{1}{125} = \frac{1+5e^{-2z}}{81} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{81}{125} - 1 = 5e^{-2z}$$

weiter wird

$$\frac{-44}{125} = 5e^{-2z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{-44}{625} = e^{-2z}$$

Nun wissen wir aber, dass eine Potenz immer grösser als 0 sein muss, oder anders, wir keinen Logarithmus einer negative Zahl bestimmen können. Deshalb ist der Schluss, dass diese Gleichung keine Lösunge hat, also $z = \varnothing$, zumindest für $z \in \mathbb{R}$. ◁

1.7 Übung Wir such x aus der Gleichung

$$\frac{5e^x}{e^x + 1} = a$$

Um Fehler zu vermeiden, sollte man Terme substituieren, die möglichst einfach sind, etwa $e^x = q$

$$\begin{aligned}
\frac{5e^x}{e^x+1} &= a \\
5q &= a(q+1) = aq + a \\
5q - aq &= a \\
q &= \frac{a}{5-a} = e^x \\
x &= \ln\left(\frac{a}{5-a}\right)
\end{aligned}$$

◁

Aus den Übungen ziehen wir folgenden Schluss, den wir als Rezept anpreisen.

1.8 Rezept Lösen von Exponentialgleichungen

(1) Isoliere die Exponentialterme

(2) dann

- Falls möglich, bilde auf beiden Seiten Terme zur gleichen Basis und setzte dann die Exponenten gleich.
- Sonst nimm den (natürlichen) Logarithmus auf beiden Seiten und verwende die Potenzregel.

1.9 Übung Wir suchen x aus der Gleichung $2^x + 3^x = 7^x$. Wir versuchen unser Rezept anzuwenden. Keine der drei oder zwei Möglichkeiten ist durchführbar. Somit bleibt nur eine numerisches Verfahren. Was man allerdings sieht, ist, dass $x = 0$ auf $1 + 1 > 1$ und $x = 1$ $2 + 3 < 7$. Wir belassen es hier und stellen fest, man kann (analytisch) nicht alle Gleichungen lösen. ◁

Praktische Probleme

1.10 Übung Nepomuk hat Fr. 2000.– auf einem Konto angelegt. Die Bank zahlt 1.5% Zinsen pro Jahr. Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion für den Kontostand in Abhängigkeit von der Zeit?
Es ist $A_0 = 2000$. Nach einem Jahr ist der Stand $A_0(1 + 0.015)$, in zwei $A_0(1 + 0.015)(1 + 0.015)$ und in t Jahren $A_0(1 + 0.015)^t$. Die Funktion ist mit diesen Bezeichnungen $f(t) = 2000 \cdot (1.015)^t$.
Der Kontostand in 4 Jahren ist also $f(4) = 2000 \cdot (1.015)^4 = 2000 \cdot 1.06 = 2122.70$.
Wann erreicht er einen Stand von Fr. 2250? Es ist $2250 = 2000 \cdot 1.015^x$ und somit $x \ln(1.015) = \ln\left(\frac{2250}{2000}\right)$. Damit wird x zu $x = \ln\left(\frac{2250}{2000}\right)/\ln(1.015) = 7.91 \approx 8$. Es braucht knapp 8 Jahre. ◁

1.11 Übung Eine Lotusblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von 0.01 m2. Die bedeckte Teichfläche verdreifacht sich alle zwei Monate. Nach welcher Zeit beträgt die bedeckte Fläche $10\mathrm{m}^2$?
Eine Gleichung für dieses Modell kann man schreiben als $F(t) = 0.01 \cdot 3^t$, wobei t die Einheit 2 Monate besitzt. Die Gleichung ergibt für eine Fläche $F(t) = 10 = 0.01 \cdot 3^t$. Die Lösung ergibt sich aus $\ln(10/0.01) = t \cdot \ln(3)$ und $t = \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} = 6.29$. In Jahren $6.29/6 = 1.05$. Es braucht ein gutes Jahr. ◁

1.12 Übung Bei einer bestimmten radioaktiven Substanz verringert sich die Zahl der Kerne pro Tag um 9.71% durch radioaktiven Zerfall. Heute besitzt ein Forschungszentrum 2.6 g dieser Substanz.
Wie viel besass es vor 30 Tagen? Die Gleichung ist $A(t) = A_0(1 - 0.0971)^t$. Gesucht ist $A(-30) = 2.6(1 - 0.0971)^{-30}$. Mit Zahlen $A(-30) = 2.6 \cdot 0.903^{-30} = 55.69$.
Die sogenannte Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist eine Stoffgrösse, welche die Zeit angibt, in der sich die Anzahl Kerne halbiert. Formell $1/2 = q^{T_{1/2}}$. Wir bestimmen sie als $\ln(0.5) = T_{1/2} \ln(0.903)$ und $T_{1/2} = \frac{0.5}{0.903} = 6.79$ Tage.
Um wie viele Prozent verringert sich die Zahl der Kerne pro Stunde? Wir suchen das Verhältnis $A(1/24)/A(0) = 0.903^{1/24} = 0.9958$. Die Abnahme ist $(A(0) - A(1/24))/A(0)$ oder $1 - A(1/24)/A(0) = 1 - 0.9958 = 0.0042 = 0.42\%$. ◁

1.1.4 Ungleichungen**

Bei Ungleichungen stellt sich stets die Frage, ob eine Umformung die Ordnungsrelation, d.h. Grösser- oder Grösser-gleich-Zeichen ändert. Dies ist stets der Fall, wenn mit einer negativen Zahl multipliziert oder das Reziproke angesetzt wird. Aber auch, wenn auf beiden Seiten eine Funktion verwendet wird, die monoton fällt, wird es schwierig. Häufig wird mit Variablen hantiert, deren Wert man noch nicht kennt. Dann ist eine Fallunterscheidung angesagt.
Im Folgenden werden wo nötig die Exponential- und die Logarithmusfunktion verwendet. Hier ist es günstig, die Basis e zu nehmen, also $\exp(x) = e^x$, respektive $\log_e(x) = \ln(x)$. Denn diese sind streng monoton steigend, sodass aus $x_1 > x_2$ immer $\exp(x_1) > \exp x_2$ folgt. Genau so auch für $(x_1 > x_2) \Rightarrow (\ln(x_1) > \ln(x_2))$.

1.1 Übung Wir betrachten die Ungleichung $2^{x^2-3x} - 16 \geqslant 0$. Diese kann man umschreiben als $2^{x^2-3x} \geqslant 16 = 2^4$. Sodann kann man die Exponenten vergleichen

$$x^2 - 3x \geqslant 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x - 1.5)^2 - 2.25 \geqslant 4$$

$$\pm(x - 1.5) \geqslant \pm\sqrt{6.25}$$

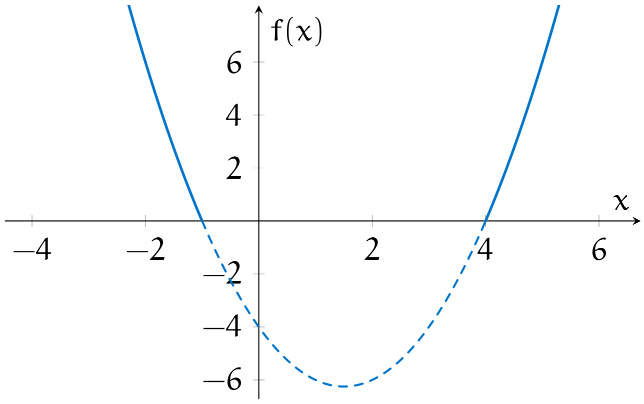
Dahinter verstecken sich vier Ungleichungen, nämlich

$$\left|\begin{array}{r} +(x - 1.5) \geqslant +2.5 \\ +(x - 1.5) \geqslant -2.5 \\ -(x - 1.5) \geqslant -2.5 \\ -(x - 1.5) \geqslant +2.5 \end{array}\right| \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\begin{array}{c} x \geqslant 4 \\ x \geqslant -1 \\ x \leqslant 4 \\ x \leqslant -1 \end{array}\right|$$

Die dominanten Werte sind

$$\begin{vmatrix} x \geqslant 4 \\ x \leqslant -1 \end{vmatrix}$$

Nun testen wir die zwei Lösungen $\{4, -1\}$ und finden sie passend. Dazu machen wir noch eine Graphik mit folgendem Aussehen:

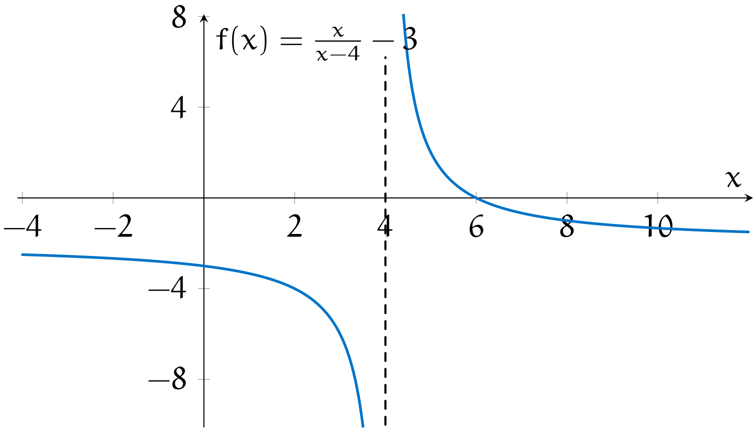


◁

1.2 Übung Wir lösen folgende Problem $\dfrac{e^x}{e^x - 4} \leqslant 3$. Gerne würden wir beide Seiten mit dem Nenner $e^x - 4$ multiplizieren. Wir wissen allerdings nicht, ob dieser grösser oder kleiner als 0 ist. Wir machen deshalb eine Fallunterscheidung. Weiters bemerken wir, dass der Nenner nicht Null sein darf.
Fall 1: Es ist $e^x - 4 > 0$ und deshalb folgt

$$e^x \leqslant 3(e^x - 4) \qquad \text{und somit} \qquad e^x \geqslant 6$$

schliesslich $x \geqslant \ln(6)$.
Fall 2: Es ist $e^x - 4 < 0$ oder $e^x < 4$ und somit $e^x \geqslant 3(e^x - 4)$. Damit folgt $e^x \leqslant 6$. Voraussetzung und Resultat stimmen für $e^x < 4$ überein. Damit $x < \ln(4)$. Es gibt also zwei Lösungen. Das Schaubild für $f(x) = \frac{x}{x-4} - 3$ zeigt die Übereinstimmung.

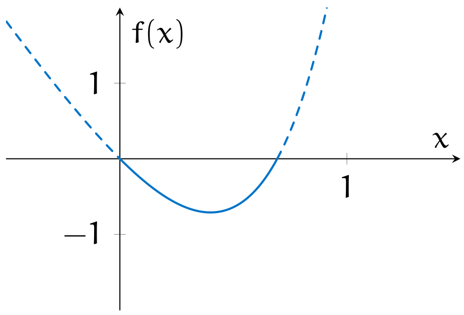


◁

1.3 Übung Man finde den Bereich von x, für den die Ungleichung $xe^{2x} < 4x$ gilt. Wir schreiben um und finden

$$x(e^{2x} - 4) < 0$$

Wann ist das Produkt zweier Zahlen negativ? Wenn ein Term negativ und der andere positiv ist. Damit ergeben sich zwei Fälle.
Fall 1: $x > 0$ und $e^{2x} < 4$. Dies führt über $e^x < 2$ zu $x < \ln(2)$.
Fall 2: $x < 0$ und $e^x > 2$ oder $x > \ln(2)$. Die zwei Aussagen widersprechen sich, sind also nicht gültig. Somit ist die Lösung das Intervall $(0, \ln(2))$. Graphisch ($\ln(2) \approx 0.69314$)



$\triangleleft$

Wir ziehen aus diesen Beispielen den Schluss, dass die Bestimmung von Ungleichungen einges kniffliger ist als das Lösen von Gleichungen.

1.2 Logarithmusgleichungen und Ungleichungen

1.2.1 Logarithmusgleichungen

Die Lösungsmethoden sind ganz analog zu den Exponentialgleichungen. Eigentlich ist nur die $\exp_a(x)$ Funktion mit der $\log_a(x)$-Funktion zu vertauschen. Wir kommen deshalb am Anfang des Abschnitts auf das Rezept und lassen den Übungen folgen.

1.1 Rezept Lösen von Logarithmusgleichugen

(1) Den Term mit der Log-Funktion isolieren,

(2) dann

- Falls möglich, beide Seiten der Gleichung als Logarithmen zur selben Basis ausdrücken und die Argumente gleichsetzen,
- andernfalls, die Logarithmusfunktion als Exponentialgleichung umschreiben.

1.2 Übung Die einfachste Gleichung ist vom Typ $\log_3(x) = 5$. Die Lösung setzt beim Anwenden der Exp-Funktion auf beiden Seiten der Gleichung, also

$$\log_3(x) = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exp_3[\log_3(x)] = x = \exp_3(5) = 3^5$$

◁

1.3 Übung Wir betrachten die Gleichung $\log_{17}(1-3x) = \log_{17}\left(x^2-3\right)$. Die Basis ist bei beiden Termen 17. Deshalb kann man die Argumente, die Ausdrücke in den Klammern, gleichsetzen. Es folgt

$$1-3x = x^2-3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+3x-4=0$$

Mit quadratischem Ergänzen

$$(x+1.5)^2-2.25-4=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1.5=\pm\sqrt{6.25}=\pm 2.5$$

und somit $x=-1.5\pm 2.5=\{1,-4\}$. ◁

1.4 Übung Wir suchen x aus $2-\ln(x-3)=1$. Zuerst vereinfachen wir zu $\ln(x-3)=1$. Dann nehmen wir die Exponentialgleichung und wenden sie auf beiden Seiten der Gleichung an:

$$\exp(\ln(x-3)) = x-3 = \exp(1) = e$$

Somit ist $x=e+3$. ◁

1.5 Übung Wir lösen $\log_6(x+4)+\log_6(3-x)=1$ nach x auf. Wir wenden die Produktregel an, d.h. die Summe der Logarithmen ist der Logarithmus des Produkts, also

$$\log_6(x+4)+\log_6(3-x)=\log_6\left((x+4)(3-x)\right)=1$$

Wir nehmen die Exp-Funktion beidseits

$$\exp_6[\log_6\left((x+4)(3-x)\right)] = (x+4)(3-x) = \exp_6(1) = 6$$

Und nun sind wir wieder bei einer quadratischen Gleichung. Wir schreiben sie

$$(x+4)(x-3) = -6 = x^2+x-12 = (x-0.5)^2-0.25-12$$

und daruaus

$$(x-0.5)^2=6.25 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=0.5\pm 2.5=\{3,-2\}.$$

◁

1.6 Übung Folgendes steht an. $\log_2(x+3)=\log_2(6-x)+3$. Wir sortieren um und erhalten

$$\log_2(x+3)-\log_2(6-x)=3$$

Mit der Quotientenregel und der Exp-Funktion

$$\begin{aligned} \log_2\left(\frac{x+3}{6-x}\right) &= 3 \\ \exp_2[\log_2\left(\frac{x+3}{6-x}\right)] &= \frac{x+3}{6-x} = \exp_2(3) = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Und weiter

$$\frac{x+3}{6-x}=8 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+3=48-8x$$

und schliesslich $9x=45$ und damit $x=5$. ◁

1.7 Übung Übung macht den Meister. Es ist gegeben $1+2\log_4(x+1) = 2\log_2(x)$. Man sieht sofort die unterschiedlichen Basen der Logarithmen. Logarithmen unterschiedlicher Basen unterscheiden sich durch eine konstanten Faktor, also $\log_2(x) = \log_4(x)\cdot c$. Dieser ist hier $c = 1/\log_4(2) = 2$. Damit wird die Gleichung mit gleichen Basen

$$1 + 2\log_4(x+1) = 4\log_4(x)$$

Nun wenden wir die Potenzregel an und erhalten

$$1 + \log_4(x+1)^2 = \log_4(x^4)$$

Nun folgt die Quotientenregel und dann die Potenzregel

$$\log_4(x+1)^2 - \log_4(x^4) = \log_4\left(\frac{(x+1)^2}{x^4}\right) = 2\log_4\left(\frac{(x+1)}{x^2}\right) = -1$$

Wir dividieren beide Seiten durch 2 und nemen dann die Exp-Funktion

$$\exp_4[\log_4\left(\frac{(x+1)}{x^2}\right)] = \frac{(x+1)}{x^2} = \exp_4(-1/2) = 4^{-1/2} = 1/\sqrt{4} = 1/2$$

Es ist also

$$\frac{(x+1)}{x^2} = 1/2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 2x - 2 = 0$$

Schon wieder eine quadratisch Gleichung mit der Lösung

$$(x-1)^2 - 1 - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 1 = \pm\sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 \pm \sqrt{3}$$

Die Lösung $1 - \sqrt{3}$ ist negativ und deshalb nicht zulässig, denn in der Ausgangsgleichung wird $\log_4(x)$ verlangt. Irgendwo ist eine Gewinnumformung passiert. $\triangleleft$

Wichtig 1. Bei Logarithmusgleichungen können aufgrund der Potenzregel Gewinnumformungen geschehen. Deshalb muss man die Resultate an der Ausgangsgleichung testen. $\dashv$

1.2.2 Ungleichungen mit Logarithmen**

Wir wir bereits wissen, sind Ungleichungen schwieriger als Gleichungen. Wir zeigen ein paar Beispiele.

1.1 Übung Es ist die folgende Ungleichung gegeben: $\dfrac{1}{\ln(x)+1} \leqslant 1$. Der Nennen darf nicht Null sein. Damit ist $\ln(x) = 1$ nicht erlaubt und damit muss $x \neq 1$ sein. Das werden wir berücksichtigen. Wenn wir jeweils die reziproken Brüche nehmen, dann ändert sich das Vorzeichen, also

$$\frac{1}{\ln(x)+1} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x) + 1 \geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x) \geqslant 0$$

Nun würde daraus $x \geqslant 1$ folgen. Weil aber $x = 0$ nicht zulässig ist, wird $x > 1$ daraus. $\triangleleft$

1.2 Übung Wir untersuchen die Ungleichung

$$(\log_2(x))^2 < 2\log_2(x) + 3$$

Nach Rezept werden die Log-Terme auf einer Seite gesammelt

$$(\log_2(x))^2 - 2\log_2(x) < 3$$

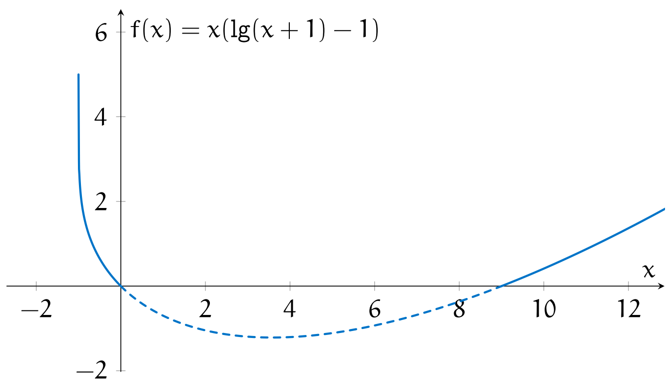
Wir setzen $q = \log_2(x)$ und sehen den quadratischen Ausdruck $q^2 - 2q < 3$. Mit quadratischem Ergänzen folgt $(q-1)^2 - 1 < 3$ oder $q - 1 < \pm\sqrt{4} = \pm 2$, daraus $q < 1 \pm 2 = \{3, -1\}$.
Die erste Lösung $x_1 = -1$ ergibt $\log_2(x_1) = -1$ und daraus $\exp_2(\log(x_1)) = x = \exp_2(-1) = 1/2$. Damit Es bleibt noch $q < 3$ und daraus $\log_2(x_2) < 3$ und weiter $\exp_2(\log_2(x_2)) = x < \exp_2(3) = 2^3 = 8$. Zusammen haben wir $x_1 < 1/2$ und $x_2 < 8$. Die Bedingung zur Lösung x_1 dominiert die andere, also ist $x < 1/2$.

◁

1.3 Übung Wir versuchen uns an der Ungleichung $x\lg(x+1) \geqslant x$. Als erstes stellen wir fest, dass $x + 1 > 0$ aus dem Definitionsbereich des Logarithmus sein muss. Wir stellen um und schreiben

$$x(\lg(x+1) - 1) \geqslant 0$$

Strukturell sieht die Ungleichung wie ein Produkt $p \cdot q \geqslant 0$ aus. Ein Produkt ist positiv, wenn entweder beide Multiplikanden positiv sind oder beide negativ. Wir machen die Fallunterscheidung.
Fall 1: $x \geqslant 0$ und $\lg(x+1) - 1 \geqslant 0$, daraus $\exp_{10}(\lg(x+1)) = x + 1 \geqslant \exp_{10}(1) = 10$ und somit $x \geqslant 9$.
Fall 2: $x \leqslant 0$ und $\lg(x+1) - 1 \leqslant 0$ und analog oben $x \leqslant 9$. Nun fassen wir die dominanten Ungleichungen zusammen. Zum einen ist $x \geqslant 9$ bestimmend. Zum anderen muss $x \leqslant 0$ sein und aus dem Definitionsbereich muss $x > -1$ sein. Die Wertemenge für x ist also $x \in (-1, 0] \cup [9, \infty)$. ◁



Aufgaben

2.4 Löse folgende Gleichungen

(a) $\log_2\left(x^3\right) = \log_2(x)$
(b) $\log_5\left(18 - x^2\right) = \log_5(6 - x)$
(c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) = -3$
(d) $\lg(x^2 - 3x) = 1$
(e) $\lg\left(\frac{x}{10^{-3}}\right) = 4.7$
(f) $10\log\left(\frac{x}{10^{-12}}\right) = 150$
(g) $3\ln(x) - 2 = 1 - \ln(x)$
(h) $\log_5(2x + 1) + \log_5(x + 2) = 1$
(i) $\ln(x + 1) - \ln(x) = 3$
(j) $2\log_7(x) = \log_7(2) + \log_7(x + 12)$
(k) $\log_3(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x) + 8$
(l) $(\lg(x))^2 = 2\lg(x) + 15$
(m) $\ln(x^2) = (\ln(x))^2$

4 **(a)** Es folgt $x^3 = x$ und $x^2 = 1$ sowie $x = 1$. $x = -1$ ist nicht im Definitionsbereich.
(b) Gleiche Basis, somit $18-x^2 = 6-x$, $x^2-x = 12$, quadratische Ergänzung: $(x-1/2)^2 - 1/4 = 12$, $x - 1/2 = \pm\sqrt{12.25} = \pm 3.5$, $x = 0.5 \pm 3.5 = \{4, -3\}$.
(c) $\exp_{1/2}(\log_{1/2}(2x - 1)) = \exp_{1/2}(-3) = 0.5^-3 = 2^3 = 8$ damit $2x - 1 = 8$, $2x = 9$, $x = 9/2$.
(d) $x^2 - 3x = 10$, $(x - 1.5)^2 - 2.25 = 10$, $x - 1.5 = \pm\sqrt{12.25}$, $x = 1.5 \pm 3.5 = \{5, -2\}$.
(e) $\frac{x}{10^{-3}} = 10^{4.7}$, $x = 10^{4.7-3} = 10^{1.7}$.
(f) $\lg(\frac{x}{10^{-12}}) = 15$, $x = 10^{15-12} = 1000$
(g) Substitution $3q - 2 = 1 - q$, $4q = 3$, $q = 3/4 = \ln(x)$, $x = \exp(3/4) = e^{3/4}$.
(h) Produktregel $\log_5\left((2x+1)(x+2)\right) = 1$, $(2x+1)(x+2) = 5^1 = 5$, $2x^2+4x+x+2 = 5$. $2x^2 + 5x = 3$, $x^2 + 5/2x = 3/2$ quadratisches Ergänzen $(x + 5/4)^2 - 25/16 = 3/2$, $(x + 5/4)^2 = 49/16$, $x = -5/4 \pm 7/4 = \{-3, 0.5\}$. $x - 3$ nicht in Definitionsbereich, also $x = 0.5$.
(i) Definitionsbereich $x > 0$, Quotientenregel $\ln(\frac{x+1}{x} = 3$, $\frac{x+1}{x} = \exp(3)$, $x + 1 = xe^3$, $x(1 - e^3) = -1$, $x = \frac{-1}{1-e^3} = \frac{1}{e^3-1}$.
(j) Gleiche Basis, Produktregel $2\log_7(x) = \log_7(2(x + 12))$, damit $x^2 = 2x + 24$, $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 = 24$, $(x - 1)^2 = 25$, $x - 1 = \pm 5$, $x = 1 \pm 5 = \{6, -4\}$, $x = -4$ nicht zulässig, also $x = 6$.
(k) Basiswechsel von 1/3 zu 3, also $\log_{1/3}(x) = \log_3(x)/\log_3(1/3)$, nun ist $\log_3(1/3) = -1$, denn $3^{-1} = 1/3$. Damit $\log_3(x) - (-1)\cdot\log_3(x) = 8$, $\log_3(x) = 8/2 = 4$ und $x = \exp_3(4) = 3^4 = 81$.
(l) Substitution $q = \lg(x)$, somit $q^2 = 2q + 15$, quadratisch ergänzen $(q - 1)^2 - 1 = 15$, $(q - 1)^2 = 16$, $q = 1 \pm 4$. Zurücksetzen $\lg(x) = 4$, $x = 10^4$.
(m) Substitution und Potenzregel $q = \ln(x)$ und $2\cdot q = q^2$, $2 = q = \ln(x)$, $x = e^2$. Es gibt aber noch die Lösung $x = 0$.

2.5 Löse die Ungleichungen

(a) $\frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0$
(b) $x\ln(x) - x > 0$
(c) $10\lg\left(\frac{x}{10^{-12}}\right) \geqslant 90$
(d) $5.6 \leqslant \lg\left(\frac{x}{10^{-3}}\right) \leqslant 7.1$
(e) $\ln(x^2) \leqslant (\ln(x))^2$

5 **(a)** Wegen $\ln(x)$ muss $x > 0$ sein. Zudem ist x^2 grösser als null. Somit reduziert sich die Ungleichung zu $1 - \ln(x) < 0$. Anders $1 < \ln(x)$ und $e < x$. Als Intervall geschrieben $x \in (e, \infty)$.

(b) Es muss $x > 0$ sein. Somit kann man durch x teilen, ohne Relationsänderung. Somit $\ln(x) > 1$ und $x > e$.

(c) Division durch 10: $\lg(\frac{x}{10^{-12}}) \geqslant 9$, Exp-Funktion: $\frac{x}{10^{-12}} \geqslant 10^9$ und $x \geqslant 10^{-3}$.

(d) Exp-Funktion anwenden: $10^{5.6} \leqslant \frac{x}{10^3} \leqslant 10^{7.1}$, mit 10^{-3} multiplizieren, resp. Exponenten addieren $10^{2.6} \leqslant x \leqslant 10^{4.1}$.

(e) Klar muss $x > 0$ sein. Da $\ln(x)$ für $x < 1$ kleiner als 1 ist, muss man eine Fallunterscheidung vornehmen. 1) Für $x < 1$ ist $2 \geqslant \ln(x)$, also $e^2 \geqslant x$. $x < 1$ geht vor. 2) $x > 1$ und somit $\ln(x) > 0$ führt zu $2 \leqslant \ln(x)$ und $e^2 \leqslant x$. Wir haben also zwei Bereiche: $(0, 1)$ und $[e^2, \infty)$.

2.6 Um wie viele Prozent müsste die Zahl der radioaktiven Kerne einer Substanz pro Jahr abnehmen, wenn ihre Zahl in 50 Jahren 1 Billion (10^{12}) Mal kleiner sein soll als heute?

6 Ein Zefallsprozess wird als $N(t) = N_0(1-p)^t$ modelliert. Hier ist $N(t) = 10^{-12}N_0$, $t = 50$ und p gesucht. N_0 kann man kürzen, $(10^{-12})^{1/50} = (1-p)$ und $p = 1 - (10^{-12})^{1/50}$ oder $p = 1 - 10^{-12/50} = 1 - 0.57544 = 0.42456$ oder 42.456%.

2.7 Herr Lanzo besass Ende 2014 auf seinem Sparkonto CHF 126'450.–. Er rechnet aus, dass Ende 2026 der Kontostand CHF 168'080.– sein wird, falls sich der Zinsfuss nicht ändert und er weder etwas abhebt noch etwas dazulegt. Wie gross ist demnach der Zinsfuss? [60‰]

7 Die Formel für den Kapitalzuwachs ist $K(t) = K_0(1+p)^t$. Es ist $t = 12 = 2016 - 2014$. Umgeformt $\frac{K(t)}{K_0} = (1+p)^t$, weiter $\left(\frac{K(t)}{K_0}\right)^{1/t} = 1 + p$ und $p = \left(\frac{K(t)}{K_0}\right)^{1/t} - 1$. Mit Zahlen $p = \left(\frac{168080}{126450}\right)^{1/12} - 1 = 1.329^{1/12} - 1 = 0.024$ oder 2.4%.

2.8 Beim exponentiellen Wachstum einer Grösse nimmt diese jedes Jahr immer wieder um p % zu. Berechnen Sie, für ein allgemeines p exakt, sowie numerisch und sinnvoll gerundet für p % = 5 %, den Wert der Verdoppelungszeit T2 , also derjenigen Zeit, die vergehen muss, bis sich der Wert dieser Grösse jeweils wiederum verdoppelt hat. [40 ‰]

8 Allgemein wird jährliches Wachstum beschrieben mit $A(t) = A_0(1+p)^t$. Für die Verdoppelung ist $A(t) = 2A_0$, somit $2 = (1+p)^{T_2}$. Mit $\ln(2) = T_2 \cdot \ln(1+p)$ folgt $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1+p)}$. Numerisch (Taschenrechner) folgt $T_2 = \ln(2)/\ln(1.05) = 14.21$ [Jahre]. [Finde Kaufleute wissen, dass sich die Verdoppelung aus der Faustformel $70/p\%$ ergibt, also hier $70/5 = 14$. Denn 70% ist ungefähr $\log(2)$ und $\ln(1+p) \approx p$ für kleine p.]
