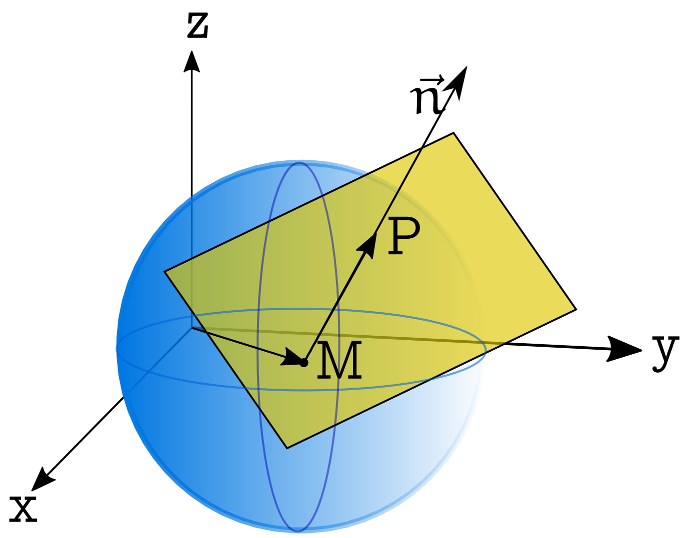
Franzettis Mathematik
Weg zur Maturprüfung

Kapitel 26
Vektoranalysis



Claudio Franzetti

16. Oktober 2021

Normalprogramm / Erweitertes Niveau

– Den Vektorbegriff, die Vektoraddition und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar mit den zugehörigen Eigenschaften, sowie die Begriffe der Linearkombination von Vektoren und der kollinearen und komplanaren Vektoren darstellen, definieren und anwenden.
– Vektorielle Basen der Ebene und des Raumes und der zugehörigen Koordinatensysteme in Beziehung setzen, insbesondere orthonormierte Basen und Koordinatensysteme
Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke, des Schwerpunktes eines Dreieckes und die Norm eines Vektors bestimmen.
–Das Skalarprodukt (algebraische und trigonometrische Darstellung) definieren und seine Eigenschaften anwenden den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen die Fläche einer einfachen Figur berechnen.
–das Vektorprodukt und das Spatprodukt definieren, ihre geometrischen Eigenschaften angeben und diese Begriffe anwenden
– Die Parametergleichungen und die Normalenform einer Geraden erstellen und damit den Richtungsvektor, den Normalenvektor und die Steigung herleiten.
– Die gegenseitige Lage zweier Geraden diskutieren und ihren eventuell existierenden Schnittpunkt berechnen.
– Den Zwischenwinkel zweier Geraden berechnen, den Abstand eines Punktes von einer Geraden, die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden bestimmen.
–Die kartesische Kreisgleichung und die Gleichungen ihrer Tangenten erstellen gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Kreisen bestimmen.
– Die Parametergleichungen der Gerade und der Ebene erstellen Punkte, Geraden und Ebenen graphisch darstellen bei Rechnungen und Zeichnungen gegenseitige Lage bestimmen
–die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel (Brennpunkte, Leitgeraden, Exzentrizität, Asymptoten) definieren und ihre Eigenschaften darstellen, daraus die Mittelpunktsgleichungen herleiten
– Parametergleichungen der Ellipse anwenden Tangentengleichung in einem Punkt eines Kegelschnitts bestimmen
–die Eigenschaften von Kegelschnitten für die Bestimmung von geometrischen Örtern anwenden
–Parametergleichungen und kartesische Gleichung (Normalform) der Ebene erstellen und daraus Richtungsvektoren und Normalenvektor ermitteln
–den Abstand zweier Punkte, den Abstand Punkt-Gerade, den Abstand Punkt-Ebene sowie den Abstand windschiefer Geraden berechnen
–den Winkel zwischen zwei Geraden, zwischen einer Geraden und einer Ebene, zwischen zwei Ebenen bestimmen
–gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen Volumen und Oberflächen einfacher Körper berechnen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 24

Vektoranalysis

24.1 Vektoren

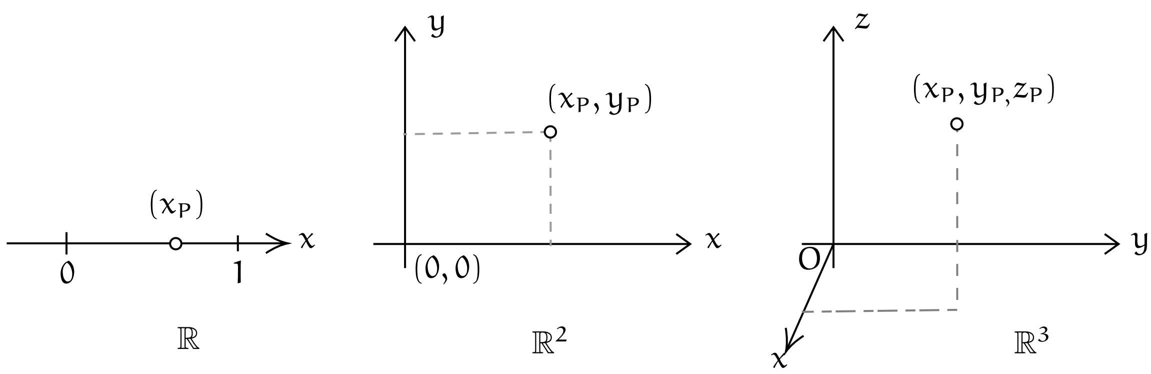
Mitte des 19. Jahrhunderts wurden Vektoren oder “Fahrstrahle” für Verfahren eingeführt, um mit Punkten, Geraden und Ebenen selbst zu rechnen. Die Erfindung der Vektoren vereinfacht sehr viele mathematischen Probleme und vermag bekanntes ganz neu uns anders darzustellen. Das Wort “Vektor” stammt aus dem Latein und bedeute Träger, Fahrender, Reisender. Ein Reisender fährt von Punkt A nach Punkt B.

Die einen nennen dieses Gebiet der Mathematik Vektorgeometrie, andere Vektoranalysis. Dies ist nur eine Frage der Betrachtung und der Motivation.

24.1.1 Punkte im Raum

Zuerst müssen wir ein Verständnis für den Raum erlangen. In der euklidischen Geometrie am Anfang dieses Werks haben wir den Raum mit Zirkel und Lineal konstruiert. Hier gehen wir analytischer vor.

Wir definieren den eindimensionale Raum als die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und denken uns den Zahlenstrahl, der von der Null aus sich in entgegengesetzte Richtungen ins Unendliche erstreckt. Mit einem Punkt mit Abstand 1 vom Nullpunkt haben wir einen Massstab festgelegt. Wir kennen also Richtung und Abstand von null. Eine Zahl $+0.71$ kann man als Punkt finden, indem man die Distanz 0.71 in positiver Richtung zurücklegt. Die zwei Aspekte Richtung und Betrag sind fundamental für das weitere.



Wir definieren für den euklidischen Raum den Vektor.

Definition 1. Ein *Vektor* im Raum $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist eine gerichtet Strecke, die durch Betrag (Länge) und Richtung festgelegt ist.

Wie im eindimensionalen Fall verbinde eine gerichtet Strecke zwei Punkte, den Anfangspunkt und den Aufpunkt. Im Normalfall liegt der Anfang beim Nullpunkt, oder Origo für Ursprung, und das Ende irgendwo im Raum.

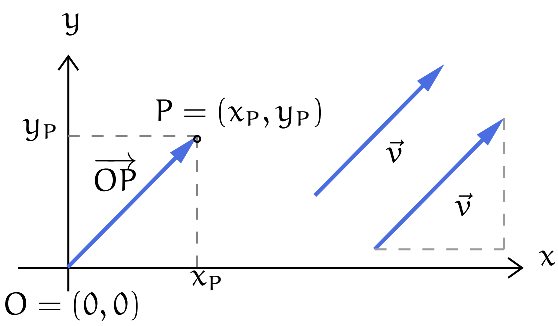
Definition 2. Der Vektor, der im Ursprung O anfängt und in P endet, heisst Ortsvektor. Man schreibt

$$\overrightarrow{OP}$$

Nicht alle Vektoren beginnen im Ursprung.

Satz 24.1. Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie gleiche Richtung und gleiche Länge besitzen.

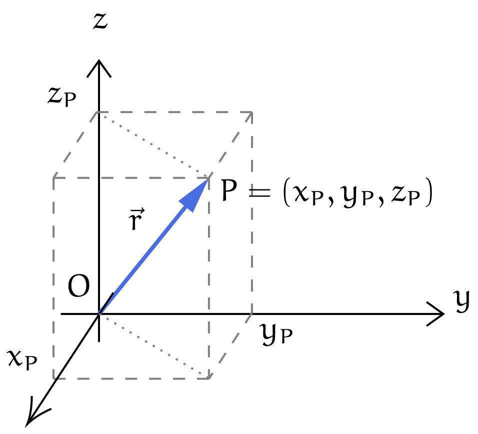
Dass die Vektoren, die gleich sind, nicht den gleichen Anfangspunkt zu haben brauchen, kommt aus der Definition. Man kann sich vorstellen, dass zwei gleiche Vektoren die gleiche Translation, also Verschiebung bedeuten.



In der Abbildung sieht man verschiedene Vektoren, die alle gleich sind. Es gilt

$$\overrightarrow{OP} = \vec{v}.$$

Definition 3. Ein Vektor, der nicht im Ursprung beginnt, nennt man freien Vektor oder Repräsentant.



Einen Ortsvektor stellen wir durch die Koordinaten des Aufpunkts P dar, und zwar entweder als (x_P, y_P, z_P) oder in geklammerter Staffel:

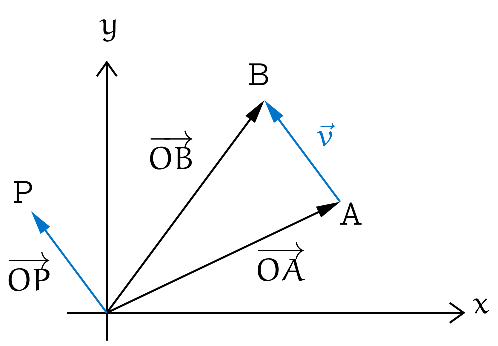
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}.$$

Definition 4. Die Koordinaten (x_P, y_P, z_P) des Aufpunkts P des Ortsvektors heissen Komponenten des Vektors.

Da der freie Vektor $\vec{v}$ gleich $\overrightarrow{OP}$ ist, haben sie die gleichen Komponenten. D.h. für den freien Vektor und den Ortsvektor sind die Differenzen der Koordinaten von Endpunkt B und Anfangspunkt A gleich. Der Anfangspunkt der Ortsvektors hat die Komponenten $(0, 0, 0)$. Also folgt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P - 0 \\ y_P - 0 \\ z_P - 0 \end{pmatrix}$$

Definition 5. Der Vektor $\vec{0}$ mit den Komponenten $(0, 0, 0)$ heisst *Nullvektor*.



24.2 Beispiel Im zweidimensionalen Raum, siehe Abbildung, habe der Punkt B die Koordinaten $(3, 5)$ und A $(4.5, 2)$. Damit ist die Komponentendarstellung von $\vec{v}$ gegeben als:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 - 4.5 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◁

Ein zahlenmässiger Vektor $\vec{v}$ ist zur Illustration ein Ding mit der Form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Komponenten sind alles Elemente der reellen Zahlen, $v_i \in \mathbb{R}$. Umgekehrt kann man auch sagen, der Raum $\mathbb{R}^3$ besteht aus allen Vektoren, geschrieben:

$$\mathbb{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}$$

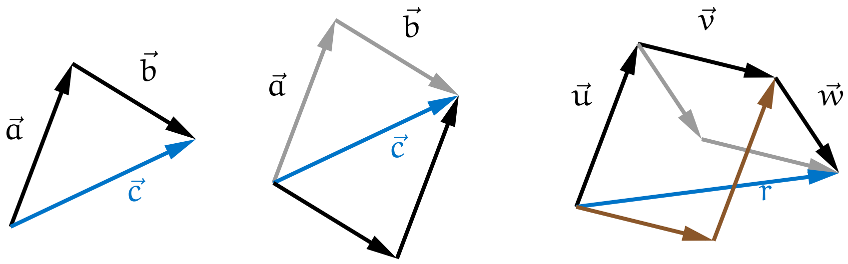
Das gilt auch für $\mathbb{R}^2$ entsprechend. Ein "Vektor" mit nur einer Dimension gilt als Skalar. Wir haben Gebrauch gemacht von der Definition der Addition von Vektoren.

Addition von Vektoren

Definition 6. Die Summe zweier Vektoren ist der Vektor mit den Summen der Komponenten als Komponenten, also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Die Addition von Vektoren ist *kommutativ* und *assoziativ*, d.h. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ und $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
Die geometrische Anschauung der Addition ist das Aneinanderreihen von Vektoren. Die Reihenfolge der Addition ist gleichgültig.



Multiplikation mit Skalar

Wir machen nun eine Festlegung für den Begriff Skalar.

Definition 7. Ein *Skalar* ist eine mathematische Grösse, die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert ist.

Mit der k-fachen Anwendung der Summe legt man die Multiplikation eines Vektors mit einem Zahlenwert, hier Skalar, fest.

Definition 8. Ein Vektor $\vec{v}$ wird mit einem Skalar k multipliziert, indem alle Komponenten mit k multipliziert werden,

$$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ k \cdot v_3 \end{pmatrix}.$$

Wie schon üblich, fragt man nach den Eigenschaften dieser Operation. Interessieren könnte das Verteilungsgesetz. Gilt $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$? Nachrechnen bestätigt die Gültigkeit sehr rasch.
Und was ist mit $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$? Auch dies ist beinahe trivial. Die erste Komponente ist links $(k_1 + k_2)a_1$ und rechts $k_1 a_1 + k_2 a_1$, also gleich.

24.3 Übung Wir wollen den *Mittelpunkt einer Strecke*, die von den Punkten P_1 und P_2 begrenzt wird, bestimmen. Wir können den Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ einfach halbieren, indem wir ihn mit dem Faktor $k = 1/2$ stauchen. Damit ergibt sich der Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ als $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$ oder kurz $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_1})$. Mit Koordinaten:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

◁

Subtraktion

Ein spezieller Vektor ist der sogenannte Kehrvektor oder Gegemvektor.

Definition 9. Der *Kehrvektor* $-\vec{a}$ ist der mit $k = -1$ multiplizierte Vektor $k \cdot \vec{a}$.

Satz 24.4. Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ ist die Addition des Minuenden $\vec{a}$ mit dem Kehrvektor des Subtrahenden $-\vec{b}$.

24.5 Beispiel Wir bestimmen die Differenz von $\vec{a} = (1, 2, 3)$ minus $\vec{b} = (3, 4, 5)$. Der Kehrvektor ist $-\vec{b} = (-3, -4, -5)$. Die Resultierende ist

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-4 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

◁

Linearkombination

Die Summe zweier oder mehrere Vektoren ist wiederum ein Vektor.

Definition 10. Eine Vektor $\vec{v}$ ist eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$$

gilt. k_1 und k_2 sind die Koeffizienten $\in \mathbb{R}$.

Kollineare und komplanare Vektoren

Wir vergleichen zwei oder drei Vektoren und stellen Eigenheiten fest.

Definition 11. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear*, wenn sie zu einer einzigen Geraden parallel sind – sie haben die gleiche Richtung ($k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ für $k \neq 0$).

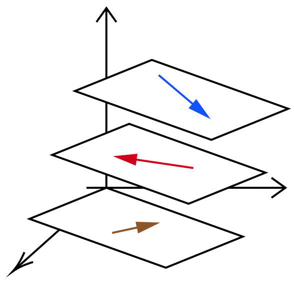
Satz 24.6. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nur dann nicht kollinear, wenn die Gleichung $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ nur für $k = 0$ gilt.

Wählt man zufällig zwei Vektoren, so sind sie meist nicht kollinear.

24.7 Beispiel Zwei Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (-1, 3, 2)$ sind nicht kollinear, denn man müsste eine Zahl k finden, so dass $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Die Verhältnisse der a_i zu b_i sind aber -1, 2/3 und 3/2. Es gibt kein k, ausser null, das die Gleichung erfüllt. $\triangleleft$

Definition 12. Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heissen *komplanar*, wenn sie zu einer einzigen Ebene parallel sind.

Die Abbildung zeigt drei Vektoren, die zwar in drei verschiedenen Ebenen liegen. Aber die Ebenen sind "parallel", haben dieselbe Ausrichtung. Das bedeutet, dass man mit diesen Vektoren nicht von einer zur anderen Ebene gelangen kann, denn es fehlt eine Komponente in die zur Ebene senkrechte Richtung.



Satz 24.8. Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear, dann lässt sich ein zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanarer Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen.

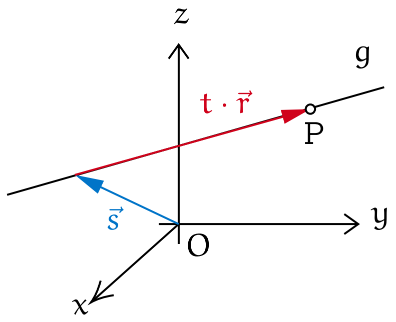
Satz 24.9. Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind dann und nur dann nicht komplanar, wenn die Gleichung $k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$ nur für $k_1 = k_2 = 0$ erfüllt ist.

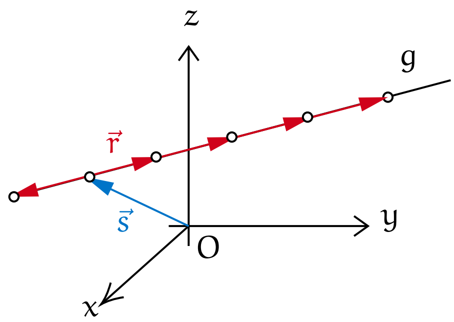
Also, wenn der dritte Vektor eine Linearkombination der zwei anderen ist, sind die Vektoren komplanar.

24.1.2 Linien im Raum

Wir haben bis hierhin Punkte betrachtet. Nun wollen wir Linie, v.a. Geraden anschauen. Aus der Abbildung kann man unschwer erahnen, dass eine Gerade g aus der Menge der Punkte im Raum besteht, die durch einen Stützvektor $\vec{s}$ und einen Richtungsvektor $\vec{r}$ erreichbar sind. Führt man einen Parameter t ein, also ein Variable, die man für einen gerade betrachteten Fall konstant setzt, für den nächsten Fall aber variiert werden kann, so kann man die Gerade festlegen als

$$g : \{\vec{s} + t\vec{r} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$





Satz 24.1. Punkt-Richtungs-Gleichung Für jedes Paar von Stützvektor $\vec{s}$ und Richtungsvektor $\vec{r}$ existiert eine Gerade $g : \vec{s} + t \cdot \vec{r}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Alternative kann gilt, dass durch zwei unterschiedliche Punkte eine Gerade festgelegt ist.

Satz 24.2. Zweipunkt-Gleichung Zwei unterschiedliche Ortsvektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ legen die Gerade g als $\overrightarrow{OP_1} + t \cdot (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2})$ mit $t \in \mathbb{R}$ fest.

24.3 Übung Wir suchen den Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$, wobei die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ bekannt sind. Dazu addiert man den halben Vektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Also $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ folgt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Der Mittelpunkt ist der Durchschnitt. ◁

24.4 Formel Teilungspunkt Der *Teilungspunkt* T ist jener Punkt, der die Strecke von A nach B im Verhältnis λ teilt:

$$\overrightarrow{OT} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$$

24.5 Übung Der Schwerpunkt, ein Begriff aus der Physik, von drei Punkten ist der Durchschnitt der Eckpunkte. Mit den Punkten A, B, C ergibt sich der Schwerpunkt S als $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Mit $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ und $C = (1, 1, 3)$ folgt $S(1, 2/3, 1)$.

24.6 Formel Der Schwerpunkt dreier Punkte ist:

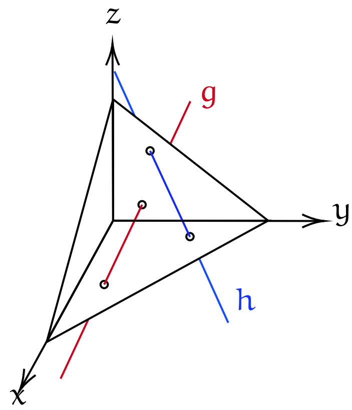
$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

◁

Gegenseitige Lage von Geraden

Im zweidimensionalen Raum können sich zwei Geraden entweder schneiden oder sie sind parallel (zwei Geraden, die zusammenfallen, also gleich sind, sind auch parallel). In dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ gibt es ein Möglichkeiten mehr. Das heisst sie schneiden sich nicht und sind nicht parallel.

Definition 13. Zwei Geraden, die nicht parallel sind und sich nicht schneiden, heissen *windschief*.

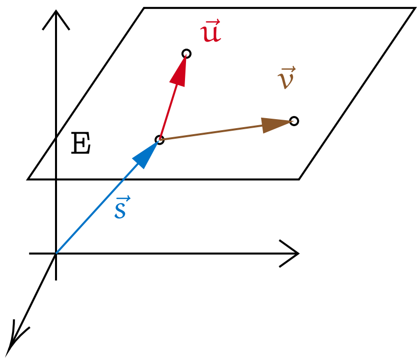


In der Abbildung sind zwei windschiefe Geraden eingezeichnet. Im gezeigten Abschnitt kommen sie sich am nächsten, schneiden sich aber nicht. Den (kürzesten) Abstand zwischen den Geraden werden wir später berechnen. Wenn sich zwei Geraden schneiden, dann ist dies mengentheoretisch gesprochen die Schnittmenge der Elemente der beiden Geraden. Wenn man die Punkt-Richtungsgleichungen der zwei Geraden gleichsetzt, erhält man komponentenweise ein lineares Gleichungssystem für die zwei Parameter.
Es gibt also vier Lagen zweier Geraden: Sie sind

- gleich,
- parallel,
- schneidend oder
- windschief.

Wir werden noch darauf zurückkommen, wie man diese Eigenschaft feststellt.

24.1.3 Ebenen im Raum



Die Gerade kann durch zwei Vektoren und einen Parameter bestimmt werden. Eine Eben hat eine Dimension mehr als ein Gleichung. Auf der Gerade hat man bildlich gesprochen nur die Möglichkeit, entlang der Geraden zu wandern. In (oder auf) der Ebene hat man zwei Freiheitsgrade der Bewegung. Der Stützvektor $\vec{s}$ bringt uns auf die Ebene. Dort können wir entlang zweier nicht parallel Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wandern.
Eine Ebene ist durch drei Punkte, die nicht alle auf einer Gerade liegen dürfen, festgelegt. Diese drei Punkte definieren drei Vektoren, wobei der dritte die Summe der zwei anderen ist. Nehmen wir drei Punkte, dann geht die Ebene E durch diese Punkte $P_1(1, 0, 5)$, $P_2(2, 1, -3)$ und $P_3(-2, 4, 0.5)$ und besteht mit den zwei Paramtern s und t aus der Menge der Punkte

$$E : \{\vec{s} + k\vec{u} + m\vec{v} \mid k, m \in \mathbb{R}\}.$$

Die Bestimmung von $\vec{s}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ geht wie folgt:

$$\vec{s} = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4.5 \end{pmatrix}$$

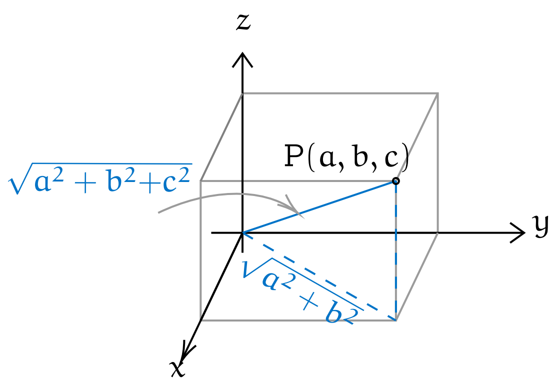
In Mengennotation können wir für diese Ebene E also schreiben:

$$E : \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4.5 \end{pmatrix} \mid k, m \in \mathbb{R}\}.$$

Man merke, dass gewisse Punkte der Ebene negative Werte von m und/oder k aufweisen.

24.1.4 Betrag und Abstand

Wir haben einen Vektor als Objekt mit Länge und Richtung definiert. Bis hierhin haben wir Vektoren durch Anfangspunkt und Aufpunkt festgelegt. Nun wollen wir die zwei charakteristischen Grössen bestimmen. Die Länge ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras. Für die Richtung müssen wir erst ein paar Hilfsgrössen definieren.



Definition 14. Der *Betrag* oder die *Länge* eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$ ist die Quadratwurzel der Summe der quadrierten Komponenten,

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Wichtig 1. Wir werden anstatt $|\vec{a}|$ auch ganz einfach a schreiben. ⊣

Anmerkung 24.1. Die Berechnung der Länge des Vektors erfolgt nach dem Satz des Pythagoras, für $n = 3$ zweimal angewendet.

Anmerkung 24.2. Jeder Vektor der Länge 0 ist eine Nullvektor.

24.3 Beispiel Die Länge des Vektors $a = (1, 0, 5)$ und $b = (2, 1. - 3)$ sind $|a| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$ und $|b| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$. ◁

Da eine Vektor zwei Punkte auf einer Geraden verbindet, kann man die Formel für den Betrag auch nutzen, um den Abstand zwischen den Punkten zu bestimmen. Zwei Punkte $A(x_A, y_A, z_A$ und $B(x_B, y_b, z_B$ besitzen den Abstand, der sich aus dem dreidimensionalen Satz des Pythagoras bestimmt, wie in der obigen Abbildung.

Satz 24.4. Die *Distanz* d zwischen zwei Punkten A und B im Raum $\mathbb{R}^3$ ist

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

24.5 Beispiel Bestimmen wir die Distanz von $(1, 2, 3)$ und $(1, -2, -4)$. Nach der Formel folgt:

$$d = \sqrt{(1-1)^2 + (2+2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{17}.$$

$\triangleleft$

24.1.5 Einheitsvektor

Der Einheitsvektor soll die Länge 1 haben.

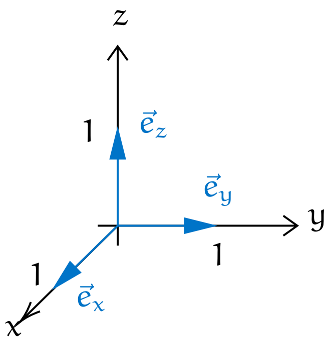
Definition 15. Der normierte Vektor, der nicht Nullvektor ist,

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

ist der Einheitsvektor in Richtung $\vec{v}$. Er hat Länge 1.

24.1 Beispiel Bestimme den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a} = (3, 4, 5)$. Dazu müssen wir die Länge bestimmen, also $\sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{49}$. Damit wird $\vec{e}_a = (3/7, 4/7, 5/7)$. $\triangleleft$

Im Zusammenhang mit dem kartesischen Koordinatensystem sind die sogenannten Basisvektoren wichtig. Für die drei Richtungen nach x, y und z gelten: $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, und $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$, in $\mathbb{R}^2$ gilt einfacher: $\vec{e}_x = (1, 0)$ and $\vec{e}_y = (0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$.



Die Basisvektoren sind zueinander senkrecht, d.h. jedes Produkt $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j$ ist null. Jeder Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2, 3$ kann als *Linearkombination* der Basisvektoren dargestellt werden. Dabei sind die zu den Basisvektoren zugehörigen Komponenten die Skalare der Multiplikation.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder kürzer

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_x + a_2 \vec{e}_y + a_3 \vec{e}_z.$$

24.2 Beispiel Bestimme den Einheitsvektor $\vec{e}_v$ aus $\vec{v} = (3, -2, 1)$. Zuerst bestimmen wir die Länge des Vektors als $|\vec{v}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$. Sodann schreiben wir

$$\vec{e}_v = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

◁

Definition 16. Drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bilden eine *orthonormierte Basis*, wenn gilt:

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad i \neq j \\ 1 & \text{falls} \quad i = j. \end{cases}$$

24.1.6 Skalarprodukt

Dieses besondere Multiplikation ist von sehr grosser Bedeutung und Nützlickeit.

Definition 17. Das *Skalarprodukt* oder *innere Produkt* zweier Vektoren mit n reellen Komponenten ist die Linearkombination ihrer Komponenten,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Anmerkung 24.1. Das Skalarprodukt hat auch einen Zusammenhang mit der Länge, denn $\vec{u} \bullet \vec{u} = u_1 u_1 + \cdots + u_n u_n = |\vec{u}|^2$.

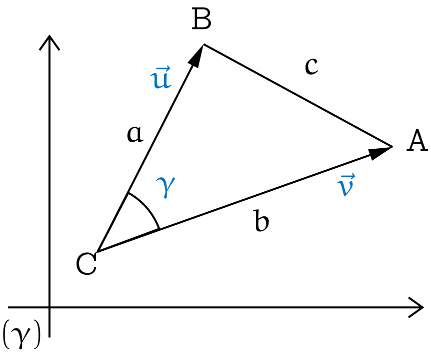
Anmerkung 24.2. Das Skalarprodukt *ist* ein Skalar und kein Vektor. Man darf es nicht mit der Multiplikation eines Vektors *mit* einem Skalar verwechseln.

Welche Eigenschaften hat das Skalarprodukt? Wäre es *kommutativ*, dann müsste gelten $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ durch Ausrechnen ist dies schnell bestätigt.
Wie steht es mit dem Verteilungsgesetz (Distributivität)? Also gilt $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$? Wir rechnen in $\mathbb{R}^2$ schnell nach: Die linke Seite ergibt $a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$. Die rechte Seite: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$. Die Termumformung, ausklammern der a-Terme führt zu: $a_+(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$. Beide Seiten sind gleich, das Distributivgesetz gilt.

24.1.7 Richtung, Zwischenwinkel

Mit der Einführung des Skalarprodukts können wir die Richtung oder den Winkel einfacher darstellen.

Zwei Vektoren plus ihre Differenz ergeben ein Dreieck. Die Winkel des Dreiecks lassen sich aus den Seiten berechnen. Wir müssen uns den Kosinussatz in Erinnerung rufen, der für beliebige Dreiecke mit den Seiten a, b und c und dem Winkel γ zwischen den Seiten a und b besagt:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Wir setzen für die Seiten $a = |u|$, $b = |v|$ und $c = |u - v|$. (Wir nennen nun den Winkel γ einfach θ.) Damit gilt eingesetzt

$$\begin{aligned}
|u-v|^2 &= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos(\theta) \\
&= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \\
&= u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 + u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_3^2 + v_3^2 - 2u_3v_3 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)
\end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$-2|u||v|\cos(\theta) = -2 \cdot (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

und weiter

$$\cos(\theta) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}\,|\,|\vec{v}\,|},$$

so dass

$$\theta = \arccos\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}\,|\,|\vec{v}\,|} \right).$$

und mit dem Skalarprodukt dann

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}\,|\,|\vec{v}\,|} \right)$$

Satz 24.1. Der *Zwischenwinkel* zwischen zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, von denen keiner der Nullvektor ist, beträgt

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}\,|\,|\vec{v}|}$$

Anmerkung 24.2. Den Winkel θ erhält man aus $\cos(\theta)$ mit der Arcusfunktion, $\arccos(\theta)$.

Anmerkung 24.3. Unter Benutzung der Einheitsvektoren berechnet sich der Winkel einfach zu:

$$\theta = \arccos(\,\vec{e}_u \bullet \vec{e}_v\,)$$

Wichtig 2. Die Formel $\vec{a} \bullet \vec{b} = \cos(\theta)|\vec{a}||\vec{b}| = \cos(\theta)a \cdot b$ ist eingänglicher und besser zu merken. ⊣

24.4 Beispiel Wir berechnen den Zwischenwinkel zweier Basisvektoren $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$. Das ergibt $1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0=0$. Damit sind sie senkrecht zueinander. Anderseits ist der $\arccos 0 = 90° = \frac{\pi}{4}$. ◁

Satz 24.5. θ ist der Zwischenwinkel der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Es gilt

$$\vec{v}\bullet\vec{w} \text{ ist } \begin{cases} >0 & \text{für } 0° \leqslant \theta < 90° \quad (0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{4}) \\ 0 & \text{für } \theta = 90° \quad (\theta = \frac{\pi}{4}) \\ <0 & \text{für } 90° < \theta \leqslant 180° \quad (\frac{\pi}{4} \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Satz 24.6. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^n$ sind *senkrecht* (orthogonal) zueinander, dann und nur dann, wenn ihr Skalarprodukt null ist,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\bullet\vec{b} = 0.$$

Sie sind *parallel*, dann und nur dann, wenn ihr Skalarprodukt dem Produkt ihrer Längen gleich ist,

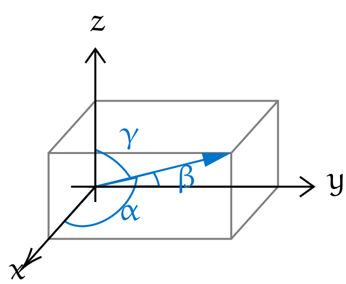
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Anmerkung 24.7. Weiter oben haben wir gesagt, dass zwei Vektoren kollinear sind, wenn sie beide zu einer Geraden parallel sind. Deshalb sind kollineare Vektoren, eigentlich ihre Anfangs- und Aufpunkte, parallel. Hier in diesem Buch betrachten wir die zwei Ausdrücke für Vektoren als gleich.

Anmerkung 24.8. Sind zwei Vektoren paralle, dann ist der Zwischenwinkel null und damit das Argument der Arcus-Cosinus-Funktion 1. D.h.

$$\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = 1.$$

Wir bestimmen die Winkel eines Vektors, die dieser mit den Achsen des Koordinatensystems bildet. Wir bezeichnen sie mit α, β und γ. Zu ihrer Berechnung nehmen wir das Skalarprodukt gebildet aus dem Vektor $\vec{a}$ und den Einheitsvektoren z.B. $\vec{e}_x$ etc. Damit werden die Winkel



$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\bullet\vec{e}_x}{a\cdot 1} = \frac{a_1}{a}$$
$$\cos(\beta) = \frac{\vec{a}\bullet\vec{e}_y}{a\cdot 1} = \frac{a_2}{a}$$
$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a}\bullet\vec{e}_z}{a\cdot 1} = \frac{a_3}{a}$$

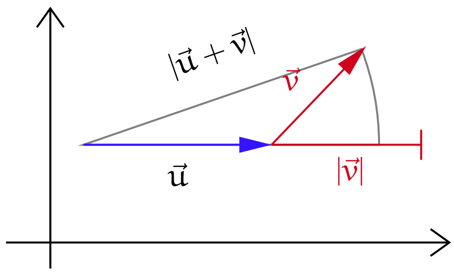
Nun sind die Winkel nicht unabhängig voneinander, denn es gilt aus der Definition der Länge von $\vec{a}$:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1.$$

24.1.8 Ungleichungen**

Addition

Die Länge der Summe zweier Vektoren, die nicht parallel sind ist kürzer als die Länge der Summe zweier paralleler Vektoren. Die Abbildung zeigt diesen Sachverhalt anschaulich. Aus der elementaren Geometrie wissen wir, dass die Hypothenuse kürzer ist als die Summe der zwei Katheten. Mit Vektoren stellt sich diese Tatsache wie folgt dar.



Satz 24.1 (**Dreiecksungleichung**). Für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt,

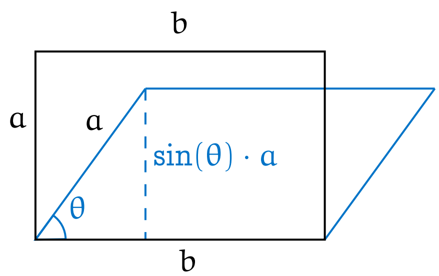
$$|\vec{u}+\vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|,$$

wobei Gleichheit gilt, wenn der eine Vektor ein nicht-negatives skalares Vielfaches des anderen ist.

Anmerkung 24.2. Deshalb ist die gerade die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.

Skalarprodukt

Wenn wir von der Ebene ausgehen, dann sieht man in der Abbildung ein Parallelogramm und ein Rechteck mit gleichlangen Seiten a und b. Die Fläche des Parallegramms ist $F = ab\sin\theta$, die des Rechtecks $F_\square = ab$. Solange $\theta > 0°$ ist, ist $\sin(\theta) < 1$. Deshalb gilt folgender Satz.



Satz 24.3 (Cauchy-Schwarz Ungleichung). Für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt,

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leqslant |\vec{u}|\,|\vec{v}|,$$

wobei Gleichheit nur dann gegeben ist, wenn ein Vektor ein skalares Vielfaches des anderen ist (kollinear, parallel).

Wenn $\vec{a} \bullet \vec{b} = \cos(\theta)|\vec{a}||\vec{b}|$ ist und $\cos(\theta) \leqslant 1$, dann folgt, dass $\vec{a} \bullet \vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$. Wir fassen zusammen.

24.4 Eigenschaften Addition Für die Addition von Vektoren gilt:

(a) $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$ Kommutativgesetz

(b) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ Assoziativgesetz

(c) $\vec{v}+\vec{0} = \vec{v} = \vec{0}+\vec{v}$ Additive Identität

(d) $\vec{v}+(-\vec{v}) = \vec{0}$ Additive Inverse

24.5 Eigenschaften Skalar mal Vektor Für beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, und Skalare k, l,

gilt
(e) $k(l\vec{v}) = (kl)\vec{v}$ Assoziativgesetz
(f) $k(\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$ Distributivgesetz
(g) $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$ Distributivgesetz

24.6 Eigenschaften Skalarprodukt Für beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, und den Skalar k

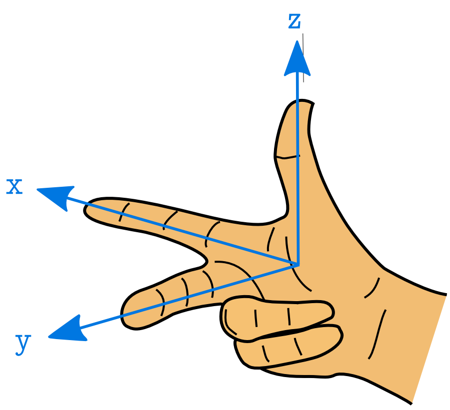
gilt
(a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ Kommutativgesetz
(b) $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$ Assoziativgesetz
(c) $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0 = \vec{0} \cdot \vec{v}$
(d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ Distributivgesetz
(e) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ Distributivgesetz

Die Behauptungen (a)-(e) sind Anwendungen der Definition und werden hier nicht weiter analysiert.
Falls $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ und $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$, dann folgt$\vec{u}\cdot(k\vec{v}+l\vec{w}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})+l(\vec{u}\cdot\vec{w}) = k(0)+l(0) = 0$ für alle Skalare k, l. Damit ergibt sich der Satz:

Satz 24.7. Wenn $\vec{u} \perp \vec{v}$ und $\vec{u} \perp \vec{w}$, dann $\vec{u} \perp (k\vec{v} + l\vec{w})$ für alle Skalare k, l.

24.2 Das Vektorprodukt

24.2.1 Chiralität des Koordinatensystems



Dieser Abschnitt beschreibt eine Eigenschaft des dreidimensionalen Koordinatensystems, das für die folgenden Betrachtungen wichtig ist. Es hilft, Richtungen und damit Vorzeichen eindeutig festzulegen. Bastler wissen, dass es Links- und Rechtsschrauben gibt. Die meisten sind Rechtsschrauben, weil es für Rechtshänder kraftvoller anzuziehen sind.
Die Chiralität, zu Deutsch “Händigkeit”, kann linksdrehend oder rechtsdrehend sein. Es gilt die Festsetzung: Ein Rechtssystem im dreidimensionalen Raum sind drei Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$, wenn vom Endpunkt des Vektors $\vec{z}$ aus gesehen die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ ein Rechtssystem in der Ebene bilden. Ein Rechtssystem in der Ebene bedeutet, dass$\vec{x}$, $\vec{y}$, bei denen $\vec{y}$ aus $\vec{x}$ auf kürzestem Wege durch Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn hervorgeht.

24.2.2 Begriff

Wir haben das Skalarprodukt kennengelernt, bei welchem man zwei Vektoren “multipliziert” hat und als Resultat einen Zahlenwert bekommen hat. Das Vektorprodukt, in dieser Logik der Namensgebung, ist eine Multiplikation von Vektoren, die zu einem Vektor führt. Man kann mit dem generischen Verkettungszeichen folgende Darstellung machen:

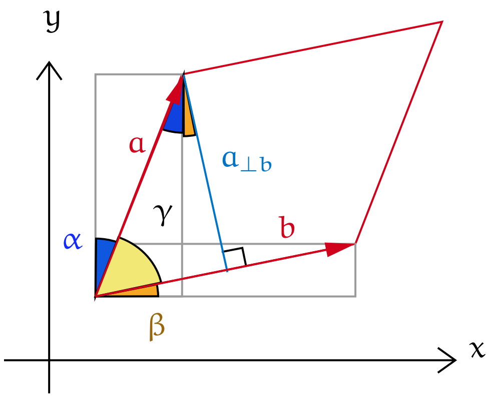
$$\vec{c} = \vec{a} \circ \vec{b}$$

24.1 Eigenschaften Das Vektorprodukt soll folgende drei Eigenschaften besitzen;

(1) Der Vektor $\vec{c}$ ist normal, d.h. senkrecht, auf der Ebene, die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird,

(2) die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms,

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtshandsystem.



Wir beginnen mit der Flächeneigenschaft und betrachten sie vorerst in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Fläche eines Parallelogramms berechnet sich als Höhe mal Grundseite, in unserer Abbildung also $F = a_{\perp b} \cdot b$. Die Höhe kann man als $a \sin\gamma$ oder $a\cos(\alpha+\beta)$ berechnen. Aus den Additionstheoremen der Trigonometrie wissen wir, dass für Summen von Winkeln gilt: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$. Nun wollen wir die Funktionen durch die Komponenten der Vektoren ersetzen. Es ist $\cos(\alpha) = \frac{a_y}{a}$, $\cos(\beta) = \frac{b_x}{b}$, $\sin(\alpha) = \frac{a_x}{a}$ und $\sin(\beta) = \frac{b_y}{b}$. Somit gilt.

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a_y}{a}\cdot\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\cdot\frac{b_y}{b}$$

Und damit folgt die Fläche aus $F = a_{\perp b} \cdot b = \cos(\alpha+\beta)\cdot ab$:

$$F = a_y \cdot b_x - a_x \cdot b_y.$$

Bevor wir zur Fläche in $\mathbb{R}^3$ zurückkommen, bestimmen wir einen Vektor, der die Eigenschaft (1) erfüllt. Der Vektor $\vec{n}$ soll sowohl senkrect zu $\vec{a}$ als auch $\vec{b}$ sein, wobei diese nicht kollinear sein dürfen. Das heisst, es müssen die zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$\vec{n} \bullet \vec{a} = 0$$
$$\vec{n} \bullet \vec{b} = 0$$

Da wir aber zwei Gleichungen mit drei Unbekannten haben, ist eine Variable ein Parameter, den wir zu 1 setzen, hier $n_3 = 1$:

$$a_1\, n_1 + a_2\, n_2 + a_3\, 1 = 0$$
$$b_1\, n_1 + b_2\, n_2 + b_3\, 1 = 0$$

Somit resultiert mit der Determinantenmethode für Gleichungssysteme:

$$n_1 = \frac{-a_3 b_2 + a_2 b_3}{a_1 b2 - a_2 b_1}$$
$$n_2 = \frac{-a_1 b_3 + a_3 b_1)}{a_1 b2 - a_2 b_1}$$
$$n_3 = 1$$

Wir können nun diesen Vektor strecken ohne seine Richtung zu ändern, indem wir mit dem Nennen multiplizieren und erhalten eine kollinearen, normalen Vektor m:

$$m_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$
$$m_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$
$$m_3 = a_1 b2 - a_2 b_1$$

Nun kommen wir auf die Fläche zurück. Das wird eine längere Rechnerei. Es muss aber sein, sonst glaubt man das Resultat nicht. Es beginnt mit (wir schreiben a anstatt $|\vec{a}|$):

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

wir quadrieren und machen dann von $\cos(\gamma)^2 + \sin(\gamma)^2 = 1$ gebrauch:

$$(\vec{a} \bullet \vec{b})^2 = a^2 b^2 (1 - \sin(\gamma)^2) = a^2 b^2 - a^2 b^2 \sin(\gamma)^2$$

der letzte Term entspricht der Fläche $F^2 = a^2 b^2 \sin(\gamma)^2$. Somit foglt

$$F^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

Wir betrachten die zwei Terme vorerst separat und fügen sie dann zusammen. Wir beginnen mit:

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = {} & a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 \\ & + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 \\ & + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2\end{aligned}$$

Der zweite Term ist:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \bullet \vec{b})^2 &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \\ &+ a_1 b_1 a_2 b_2 + a_1 b_1 a_3 b_3 + a_2 b_2 a_3 b_3 \\ &+ a_1 b_1 a_2 b_2 + a_1 b_1 a_3 b_3 + a_2 b_2 a_3 b_3\end{aligned}$$

Nun subtrahieren wir die letzte rechte Seite von der oberen rechten Seite. Je drei Terme kann man geradewegs weglassen, denn sie kommen in beiden Termen vor, nämlich $a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$. Damit folgt;

$$\left.\begin{array}{r} +a_1^2b_2^2 \\ +a_1^2b_3^2 \\ +a_2^2b_1^2 \\ +a_2^2b_3^2 \\ +a_3^2b_1^2 \\ +a_3^2b_2^2 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} +a_1b_1a_2b_2 \\ +a_1b_1a_3b_3 \\ +a_2b_2a_3b_3 \\ +a_1b_1a_2b_2 \\ +a_1b_1a_3b_3 \\ +a_2b_2a_3b_3 \end{array}\right.$$

wir gruppieren etwas um und faktorisieren die Quadrate:

$$\left.\begin{array}{ll} +a_1b_2a_1b_2 & -a_1b_1a_2b_2 \\ +a_1b_3a_1b_3 & -a_1b_1a_3b_3 \\ +a_2b_1a_2b_1 & -a_1b_1a_2b_2 \\ +a_2b_3a_2b_3 & -a_2b_2a_3b_3 \\ +a_3b_1a_3b_1 & -a_1b_1a_3b_3 \\ +a_3b_2a_3b_2 & -a_2b_2a_3b_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +a_1b_2(a_1b_2 - b_1a_2) \\ +a_1b_3(a_1b_3 - b_1a_3) \\ +a_2b_1(a_2b_1 - a_1b_2) \\ +a_2b_3(a_2b_3 - b_2a_3) \\ +a_3b_1(a_3b_1 - a_1b_3) \\ +a_3b_2(a_3b_2 - a_2b_3) \end{array}\right.$$

Von diesen sechs Termen gehören je zwei zusammen, und dann erkennen wir die drei Quadrate

$$\left.\begin{array}{l} +(a_1b_2 - b_1a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ +(a_1b_3 - b_1a_3)(a_1b_3 - a_3b_1) \\ +(a_2b_3 - b_2a_3)(a_2b_3 - a_3b_2) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +(a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\ +(a_1b_3 - a_3b_1)^2 \\ +(a_2b_3 - a_3b_2)^2 \end{array}\right.$$

Das Quadrat der Fläche ist also

$$F^2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

Und nun kommt das Wunder, wenn wir die Terme mit den Komponenten des Normalenvektors m vergleichen.

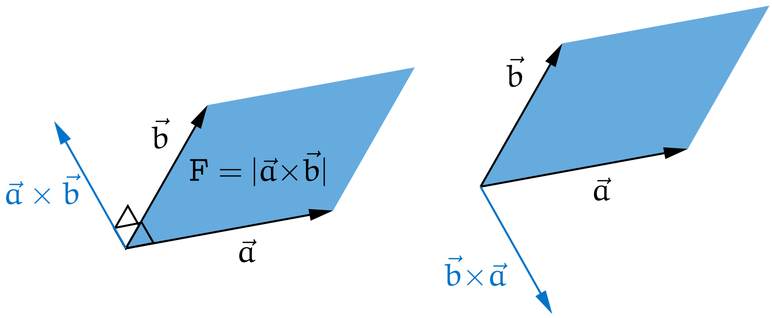
$$F^2 = \underbrace{(a_1b_2 - b_1a_2)^2}_{m_3^2} + \underbrace{(a_1b_3 - a_3b_1)^2}_{m_2^2} + \underbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)^2}_{m_1^2}.$$

Wir haben also mit den Vektor m den Vektor gefunden, der die geforderten Eigenschaften aufweist, nämlich er ist normal (senkrecht) auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene und sein Betrag entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms!

Definition 18. Es sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Das *Vektorprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, geschrieben $\vec{a} \times \vec{b}$ ist der Vektor in $\mathbb{R}^3$ gemäss:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_2, a_1b_2 - a_2b_1).$$

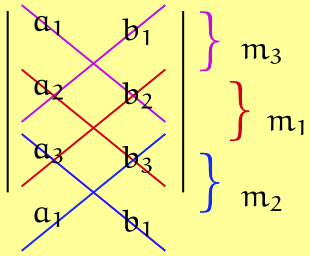
Im der folgenden Abbildung sieht man, in der Zusammenfassung, das Vektroprodukt. Die Rechthandregel besagt, dass für $(\vec{a}, \vec{b})$ und das Vektorprodukt sich wie x, y und z verhalten. Deshalb zeigt $\vec{b} \times \vec{a}$ in die Gegenrichtung. Es gilt also $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



Die Vektoren in der Reihenfolge $\vec{a}$, $\vec{b}$ und das Produkt nach oben sowie $\vec{b}$, $\vec{a}$ und das Produkt nach unten entsprechen dem rechtshändige Systeme. Eine Rotation um den dritten Vektor führt den ersten über den zweiten im Gegenuhrzeigersinn.

24.2 Beispiel Wir bilden das Vektorprodukt der zwei Einheitsvektoren in x- und y-Richtung. Es ist $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ und $\vec{e}_y = (0, 1, 0$. Setzt man ein, dann folgt. $((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0))$ also $(0, 0, 1)$. Das ist natürlich $\vec{e}_z$. $\triangleleft$

24.3 Rezept Wir brauchen eine handliche Regel, um das Vektorprodukt zu errechnen.



Die eine Methode besteȟt im Nebeneinaderschreiben der Vektoren. Dann fügt man eine Zeile ein mit den Komponenten der ersten Zeile. In der Art der Determinantenberechnung bilden wir die Differenzen der Produkte. Dabei muss man beachten, dass man mit der dritten Komponente m_3 beginnt und zyklisch dann bei m_1 fortfährt und zu m_2 gelangt.

24.4 Rezept Die andere Methode haben wir schon angedeutet, man berechnet die Determinanten des Gleichungssystems:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \end{array}\right]$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad m_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix} \quad m_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}$$

Satz 24.5. Ist das Vektorprodukt $\vec{c}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die keine Nullvektoren sind, kein Nullvektor, dann ist $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal (senkrecht).

Das Vektorprodukt $\vec{c}$ steht senkrecht auf der Ebene, die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Für den Beweis muss man nur zeigen, dass das Skalarprodukt null ist. Wir zeigen, dass $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a} = 0$ ist:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \bullet (a_1, a_2, a_3) \\
&= a_2b_3a_1 - a_3b_2a1 + a_3b1a_2 - a1b_3a_2 + a1b_2a_3 - a_2b1a_3 \\
&= a1a_2b_3 - a_1a_2b_3 + b1a_2a_3 - b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - a_1b_2a_3 \\
&= 0 \text{ , nach Umstellen der Terme.}
\end{aligned}$$

Für $(\vec{b} \times \vec{a}) \bullet \vec{b} = 0$ ist der Beweis ganz analog.

Satz 24.6. Ist θ der Zwischenwinkel der Vektoren, die keine Nullvektoen sind, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$, dann gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\theta) \tag{24.1}$$

24.7 Übung Wir wollen den Flächeninhalt eines Dreiecks, das durch die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$ gebildet werden, ausrechnen. Der vierte Punkt sei S mit $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \vec{v} = \overrightarrow{PR}$. Die Fläche des Parallelogramms ist bekanntlich:

$$F_{PQSR} = u \cdot v \cdot \sin(\theta) = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$ ist offensichtlich die Hälfte, also

$$F_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$

$\triangleleft$

Es gelten für die Flächen folgende Regeln:

Satz 24.8. Flächen von Dreieick und Parallelogramm

(1) Die Fläche F eines Dreiecks mit anliegenden Seiten als Vektoren in $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist:

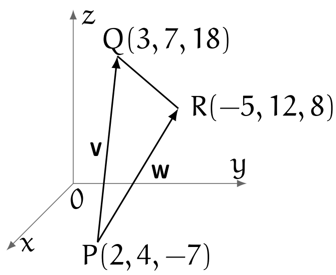
$$F = \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}|$$

(2) Die Fläche F eines Parallelogramms mit anliegenden Seiten als Vektoren in $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist is:

$$F = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

Diese Regeln, da sie den Kosinussatz innehaben, sind einfacher zu handhaben als trigonometrische Vorstellungen im Raum.

24.9 Übung Wir wollen die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$, where $P = (2, 4, -7)$, $Q = (3, 7, 18)$, und $R = (-5, 12, 8)$ bestimmen.



Wir legen fest, dass $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{PR}$, gemäss Abbildung. Für $\vec{v} = (3,7,18) - (2,4,-7) = (1,3,25)$ und $\vec{w} = (-5,12,8) - (2,4,-7) = (-7,8,15)$, ergibt sich die Fläche F des Dreiecks $\triangle PQR$ aus dem Vektorprodukt

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,|\vec{v} \times \vec{w}| = \frac{1}{2}\,|(1,3,25) \times (-7,8,15)| \\
&= \frac{1}{2}\,|((3)(15) - (25)(8), (25)(-7) - (1)(15), (1)(8) - (3)(-7))| \\
&= \frac{1}{2}\,|(-155, -190, 29)| \\
&= \frac{1}{2}\,\sqrt{(-155)^2 + (-190)^2 + 29^2} = \frac{1}{2}\,\sqrt{60966} \\
A &\approx 123.46
\end{aligned}$$

◁

Im folgenden Kasten fassen wir die Eigenschaften des Vektorproduktes zusammen.

24.10 Eigenschaften Vektorprodukt

Für beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$, und den Skalar k, gilt:

(a) $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ — Antikommutatives Gesetz

(b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ — Distributivgesetz (I)

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ — Distributivgesetz (II)

(d) $(k\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k\vec{w}) = k(\vec{v} \times \vec{w})$ — Assozitivität

(e) $\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v}$

(f) $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$

(g) $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ nur und nur dann, wenn $\vec{v} \parallel \vec{w}$

Die Eigenschaften (b)-(f) sind sofort einsichtig. Das (a) können wir folgendermassen herleiten:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1) \\
&= -(v_3 w_2 - v_2 w_3, v_1 w_3 - v_3 w_1, v_2 w_1 - v_1 w_2) \\
&= -(w_2 v_3 - w_3 v_2, w_3 v_1 - w_1 v_3, w_1 v_2 - w_2 v_1) \\
&= -\vec{w} \times \vec{v}
\end{aligned}$$

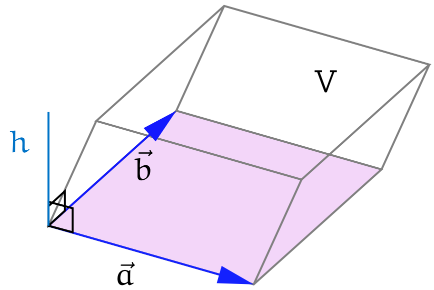
Die Beträge sind gleich, die Richtung ist entgegengesetzt.

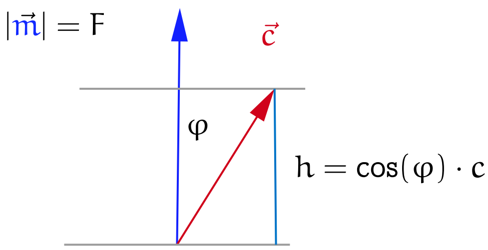
Zu (g) lässt sich einfach sagen, dass für zwei Vektoren, die nicht Nullvektoren sind, die also eine Länge haben, die Fläche null ist, wenn $\sin(\theta)$ null ist. Das ist bei $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2} = 180°$ der Fall. Dann sind sie aber parallel (oder kollinear).

24.3 Das Spatprodukt*

Mit dem Vektorprodukt gelingt es, die Fläche des Parallelogramms aus zwei Vektoren zu bestimmen.

Bekanntlich errechnet sich das Volumen eines Prismas, und speziell eines Parallelepipeds, als Grundfläche mal Höhe. Ein Parallelepiped wird von 6 Parallelogrammen begrenzt wird, von denen je 2 gegenüber liegende deckungsgleich sind und in parallelen Ebenen liegen. Es wird auch "Spat" genannt.





Das Volumen des Spats ist $F \cdot h$. Anderseits ist $F = |\vec{m}|$. Das Skalarprodukt $\vec{c} \bullet \vec{m}$ ist wiederum $F \cdot c \cdot \cos(\varphi)$. Somit folgt $V = \vec{c} \bullet \vec{m} = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$. Also, drei Vektoren, die alle nicht kollinear sind, bilden ein Spat, dessen Volumen bestimmt werden kann.

Definition 19. Das *Spatprodukt* dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Satz 24.11. Bilden drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ die anliegenden Seiten eines Spats, dann ist dessen Volumen gleich

$$V = |\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})|$$

24.12 Übung Wir bestimmen das Volume des Spats, das durch die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, 1, 4)$ und $\vec{c} = (-1, -2, 1)$ gebildet wird. Zuerst berechnen wir den Normalenvektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Wir schreiben

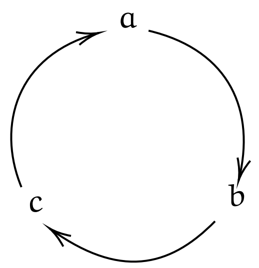
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Damit folgt nach unserem Rezept $m_3 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1$, $m_1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$ und $m_2 = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4$. Zusammen $\vec{m} = (5, -4, 1)$. Das Skalarprodukt ist dann $V = |(-1)5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1| = |4| = 4$. $\triangleleft$

Dasselbe Spat kann man auf drei Arten berechnen, denn zu den drei unterschiedlichen Flächen gibt es drei unterschiedliche Höhen. Aus dieser Betrachtung folgt die Regel

Satz 24.13. Bilden dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ ein Spat, so gilt:

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \bullet (\vec{c} \times \vec{a})$$



Anmerkung 24.14. Im obigen Satz folgt die Reihenfolge dem sogenannten zyklischen Vertauschen. Dabei wird ein Tripel aus der Reihe $a, b, c, a, b, c, a \ldots$ herausgegriffen. Vertauscht man zwei Glieder der Reihe, also z.B. a, c, b, so ändert sich das Vorzeichen. Es gilt z.B.

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \bullet (\vec{c} \times \vec{b}).$$

24.3.1 Determinantenmethode

Wir haben in Rezept 24.4 gesehen, dass man Determinanten verwenden kann, um das Vektorprodukt zu bestimmen. Nun gibt es eine Erweiterung, mit der man das Spatprodukt aus einer 3×3-Matrix in einem Lauf berechnen kann.
Wenn man das Spatprodukt ausschreibt $\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$, so sieht die Summe wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) &= (c1, c2, c3) \bullet (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_2, a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_2) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Terme mit dem Schema von Sarrus vergleichen,

$$\begin{array}{c|ccc|cc}
 & + & + & + & & \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 & - & - & - & &
\end{array}$$

, dann sehen wir, dass gilt:

$$V = \det(\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2. \end{array} \right.$$

Wir testen die Formel am obigen Beispiel, dessen Lösung wir kennen. Die Determinante ist

$$V = \det(\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})) = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right.$$

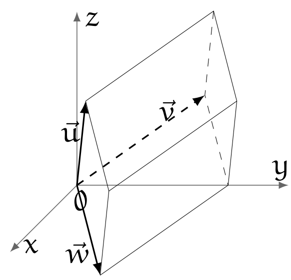
Wir erhalten folgendes Resultat $V = 1 - 8 + 0 - (-3) - (-8) - 0 = 4$ Heureka!

Satz 24.1. Für das Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{24.2}$$

Anmerkung 24.2. Anstatt die Komponenten der Vektoren zeilenweise zu notieren, kann man sie auch spaltenweise schreiben, ohne das Resultat zu ändern.

24.3 Beispiel Bestimme das Volumen des Spates mit den anliegenden Seitenvektoren $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ und $\vec{w} = (1, 1, -2)$



Wir rechnen also mit der Determinante

$$\det(\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Dann erweitern wir die Matrix zum Schema

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Daraus berechnen wir das Volumen $V = (2 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1) - (3 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2)) = -12 + 2 - 3 - 9 - 4 - 2 = 28$ ◁

24.3.2 Tripelprodukt**

Wir haben die Produkte $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \bullet \vec{c}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$ schon betrachtet ($(\vec{a} \bullet \vec{b}) \times \vec{c}$ ist sinnlos). Es bleibt also $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, für das angeblich gilt:

Satz 24.1. Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c}$$

Mit der Wahl von $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, 0, 0)$ und $\vec{c} = (c_1, c_2, 0)$ rechnen wir das Vektorprodukt in der Klammer aus und dann das zweite Produkt nach

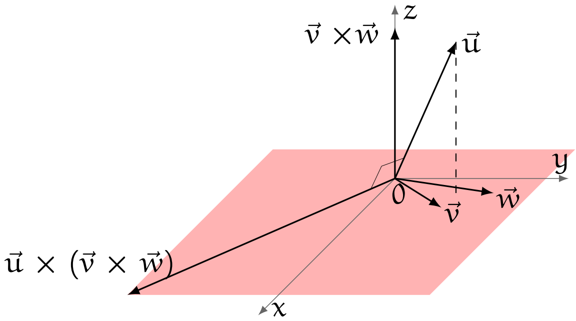
$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ 0 & c_2 \\ 0 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \\ a_3 & b_1 c_2 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_1 c_2 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24.3}$$

Anderseits rechnen wir

$$\begin{aligned} (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c} &= (a_1 c_1 + a - 2c_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - a_1 b_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 c_1 b_1 + a_2 c_2 b_1 - a_1 b_1 c_1 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_1 c_2 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Vergleich bestätigt den Satz.

Anmerkung 24.2. Man beachte, dass das Tripelprodukt einen Vektor Produziert. Dieser lieht, da zweimal senkrecht auf der Ebene, wieder in der Ebene.



24.3 Übung Bestimmen wir $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ for $\vec{u}=(1,2,4)$, $\vec{v}=(2,2,0)$, $\vec{w}=(1,3,0)$. Da $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ und $\vec{u}\cdot\vec{w}=7$, folgt

$$\begin{aligned}\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) &= (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}\\ &= 7\,(2,2,0)-6\,(1,3,0)=(14,14,0)-(6,18,0)\\ &= (8,-4,0)\end{aligned}$$

Wie in der Abbildung ersichtlich, liegen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in der xy-Ebene. Ebenso $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$. Deshalb ist $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ orthogonal zu beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}\times\vec{w}=(0,0,4)$. ◁

24.3.3 Vierfachprodukt**

Man kann natürlich beliebig viele Produkte aneinanderreihen. Hier gibt es einfache Aequivalenzen. Mit vier Termen beenden wir die Serie.

Satz 24.1. Es gilt für vier Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ in $\mathbb{R}^3$.

$$(\vec{u}\times\vec{v})\bullet(\vec{w}\times\vec{z})=(\vec{u}\bullet\vec{w})(\vec{v}\bullet\vec{z})-(\vec{u}\bullet\vec{z})(\vec{v}\bullet\vec{w})$$

24.2 Übung Wir wollen die obige Formel herleiten unter Verwendung des Resultats für das Tripelprodukt. Zur Vereinfachung schreiben wir auch $\vec{a}=\vec{u}\times\vec{v}$.

$$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{z}) &= \vec{a}\cdot(\vec{w}\times\vec{z})\\ &= \vec{w}\cdot(\vec{z}\times\vec{a}) \quad \text{(zyklisch tauschen)}\\ &= \vec{w}\cdot(\vec{z}\times(\vec{u}\times\vec{v}))\\ &= \vec{w}\cdot((\vec{z}\cdot\vec{v})\vec{u}-(\vec{z}\cdot\vec{u})\vec{v}) \quad \text{(als Tripelprodukt)}\\ &= (\vec{z}\cdot\vec{v})(\vec{w}\cdot\vec{u})-(\vec{z}\cdot\vec{u})(\vec{w}\cdot\vec{v})\\ &= (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{z})-(\vec{u}\cdot\vec{z})(\vec{v}\cdot\vec{w}) \quad \text{(kommutativ).}\end{aligned}$$

◁

24.4 Anwendungen zu Linien und Ebenen

Wir kennen nun die Grundbegriffe und Rechenregeln für die Vektoren. Damit können wir nun Fragestellungen zu Geraden und Ebenen im Raum nachgehen. Wir behandeln einen gewissen Vorrat an Standardaufgaben.

24.4.1 Darstellungsformen

Wir haben darauf hingewiesen, dass die Vektorgeometrie im 19. Jahrhundert von Hermann Grassmann *erfunden* wurde. Sie ist ein Formalismus, um einfacher rechnen zu können. Vor dieser Zeit wurden aber die Probleme schon behandelt. Die ältere Darstellung kann man als *analytisch* bezeichnen. Sie fusst als Beschreibung des Raumes und damit der Geometrie auf *Gleichungen*. Gleichungen sind Bedingungen für Punkte und Punktmengen, die man wiederum in der einfachen Geometrie als *geometrische Örter* bezeichnet.
Zur Berechnung spezieller Grössen ist es praktisch, zwischen den zwei Darstellungen als Vektor und als Gleichung hin und her zu wechseln oder sie zu mischen, je nach dem, welche vorteilhafter ist. Deshalb wird im folgenden auf den zwei Darstellungen beharrt. Wir verzichte aber, als drittes die Verhältnisse als Mengen darzustellen.

24.4.2 Linien

Gerade durch Punkt mit bestimmter Richtung

Diese Aufgaben haben wir schon weiter oben kennengelernt (Abschnitt 24.1.2).
In einem Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ in $\mathbb{R}^3$ soll die Gerade durchgehen, die die Richtung parallel zum Richtungsvektor $\vec{v} = (a, b, c)$ aufweist. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ ist der Stützvektor. Jeder Punkt der Gerade kann durch einen bestimmten Parameterwert erreicht werden, wenn der Richungsvektor damit gestreckt oder gestaucht wird, wenn der Parameter t also im Intervall $J = (-\infty, \infty)$ liegt. Die Gleichung der Gerade g ist in Parameterform:

24.1 Formel

$$g: \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot a \\ y_0 + t \cdot b \\ z_0 + t \cdot c \end{pmatrix}$$

Anmerkung 24.2. Der Punkt P stimmt mit dem Parameterwert $t = 0$ überein.

Aus der Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot a \\ y_0 + t \cdot b \\ z_0 + t \cdot c \end{pmatrix}$$

kann man komponentenweise den Parameter t ausrechnen und die Terme gleichsetzen. Dies ist die analytische Darstellung der Geraden. Für den Richtungsvektor, dessen Komponenten alle nicht-null sind, folgt die Darstellung

24.3 Formel

$$g: \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Falls beispielsweise $a = 0$ ist, darf man die x-Komponente nicht als Bruch darstellen. In diesem Fall hat die Gerade keine Änderung in x, d.h. sie liegt in der Ebene mit konstantem $x = x_0$. Deshalb schreibt man dann

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Für $b = 0$ und $c = 0$ geht man analog vor.

24.4 Übung Wir bestimmen die Gerade g mit Stützvektor $P = (2, 3, 5)$ und Richtungsvektor $\vec{v} = (4, -1, 6)$ in verschiedenen Formen. Let $\vec{r} = (2, 3, 5)$. Mit der Formel schreiben wir

$$g: \quad \vec{r} + t\vec{v} = (2, 3, 5) + t(4, -1, 6), \quad \text{für } -\infty < t < \infty$$

In Komponentenform

$$g: \quad x = 2 + 4t, \quad y = 3 - t, \quad z = 5 + 6t, \quad \text{for } -\infty < t < \infty$$

und analytisch

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{6}$$

Jetzt finden wir zwei beliebige Punkte auf g, indem wir zwei Werte für t wählren, z.B. $t = 1$ und $t = 2$. Damit sind die zwei Punkte $(6, 2, 11)$ und $(10, 1, 17)$ auf g. $\triangleleft$

Gerade durch zwei Punkte

Es sind $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ and $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ zwei verschieden Punkte in $\mathbb{R}^3$. Die Gerade h wird durch sie bestimmt. Mit $\vec{r_1} = \overrightarrow{OP_1}$ und $\vec{r_2} = \overrightarrow{OP_2}$. Wir wählen einen der zwei als Stützvektor und bestimmen den Richtungsvektor als Differenz $r_2 - r_1$. Damit folgt für die Geradengleichung:

24.5 Formel Für $-\infty < t < \infty$ ist h vektormässig:

$$h: \quad \vec{r} = r_1 + t \cdot (r_2 - r_1)$$

Komponentenweise

$$h: \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t$$

und analytisch

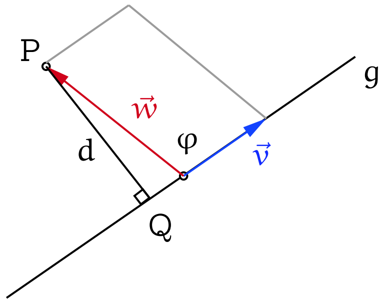
$$h: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (\text{falls } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2, \text{ und } z_1 \neq z_2).$$

24.6 Beispiel Gesucht die Gerade h durch die zwei Punkte $P_1 = (-3, 1, -4)$ und $P_2 = (4, 4, -6)$ komponentenweise. Den ersten Punkt interpretieren wir als Stützvektor und die Richtung ist die Differenz der beiden Ortsvektoren, aöso $\vec{v} = (-7, -3, 2)$. Damit folgt

$$x = -3 - 7t, \quad y = 1 - 3t, \quad z = -4 + 2t,$$

$\triangleleft$

Abstand zwischen Punkt und Gerade



Die Gerade g in Vektorform ist $\vec{r} + t\vec{v}$ (für $-\infty < t < \infty$), und P ist ein Punkt, der nicht auf g liegt. (Denn was wäre sonst der Witz der Sche?) Der Abstand ist die kürzeste Verbindung zwischen dem Punkt und der Geraden. Deshalb steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Geraden g. Aus der Abbildung ist das Parallelogram ersichtlich, das durch den Richtungsvektro $\vec{v}$ und einem beliebigen Vektor $\vec{w}$ mit Aufpunkt P und Anfangspunkt auf g gebildet wird. Ihre Fläche ist $F = |\vec{v} \times \vec{w}|$ und $F = d \cdot v$. Also gilt für den Abstand d:

24.7 Formel Abstand Punkt von Geraden

$$d = \frac{|\vec{v} \times \vec{w}|}{v}$$

24.8 Beispiel Wir bestimmen den Abstand d zwischen der Geraden mit $Q = (-3, 1, -4)$ und $\vec{v} = (7, 3, -2)$ und dem Punkt $P = (1, 1, 1)$. Wir bilden den Vektor $\vec{w}$ als $\overrightarrow{QP} = (1, 1, 1) - (-3, 1, -4) = (4, 0, 5)$. Das Vektorprodukt ergibt sich aus

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

als $(3 \cdot 5, -2 \cdot 4 - 5 \cdot 7, 7 \cdot 0 - (4 \cdot 3))$ und somit $(15, -43, -12)$. Seine Länge beträgt (Pythagoras) $\sqrt{15^2 + 43^2 + 12^2} = \sqrt{225 + 1849 + 144} = \sqrt{2218}$. Jetzt brauchen wir noch die Längen v. Es ist $v = \sqrt{49 + 9 + 4} = \sqrt{62}$. Der Abstand beträgt also

$$d = \frac{\sqrt{2218}}{\sqrt{62}} = \sqrt{\frac{2218}{62}} = \sqrt{35.77} = 5.98$$

Die Abstandsberechnung erfordert etwas Rechenleistung. ◁

Abstand zweier Geraden

Auf Seite 24-8 haben wir die vier Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden im Raum schon aufgezählt. Wenn sie identisch sind, ist der Abstand null. Wenn sie sich schneiden, ist der kleinst Abstand ebenfalls null. Sind sie parallel, haben sie überall denselben Abstand und sind sie windschief, was der häufigste Fall ist, gibt es einen kürzesten Abstand.
Die Fälle identisch und parallel haben gemeinsam, dass die zwei Richtungsvektoren der Gleichung kollinear sind, also $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.
Wir nehem zwei Geraden g und h mit den jeweiligen Vektordarstellun in Parameterform. Man beachte, jede Gerade hat unterschiedliche Parameter, hier s und

t:

$$g: \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad h: \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Schnittpunkt, so erfüllen seine Koordinaten $(x_s, y_s, z_s$ komponentenweise die Bedingungen der zwei Geraden. In der Parameterdarstellung fragt man also noch dem Wertepaar (s, t), das für den Schnittpunkt gilt. Die Bedingungen der Komponenten bilden ein Gleichungssystem für die Unbekannten s und t. Drei Gleichungen für zwei Unbekannte. Wir berechnen diese Werte aus zwei Gleiungen und testen sie an der dritten.

$$\begin{aligned} -1 + 3s &= -3 + t \\ 2 + 2s &= 8 - 3t \\ 1 + s &= -3 + 2t \end{aligned}$$

bringen wir in die Form, unter Weglassung der dritten Gleichung:

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 3s & - & 1t & = & -2 \\ 2s & + & 3t & = & 6 \end{array} \right|$$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix rechnen wir im Kopf als $3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 11$ aus

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ . & \end{vmatrix}$$

Für s ergibt sich

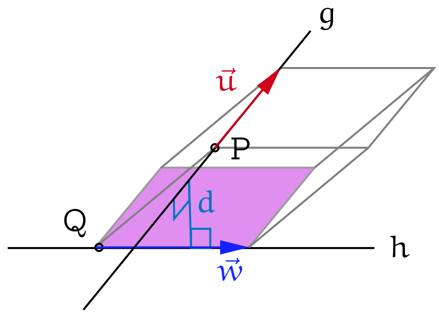
$$s = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{0}{11} = 0.$$

Und für t:

$$t = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{18 + 4}{9} = \frac{22}{11} = 2.$$

Wir testen die Werte $(0, 2)$ an der dritten Gleichung und erhalten $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$. Auch die dritte Gleichung ist erfüllt, die Geraden schneiden sich in $Q = (-1, 2, -1)$. Das war nun zufällig. Wir sollten eine Möglichkeit haben, den allgemeinen Falls zu rechnen, aus dem sich der spezielle auch ergibt.

Wir betrachten das Spat, das durch die zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und einen Verbindungsvektor $\overrightarrow{QP}$ aufgespannt wird. Die Distanz d ist die Höhe zur Grundfläche aus $\vec{u}$ und $\vec{w}$ im Punkt Q. Die Höhe ist bekanntlich für Prismen – und das Parallelepiped ist ein solches – das Verhältnis von Volumen zu Grundfläche. Also folgt:



24.9 Formel Abstand zweier windschiefer Geraden

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \bullet (\vec{w} \times \vec{u})|}{|\vec{w} \times \vec{u}|}$$

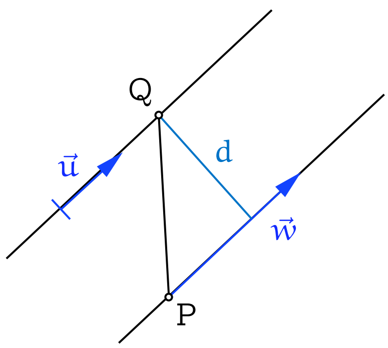
24.10 Übung Wir nehmen die Ausgangslage vom obigen Beispiel. Wir unterscheiden dann zwei Unterbeispiele, (a) genau wie oben und (b) $P = (-1, 2, 1)$ wird durch $P' = (1, 2, 1)$ ersetzt, damit sich die Gerade eben nicht schneiden. P' haben wir willkürlich gewählt, sodass $P \neq P'$. Für beide Varianten brachen wir das Vektorprodukt der Richtungsvektoren

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Daraus folgt $(4 + 3, 1 - 6, -9 - 2 = (7, -5, -11)$. Es ist $\overrightarrow{PQ} = (-2, 6, -4)$ und $\overrightarrow{P'Q} = (-4, 6, -4)$. Das erste Skalarprodukt ergibt $(7, -5, -11) \bullet (-2, 6, -4) = (-14 - 30 + 44) = 0$. Schön, wir haben die richtige Distanz von null gefunden, die Geraden schneiden sich.
Für (b) folgt das Skalarprodukt als $(-4, 6, -4) \bullet (7, -5, -11) = -28 - 30 + 44 = -14$. Wir brauchen noch die Länge von $= \vec{u} \times \vec{w} = (7, -5, -11)$. Diese beträgt $\sqrt{49 + 25 + 121} = \sqrt{175}$. Die Distanz der der beiden Geraden ist:

$$d = \frac{14}{\sqrt{175}} = 1.06$$

Die Formel ist auch für sich schneidende Geraden richtig. $\triangleleft$



Was ist aber mit parallel Geraden? Dann ist genau $\vec{u} \times \vec{u} = 0$. Wenn also $\vec{w} = k \cdot \vec{u}$, dann kann man die Fläche des Parallelogramms durch die Seitenlänge des Richtungsvektors, auf der die Distanz als Lot steht dividieren. Also

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{w}|}{w}.$$

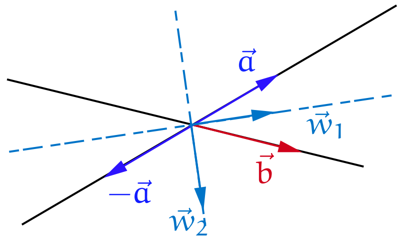
Zusammenfassend lautet die Strategie zur Bestimmung des Abstands zweier Geraden:

(1) Finde heraus, ob die Richtungsvektoren parallel (kollinear) sind,

(2) wenn ja, bestimme Fläche des Vektorprodukts und teile durch Seitenlänge, wenn nein

(3) berechne Spatvolumen und dividiere durch Fläche.

Winkelhalbierende



Wir suchen die Bestimmung der Winkelhalbierenden zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Es gibt zwei davon, nämlich die des spitzen Winkels $\vec{w}_1$ und die des stumpfen Winkels $\vec{w}_2$. Die Grundüberlegung ist, die zwei Richtungsvektoren auf Einheitslänge zu stauchen, also $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$ und $\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{b}$ und sie einfach zum neuen Richtungsvektor zu addieren. Der Richtungsvektor $\vec{w}_1$ ist eine Linearkombination der zwei Einheitsvektoren in der Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{w}_1 = t \cdot \vec{e}_a + t \cdot \vec{e}_b$.

24.11 Formel Winkelhalbierende zweier Vektoren Die Richtungsvektoren der zwei Winkelhalbierenden sind

$$w_1 : \qquad \vec{w}_1 = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$$

und

$$w_2 : \qquad \vec{w}_2 = \frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{b}}{b}$$

24.12 Übung Es sind zwei Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 3)$ und $\vec{b} = (2, 1, -1)$ gegeben. Die dazugehörigen Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_b = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

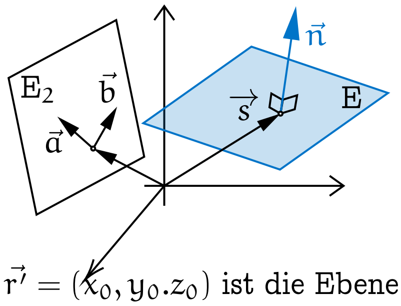
Daraus folgen die Winkelhalbierenden

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} + 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{10} - 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} - 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{10} + 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

◁

24.4.3 Ebenen

Ebene durch Punkt mit Normalenvektor



Die Eben haben wir vektormässig schon auf Seite 24-8 definiert als

$$E: \quad \vec{s} + k\vec{u} + m\vec{v} \qquad \text{mit } k, m \in \mathbb{R}.$$

Der Normalenvektor n steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{w}$ und ist kollinear mit $\vec{u} \times \vec{w}$. Mit der Angabe des Normalenvektor und eines Aufpunkts P mit Ortsvektor $\vec{r'} = (x_0, y_0.z_0)$ ist die Ebene definiert. Denn jeder Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ auf der Ebene, der nicht $\vec{r'}$ ist, erfüllt die Bedingung $\vec{n} \bullet (\vec{s} - \vec{r}) = 0$. Damit lautet die analytische Darstellung der Ebene:

$$E: \qquad \vec{n} \bullet (\vec{s} - \vec{r}) = n_1(x_0 - x) + n_2(y_0 - y) + n_3(z_0 - z) = 0$$

oder wenn man die bestimmten Terme zusammenfasst:

$$E: \qquad n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + d = 0$$

Also, kurz und bündig:

Satz 24.1. Eine Ebene mit einem Punkt (x_0, y_0, z_0) und einem Normalenvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, der nicht der Nullvektor ist, erfüllt die Vektorgleichung

$$E: \qquad \vec{n} \bullet (\vec{r} - \vec{r_0})$$

Wichtig 3. Man sollte auch die Form $\vec{n} \bullet r = \vec{n} \bullet r_0$ memorisieren. $\vec{r} = (x, y, z)$ ist der allgemeine Vektor und $\vec{r}_0$ ist ein Punkt in der Ebene. ⊣

Alternativ gilt für die Ebene auch:

Satz 24.2. Eine Ebene E besitze einen Stützvektor $\vec{s}$, zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ in der Ebene und den Normalenvektor $\vec{n}$. Dann kann man die Ebene darstellen verktormässig als

$$E: \qquad \vec{s} + k\vec{u} + m\vec{v}$$

24.3 Übung Bestimme die Ebene E, die den Punkt $P = (-3, 1, 3)$ enthält und den Normalenvektor $\vec{n} = (2, 4, 8)$ aufweist. Das Resultat ist sehr einfach, unter Verwendung der Normalenform der Ebene: Die Punkte (x, y, z) liegen in der Ebene

$$2(x + 3) + 4(y - 1) + 8(z - 3) = 0$$

Dies ist aequivalen mit

$$\begin{aligned} 2(x + 3) + 4(y - 1) + 8(z - 3) &= 0 \\ 2x + 4y + 8z + (6 - 4 - 8 \cdot 3) &= 0 \\ 2x + 4y + 8z &= 22 \end{aligned}$$

Wir wollen die z-Komponente des Vektors $c = (1, 5, z)$ bestimmen, so dass c in der Ebene E liegt. Einsetzen führt zur Gleichung

$$2 + 20 + 8z = 22 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0.$$

Der Normalenvektor bestimmt die Koeffizienten und der Punkt die Konstante. ◁

Definition 20. **(Normalform der Ebene)** Wir nennen folgende Gleichung die *Normalform* der Ebene

$$E: \qquad ax + by + cz + d = 0$$

Anmerkung 24.4. Man beachte den Zusammenhang von Normalform und Vektorform:

$$\underbrace{ax + by + cz}_{\vec{n} \bullet \vec{r}} + \underbrace{d}_{-\vec{n} \bullet \vec{r}_0} = 0$$

Die vorangehende Gleichung hat folgende Normalform: $2x + 4y + 8z - 22 = 0$.
In der Form $2x+4y+8z-22 = 0$ ist der erste Teil $2x+4y+8z = \vec{n}\vec{r}$ und der zweite Teil $22 = -\vec{n}\vec{r}_0$ eines Punktes in der Ebene.

Ebene aus drei nicht-kollinearen Punkten

Drei Punkte, die nicht alle kollinear sind, d.h. nicht auf einer Geraden liegen, bilden eine Ebene im Raum. Wenn sie kollinear wären, dann gäbe es unendlich viele Ebnen mit diesen drei Punkten. Wir nehmen drei Punkte an, P, Q und R mit den Ortsvektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$. Aus zwei beliebigen der drei berechnen wir einen Normalenvektor $\vec{n} = (\vec{p} - \vec{r}) \times (\vec{q} - \vec{r})$. Mit dem dritten schreiben wird dann für die Ebene E: $\vec{n} \bullet \vec{r} = 0$. Die Ebene aus drei Punkten ist

24.5 Formel Ebene aus drei Punkten

$$\big((\vec{p} - \vec{r}) \times (\vec{q} - \vec{r})\big) \bullet \vec{r} = 0$$

24.6 Beispiel Wir suchen die Gleichung der Ebene E, welche aus den drei Punkten (Ortsvektoren) $\vec{p} = (2, 1, 3)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$ and $\vec{r} = (3, 2, 1)$ gebildet wird. Wir besimmen das Vektorprodukt als Normalenvektor:

$$\begin{vmatrix} 2-3 & 1-3 \\ 1-2 & -1-2 \\ 3-1 & 2-1 \\ 2-3 & 1-3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad (-1+6, -4+1, 3-2) = (5, -3, 1)$$

Damit haben wir $\vec{n}$. In die Normalform der Ebene eingesetzt mit $\vec{r}$ folgt:

$$E: \qquad 5(x-3) - 3(y-2) + (z-1) + d = 0$$

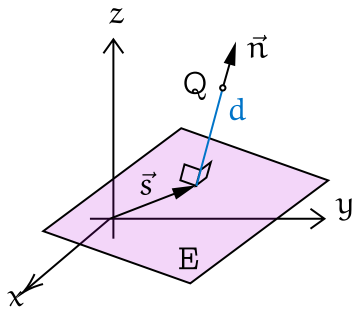
und damit

$$E: \qquad 5x - 3y + z + 10 = 0.$$

◁

Abstand eines Punktes von der Ebene

Wir kennen einen Punkt Q, der nicht auf der Ebene liegt und die Ebene E. Die Ebene kann auf vektormässig auf zwei Arten beschrieben sein, d.h. $\vec{s}$ und $\vec{n}$ oder $\vec{s}$, $\vec{u}$ $\vec{w}$, oder als Gleichung etc.



Somit können wir dieses Problem mit dem vorhandenen Wissen auf mehrer Arten lösen. Zum Beispiel können wir ausgehend von Q dort $-\vec{n}$ ansetzen und mit der Ebene schneiden. Oder einen Punkt P der Ebene bestimmen, die Differenz der Ortsvektoren bilden und mit dem Normalenvektor n das Skalarprodukt bilden. Wir nehmen an, wir kennen die Normalform der Ebene, also $ax + by + cz + d = 0$ und den Punkt $Q = (x_0, y_0, z_0)$. Daraus kennen wir $\vec{n} = (a, b, c)$. Wir nehmen einen Punkt P in der Ebene E an mit $P = (x_1, y_1, z_1)$. Für diesen muss also gelten $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$. Wir setzen $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$. Die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{n}$ bilden einen Winkel φ, sodass der Abstand $D = \cos(\varphi) \cdot r$ sein muss. Wir wissen vom Skalarprodukt, dass gilt $\vec{r} \bullet \vec{n} = \cos(\varphi) \cdot r \cdot n$, oder umgeformt und eingesetzt

$$D = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{n}$$

Die Betragsstriche haben wir eingeführt, weil die Distanz positiv sein soll, unabhängig davon, ob Q sozusagen über der Ebene oder darunter liegt. Wir setzen nun $\vec{r}$ ein und bekommen

$$\begin{aligned}
D &= \frac{|ar_x + br_y + cr_z|}{n} \\
&= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{n} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + z_1)|}{n} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{n} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}$$

Satz 24.7. Es ist $Q = (x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt, der nicht in der Ebene E liegt. E ist gegeben durch die Normalform $ax + bx + cz + d = 0$. Der Abstand D zwischen Q und E ist

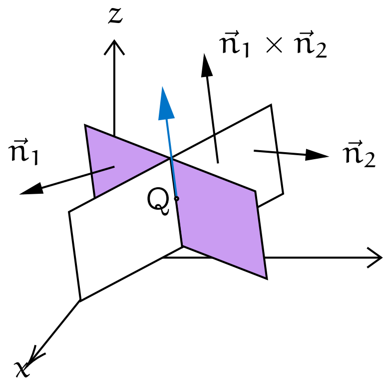
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

24.8 Beispiel Bestimmen wir den Abstand von $Q = (2, 4, -5)$ und der Ebene $5x - 3y + z - 10 = 0$. Es ist $(a, b, c) = (5, -3, 1)$. Einsetzen in die Formel ergibt

$$\begin{aligned}
D &= \frac{|5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 5 - 10)|}{\sqrt{25 + 9 + 1}} \\
&= \frac{|-17|}{\sqrt{35}} \\
&= \frac{17}{\sqrt{35}} = 2.87
\end{aligned}$$

◁

Schnittlinie zweier Ebenen



Zwei Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden g, wenn die Ebenen nicht parallel sind. Wenn sie parallel sind, so sind ihre Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ parallel. Zwei Vektoren sind parallel, wenn $\vec{n_1} \bullet \vec{n_2} = n_1 n_2$ oder $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = 0$.
Die Schnittgerade g ist mengentheoretisch die Menge der Punkte, die sowohl zur Ebene E_1 als auch zur Ebene E_2 gehören. Weil der Vektor $\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$ senkrecht auf $\vec{n_1}$ steht, leigt er in einer Ebene E_1', die parallel zu E_1 ist. Desgleichen ist $\vec{n_2}$ senkrecht auf $\vec{v}$ und liegt somit in einer Ebene E_2', die parallel zu E_2. Damit liegt $\vec{v}$ auf der Schnittgeraden zweier Ebenen E_1' und E_2'. Wir müssen nun noch die richtigen Ebenen wählen, nämlich diejenige, die einen Punkt Q mit Ortsvektor $\vec{r}$ gemeinsam haben. Damit folgt für die Gerage g:

24.9 Formel Schnittgerade zweier Ebenen

$$g: \qquad \vec{r} + t \cdot (\vec{n_1} \times \vec{n_2}) \quad \text{für } -\infty < t < \infty$$

24.10 Beispiel Wir suchen die Schnittgerade der zwei Ebenen E_1 mit $5x-3y+z-10 = 0$ und E_2 mit $2x + 4y - z + 3 = 0$. Sofort erkennen wir die Normalenvektoren $\vec{n_1} = (5, -3, 1)$ und $\vec{n_2} = (2, 4, -1)$. Damit ergibt sich der Vektor $\vec{v}$ als

$$\left|\begin{array}{rr} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Damit kommen wir zum zweiten Teil, dem gemeinsamen Punkt Q. Gemeinsame Punkte erfüllen beide Ebenengleichungen gleichzeitig, d.h.

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z - 10 &= 0 \\ 2x + 4y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Das System von zwei Gleichungen für drei Unbekannte lässt uns die freie Wahl eines Wertes. Da die Ebenen nicht parallel zur x-Achse sind, hat die Schnittgerade eine x-Komponente. Wir wählen $x = 0$, damit die Rechnung einfach wird. Vereinfacht

$$\begin{aligned} -3y + z - 10 &= 0 \\ 4y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir addieren die Gleichungen und erhalten, da das z wegfällt, $y - 7 = 0$ und damit $y = 7$. Damit folgt $z = 10 + 3 \cdot 7 = 31$. Wir haben also ein Q gefunden mit $(0, 7, 31)$.

Damit ist die Schnittgerade g:

$$g: \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 31 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 26 \end{pmatrix}$$

oder komponentenweise

$$x = -t, \quad y = 7 + 7t, \quad z = 31 + 26t, \quad \text{für } -\infty < t < \infty$$

◁

Schnittwinkel zwischen Ebene und Geraden

Die einfachst Berechnung geht vom Winkel zwischen Normalen der Ebene und Richtungsvektor der Geraden aus. Das Skalarprodukti liefert diesen Winkel ϕ. Der Winkel zur Ebene ist der Komplementärwinkel ϑ, also $\vartheta = 90° - \phi$. Es gilt $\cos(\phi) = \sin(90° - \phi)$, deshalb $\sin(\vartheta) = \cos(\phi)$. Damit ist die Formel gefunden.

24.11 Formel Schnittwinkel zwischen Ebene und Geraden

$$\sin(\vartheta) = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{v}|}{n \cdot v}$$

Der Winkel ist $\vartheta = \arcsin(\sin(\vartheta))$.

24.12 Übung Es ist $g : (0, 0, 0) + t(1, 2, 3)$ und $E : x + y + 2z + 3$. Wir berechnen den Zwischenwinkel ϑ. Der Normalenvektor ist $\vec{n} = (1, 1, 2)$. Mit der Formel folgt

$$\sin(\vartheta) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{1+1+4}} = \frac{9}{\sqrt{14 \cdot 6}} = \frac{9}{\sqrt{84}} = 0.982$$

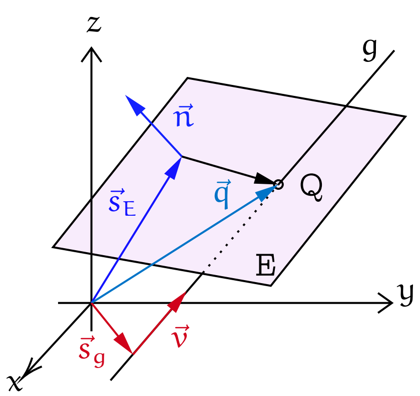
und daraus

$$\arcsin(0.982) = 1.380 = 79.11°$$

(Der dazugehörige stumpfe Winkel ist 169.11°.) ◁

Durchstosspunkt in Ebene

Es wird nach dem Punkt gefragt, in dem eine beliebige Gerade g eine Ebene E durchstösst. Das ist nur dann der Falle, wenn die Gerade nicht parallel zur Ebene ist oder nicht in der Ebene selber liegt. Der Punkt Q mit dem zugehörogen Ortsvektor $\vec{q}$ muss sowohl die Geradengleichung als auch die Ebenengleichung erfüllen.
Die Gerade ist gegeben durch einen Stützvektor $\vec{s}_g$ und den Richtungsvektor $\vec{v}$, somit



$$g: \qquad \vec{s}_g + t \cdot \vec{v}.$$

Die Ebene wiederum sei mit Stützvektor $\vec{s}_E$ und Normalen $\vec{n}$ gegeben. Die Bedingungen lauten somit

$$\vec{q} = \vec{s}_g + t \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{n} \bullet (\vec{q} - \vec{s}_E) = 0$$

Die erste in die zweite einsetzen

$$\vec{n} \bullet (\vec{s}_g + t \cdot \vec{v} - \vec{s}_E) = 0$$

und damit nach ein paar Umstellungen

$$t = \frac{\vec{n} \bullet (\vec{s}_E - \vec{s}_g)}{\vec{n} \bullet \vec{v}}$$

Dies wiederum in die Geradengleichung eingesetzt führt zu folgender allgemeinen Gleichung für $\vec{n} \bullet \vec{v}$

24.13 Formel Durchstosspunkt

$$\vec{q} = \vec{s}_g + \frac{\vec{n} \bullet (\vec{s}_E - \vec{s}_g)}{\vec{n} \bullet \vec{v}} \vec{v}.$$

Anmerkung 24.14. Man könnte auch aus den drei Komponentengleichungen für die Gerade und die Gleichung der Ebene den Parameterwert t berechnen. Das ist aber eher mühsam.

24.15 Übung Es ist die Ebene E gegeben als $x + y + 2z + 5 = 0$ und die Gerade g als

$$g: \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Normalform liefert $\vec{n} = (1, 1, 2)$ und $\vec{n} \bullet \vec{s}_E = -5$, denn $x + y + 2z = \vec{n} \bullet \vec{q}$. Wir berechnen $\vec{n} \bullet \vec{s}_g = 1 + 0 + 4 = 5$ und $\vec{n} \bullet \vec{v} = 1 - 1 + 4 = 4$.
Nun setzen wir ein

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-5-5}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◁

24.5 Geschlossene Kurven und Flächen

Wir haben eine Fläche bereits diskutiert, nämlich die Ebene. Es gibt aber noch weitere Flächen, man denke an die Kugel oder Zylinder etc. Eine geschlossene Kurve ist der Kreis oder die Ellipse. Um klar zu machen, dass man die Kurve und nicht den Inhalt meint, spricht man auch von Kreisrand und Kreisfläche.

Definition 21. Falls eine Kurve ganz in einer Ebene liegt, dann nennt man sie *ebene Kurve* andernfalls *Raumkurve*.

24.5.1 Kreis und Kugel

Der Kreis lässt sich mit dem Zirkel mit konstanter Öffnungswinkel zeichnen. Dabei beschreibt der Kreis die Menge der Punkte, die gewählten Mittelpunkt einen festen Abstand aufweisen. Diese Eigenschaft wird der Definition zugrunde gelegt. Wenn man eine Kugel in lauter Scheiben schneidet, so ergeben sich Kreisscheiben mit unterschiedlichem Durchmesser. Die Kugel ist eine Art Verallgemeinerung des Kreises.

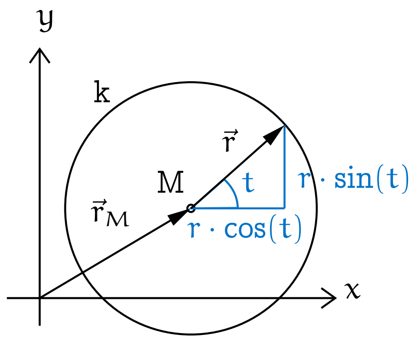
Definition 22. In einer Ebene E ist ein *Kreis* k mit Mittelpunkt $M \in E$ und Radius $r > 0$ die Punktmenge

$$k = \left\{X \in E \mid \overline{MX} = r\right\},$$

Vektoriell

$$k : \qquad (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = r^2 \tag{24.4}$$

Die dritte Darstellung des Kreises ist die Parameterdarstellung der Komponennten. Wie man der Abbildung entnimmt, spielt der Winkel t die Rolle des Parameters. Für den vollen Kreis durchläuft er die Werte $0 \leqslant t < 2\pi$ ($0° \leqslant t < 360°$). Also



$$k : \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

oder mit den Einheitsvektoren

$$k : \qquad \vec{r} = \vec{r}_M + r\cos(t)\vec{e}_x + r\sin(t)\vec{e}_y.$$

Definition 23. Eine *Kugel* ist die Menge der Punkte (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, die von einem Mittelpunkt $M = (x_M, y_M, z_M)$ den festen Abstand r aufweisen,

$$K = \{(x, y, z) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$$

Vektoriell

$$K : \qquad (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = r^2$$

Wichtig 4. Die vektorielle Darstellung von Kreis in $\mathbb{R}^2$ und Kugel in $\mathbb{R}^3$ sind gleich. Den Kreis in der (x, y)-Ebene kann man verstehen als Kugel, die von dieser Ebene geschnitten wird. Die Beschreibung eines Kreises im Raum bedarf deshalb der Angabe der zugehörigen Ebene. Die Form $(\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = r^2$ reicht nicht, um einen bestimmten Kreis in $\mathbb{R}^3$ zu bestimmen. Die Kugel ist die Menge unendlich vieler Kreise. ⊣

Die Formel für die Kugel $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ kann man ausmultiplizieren und erhält nach Umgruppieren:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2.$$

Die Gleichung kann man als folgende Form verstehen:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Anmerkung 24.1. Diese Gleichung gilt für alle Kugeln, aber umgekehrt gilt nicht, dass Figuren, die diese Gleichung erfüllen, Kugeln sein müssen.

Von der ausmultiplizierten Form gelangt man, zwar nicht immer, zur vektoriellen Darstellung durch quadratisches Ergänzen.

24.2 Übung Wir untersuchen die Gleichung $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 4y - 16z + 10 = 0$ und fragen uns, ob es eine Kugel darstellt. Als erstes vereinfachen wir, indem wir durch 2 teilen, d.h.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 5 = 0$$

Wir gruppieren die Variablen

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + (z^2 - 8z + 16) - 16 + 5 = 0$$

und gelangen durch Bilden der Quadrate zu

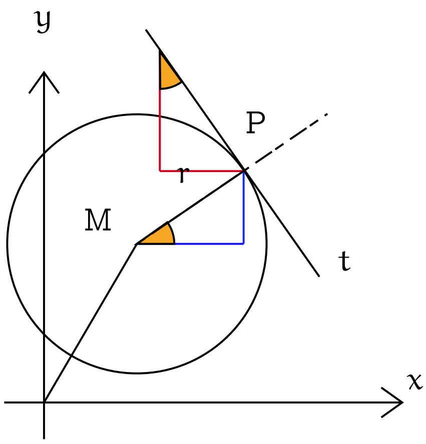
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$$

Es handelt sich also um eine Kugel. Stünde anstatt 16 zum Beispiel 0 oder -5, auf der rechten Seite, die ja den Radius im Quadrat darstellt, so wäre es keine Kugel.

◁

Tangente an Kreis

Die Bestimmung der Tangente am Kreis in der $x - y$-Ebene ist ein Standardproblem. Gemäss Abbildung suchen wir die Gerade, welche den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius R im Punkt P berührt.



Der Kreis ist $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$. Die Steigung der Geraden zwischen M und P ist

$$m = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M}.$$

Wie man leicht einsieht, ist die Steigung der Tangente der negative Kehrbruch dieser Steigung, also

$$m_t = -\frac{1}{m} = -\frac{x_P - x_M}{y_P - y_M}$$

Allgemein ist die Punkt-Richtungsgleichung der Gerade

$$y = m \cdot x + b.$$

Wir brauchen also nur noch b zu bestimmen.

$$b = y_P - m \cdot x_P$$

Eingesetzt folgt

$$y = m \cdot x + y_P - m \cdot x_P = m(x - x_P) + y_P$$

und

$$y - y_P = -\frac{x_P - x_M}{y_P - y_M}(x - x_P)$$

so dass

$$(y - y_P)(y_P - y_M) = -(x_P - x_M)(x - x_P)$$
$$(y - y_P)(y_P - y_M) + (x_P - x_M)(x - x_P) = 0$$

Wir addieren die Kreisgleichung, linke Seite und rechte Seite von $(y_P - y_M)^2 + (x_P - x_M)^2 = r^2$ und erhalten

$$(y - y_P)(y_P - y_M) + (x_P - x_M)(x - x_P) + (y_P - y_M)^2 + (x_P - x_M)^2 = r^2$$

Nun setzen wir die Klammern anders

$$(y - y_P + y_P - y_M)(y_P - y_M) + (x_P - x_M)(x - x_P + x_P - x_M) = r^2$$

und schlussendlich

$$(y - y_M)(y_P - y_M) + (x - x_M)(x_P - x_M) = r^2$$

Für einen Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung folgt

$$yy_P + xx_P = r^2. \tag{24.5}$$

24.3 Formel Tangente an Kreis Für die Tangente an den Kreis in $\mathbb{R}^2$ gilt

$$t_k : \qquad (y - y_M)(y_P - y_M) + (x - x_M)(x_P - x_M) = r^2$$

Schnitt Kreis von Gerade

Diese Aufgabe ist besonders einfach, aber rechnerisch mühsam. Denn man braucht nur die Geradengleichung $y = mx+b$ in die Kreisgleichung $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2 = r^2$ einzusetzen. Also

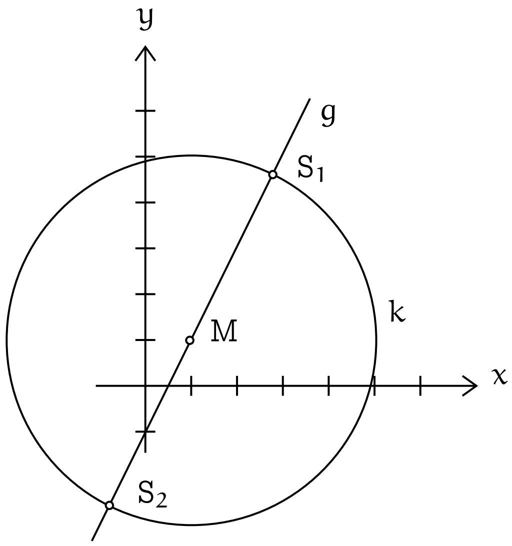
$$(x - x_M)^2 + (mx + b - y_M)^2 = r^2 \tag{24.6}$$

Nächster Schritt

$$x^2 - 2xx_M + x_M^2 + m^2x^2 + 2mx(b - y_M) + (b - y_M)^2 = r^2$$
$$(1 + m^2)x^2 + 2\big(m(b - y_M) - x_M\big)x + x_M^2 + (b - y_M)^2 - r^2 = 0$$

Nun setzten wir $a = 1 + m^2$, $b = 2\big(m(b - y_M) - x_M\big)$ und $c = x_M^2 + (b - y_M)^2 - r^2$ und holen die Mitternachtsformel heraus, d.h.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



24.4 Übung Der Kreis $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ und die Gerade $y = 2x - 1$ sollen sich schneiden. Die Zwischenwerte sind $a = 1 + 4 = 5$, $b = 2(2(-1-1) - 1) = -10$ und $c = 1 + (-1-1)^2 - 16 = -11$. Daraus folgt

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 5 \cdot (-11)}}{10} \approx 1 \pm 1.79,$$

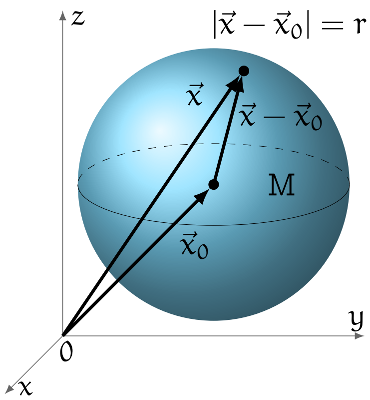
also $x_{1,2} = \{2.79, -0.79\}$ und damit die y-Werte $y_{1,2} = \{4.58, -2.58\}$.

24.5 Anmerkung. Der Schnitt zweier Kreise funktioniert nach derselben Überlegung.

◁

Kreis im Raum**

Da die Kreisgleichung im Raum nicht alleine von der Abstandsgleichung festgelegt wird, kann man die Parametergleichung aus $\mathbb{R}^2$ heranziehen, und die zwei Einheitvektoren durch zwei orthogonale in der Ebene des Kreises ersetzen, also.



$$k \in \mathbb{R}^3: \qquad \vec{r} = \vec{r}_M + r\cos(t)\vec{e}_u + r\sin(t)\vec{e}_v$$

mit $\vec{e}_u \bullet \vec{e}_v = 0$. Es gibt also unendlich viele Paare von Einheitsvektoren in der Ebene.
Wir prüfen für die Parametergleichung, ob sie der Vektorgleichung gehorcht. Dazu setzen wir in die Gleichung die Paramterwerte ein

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}_M)^2 &= (r\cos(t)\vec{e}_u + r\sin(t)\vec{e}_v)^2 \\ &= r^2\cos(t)^2\vec{e}_u \bullet \vec{e}_u + 2r^2\cos(t)\sin(t)\vec{e}_u \bullet \vec{e}_v + r^2\sin(t)^2\vec{e}_v \bullet \vec{e}_v\end{aligned}$$

Da $\vec{e}_u \bullet \vec{e}_v = 0$ gilt und

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_i = 1$$

folgt

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_M)^2 &= r^2\cos(t)^2 + r^2\sin(t)^2\\ &= r^2(\cos(t)^2+\sin(t)^2)\\ &= r^2\end{aligned}$$

24.6 Übung Wir wollen den Kreis mit Radius r bestimmen, dessen Mittelpunkt $M = (1, 2, 3)$ ist und in $E : -x + 2y - 2z + 3 = 0$ liegt. Schnell ist kontrolliert, dass M und E liegt $(-1 + 4 - 6 + 3 = 0)$. Wir wählen einen zweiten Punkt in der Ebene, am einfachsten $(3, 0, 0)$, indem wir $z = 0$ und $y = 0$ setzen und x ausrechnen aus $-x + 3 = 0$. Ein Vektor in der Eben haben wir also, nämlich $\vec{u} = \overrightarrow{OM} - (3, 0, 0) = (-2, 2, 3)$. Daraus wird

$$\vec{e}_u = \vec{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+4+9}} = \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}$$

Der zweite orthogonale Vektor in der Ebene folgt aus $\vec{v} = \vec{n}\times\vec{u}$.

$$\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\\ -2 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix} \quad\Rightarrow\begin{pmatrix}10\\7\\2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\vec{e}_v=\frac{1}{\sqrt{153}}\begin{pmatrix}10\\7\\2\end{pmatrix}$$

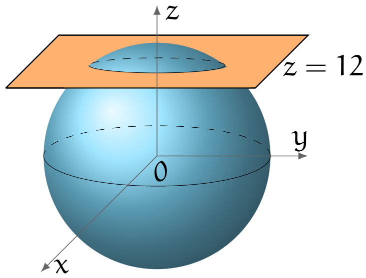
Damit folgt die Gleichung für diesen Kreis als

$$k: \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cos(t)\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} + r\sin(t)\frac{1}{\sqrt{153}}\begin{pmatrix}10\\7\\2\end{pmatrix}.$$

◁

Schnitt einer Ebene mit Kugel

Im vorangehenden Abschnitt haben wir schon herausgefunden, dass ein Kreis im Raum neben der Kugelgleichung noch Eigenschaften der Ebene braucht. Prinzipiell schneidet man Ebene und Kugel, indem man die Variablen der einen Gleichung in die andere einsetzt. Als triviales Beispiel schneiden wir die Kugel $K : x^2 + y^2 + z^2 = 169$ mit der Ebene $z = 12$, wie in der Abbildung dargestellt.



Also $z = 12$ eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 12^2 &= 169 \\ x^2 + y^2 &= 169 - 144 = 25 = 5^2 \end{aligned}$$

Das ist ein Kreis mit Radius 5. Ein allgemeineres Problem betrachten wir nun.

24.7 Übung Die Kugel $K : x^2 + y^2 + z^2 = 144$ soll mit der Ebene $x + 2y - z + 5 = 0$ geschnitten werden. Wir wählen z als zu ersetzende Variable, $z = x + 2y + 5$ und setzten ein:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (x + 2y + 5)^2 &= 144 \\ x^2 + y^2 + x^2 + 4y^2 + 25 + 2xy + 5x + 10y &= 144 \\ 2x^2 + 5y^2 + 5x + 10y + 2xy &= 119 \end{aligned}$$

Je zwei Terme kann man quadratisch ergänzen, $2x^2 + 5x = 2(x + 1.25)^2 - 2 \cdot 1.25^2$ und $5(y^2 + 2y) = 5(y + 1)^2 - 5$. Damit

$$2(x + 1.25)^2 + 5(y + 1)^2 + 2xy = 119 + 5 - 3.125$$

Das ist keine Standardform des Kreises (sondern eine Ellipse). Besonders störend ist der Term $2xy$, den man nicht wegbringt. Wenn wir eine Kreisformel erhalten wollen, müssen wir die Koordinaten transformieren, wie wir es oben schon gemacht haben. Wir suchen zwei Einheitsvektoren in der Schnittebene, in der dann ein Kreis auftauchen muss. Wir kennen einen Normalenvektor der Ebene $n = (1, 2, -1)$. Zwei Punkte bestimmen wir aus der Gleichung der Ebene, indem wir $(0, 0, z)$ wählen und $z = 5$ erhalten und $(x, 0, 0)$ wählen und daraus $(-5, 0, 0)$. Ein Vektor in der Ebene ist also die Differenz dieser zwei Ortsvektoren $(0, 0, 5) - (-5, 0, 0) = (5, 0, 5)$. Wir setzen $\vec{u} = (1, 0, 1)$. einen zweiten Vektor in der Ebene ist $\vec{v}$ der senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{n}$ sein soll. Daher $\vec{u} \times \vec{n}$.

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Wir haben also zwei senkrechte Einheitsvektoren in der Kreisebene $\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ und $\vec{e}_v = \frac{1}{3}(-1, 1, 1)$

Den Vektor $\vec{r}$ in die Ebene kann man schreiben als Linearkombination der neuen Koordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\frac{1}{\sqrt{2}} - v\frac{1}{\sqrt{3}} \\ v\frac{1}{\sqrt{3}} \\ u\frac{1}{\sqrt{2}} + v\frac{1}{3} + 5 \end{pmatrix}$$

wobei der letzte Vektor ein Stützvektor der Ebene ist, d.h. ein Punkt, den wir oben bestimmt haben. Nun setzen wir diese Werte für r in die Kugelgleichung ein

$$\begin{aligned}(u\frac{1}{\sqrt{2}} - v\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (v\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (u\frac{1}{\sqrt{2}} + v\frac{1}{3} + 5)^2 &= 144\\ u^2/2 + v^2/3 - \frac{uv}{\sqrt{6}} + v^2/3 + u^2/2 + v^2/3 + 25 + \frac{uv}{\sqrt{6}} + \frac{5u}{\sqrt{2}} + \frac{5v}{\sqrt{3}} &= 144\\ u^2 + v^2 + \frac{5u}{\sqrt{2}} + \frac{5v}{\sqrt{3}} &= 119\end{aligned}$$

Quadratisches Ergänzen ergibt

$$(x + \frac{5}{2\sqrt{2}})^2 - \frac{25}{8} + (y + \frac{5}{2\sqrt{3}}) - \frac{25}{12} = 119$$

Und letztlich

$$(x + \frac{5}{\sqrt{8}})^2 + (y + \frac{5}{\sqrt{12}}) = 119 + \frac{125}{24}$$

Es gibt unendlich viele Einheitsvektoren und Stützvektoren. Unsere Lösung ist eine davon. Was aber bei allen diesen Gleichungen gleich sein muss ist die Struktur als Kreisgleichung und der Radius des Kreises. $\triangleleft$

Gerade durch Kugel

Wir such den nach den Durchstosspunkten einer Geraden durch eine Kugel. Es gibt drei Fälle zu unterscheiden:

(1) die Gerade hat zwei Durchstosspunkte,

(2) die Gerade berührt die Kugel in einem Punkt (Tangente),

(3) die Gerade schneidet die Kugel überhaupt nicht (Passante).

Die Lösung findet man, indem man die Geradenpunkte den Punkten der Kugel einsetzt. Wir nehmen die Gerade $x = 3 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 - t$ in Parameterform und die Kugelgleichung

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$$

und setzen ein

$$\begin{aligned}(3 + t - 2)^2 + (1 + 2t + 1)^2 + (3 - t - 4)^2 &= 16\\ (t + 1)^2 + (2t + 2)^2 + (-t - 1)^2 &= 16\\ 6t^2 + 12t - 10 &= 0\\ t^2 + 2t - 10/6 &= 0\end{aligned}$$

Wir erhalten eine quadratische Gleichung für den Parameter t. Hier sehen wir auch, dass es höchstens zwei, vielleicht eine oder kein Lösung gibt. Quadratische Ergänzen führt zu

$$(t + 1)^2 - 1 - 10/6 = 0$$

und von hier

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{16}{6}} - 1 = \pm\frac{4}{\sqrt{6}} - 1$$

Wenn man die zwei Paramterwerte in die Koordinatengleichungen der Geraden einsetzt, so resultieren die zwei Punkte

$$\left(2+\frac{4}{\sqrt{6}}, -1+\frac{8}{\sqrt{6}}, 4-\frac{4}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{und} \quad \left(2-\frac{4}{\sqrt{6}}, -1-\frac{8}{\sqrt{6}}, 4+\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$$

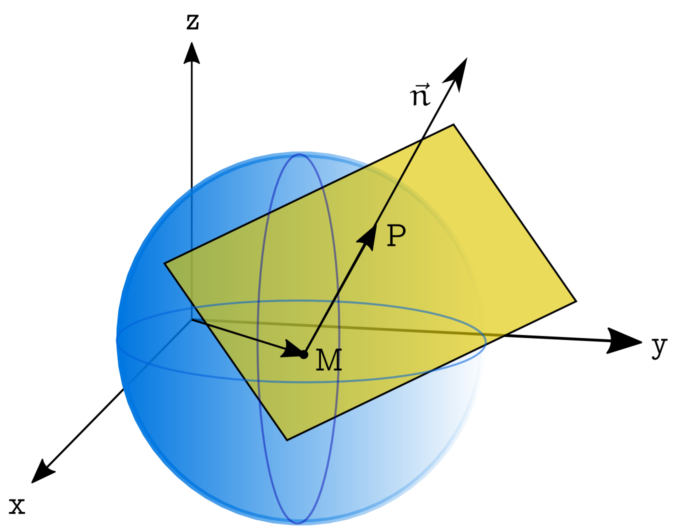
Tangentialebene

Die Berührende an der Kugel ist eine Ebene. Zu ihrer Berechnung benötigt man die Beschreibung der Kugel und den Punkt auf der Kugel, an dem die Tangentialebene gesucht ist.
Wir kennen also die Kugelgleichung $K : (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = R^2$ und einen Punkt P. der Normalenvektor durch den Punkt P ist kollinear zum Vektor $\vec{n} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - \vec{r}_M = \vec{r}_P - \vec{r}_M$. Wir kennen also einen Punkt der Ebene und den Normalenvektor. Damit folgt

$$E_T : \qquad (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) = 0$$

Diese Gleichung kann man umformen, wenn man will

$$\begin{aligned}
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) &= 0 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P + \vec{r}_M - \vec{r}_M) &= 0 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) - (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_M) &= 0 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) &= (\vec{r}_P - \vec{r}_M)^2 \\
(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) &= R^2
\end{aligned}$$



24.8 Formel Tangentialebene an Kugel Die Tangentialebene in P an die Kugel $(\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = R^2$ ist

$$E_T : \qquad (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) = 0$$

oder

$$E_T : \qquad (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) = R^2$$

Anmerkung 24.9. Die Formel kann man natürlich auch analytisch schreiben:

$$(x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) + (z_P - z_M)(z - z_M) = R^2.$$

Die zweite Gleichung der Tangentialebene kann man auch folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned}(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet (\vec{r} - \vec{r}_M) &= R^2 \\ \vec{r}_P \bullet \vec{r} &= R^2 + (\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet \vec{r}_M\end{aligned}$$

24.10 Übung Wir haben $M = (1, -2, 4)$, $R = 6$ und $P = (5, 2, 6)$. Daraus folgt

$$\vec{r}_P - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt rechnen wir das Skalarprodukt der rechten Seite aus

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_M) \bullet \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 - 8 + 8 = 4$$

und schreiben die Ebene in Normalform

$$4x + 4y + 2z = 6^2 + 4 = 40$$

oder schöner

$$2x + 2y + z - 20 = 0.$$

◁

Schneiden zweier Kugeln

Zwei sich schneidenden Kugel, die nicht notwendigerweise den gleichen Radius haben müssen, schneiden sich in einem Kreis. Sie können sich auf berühren oder auch nicht, oder ineinander enthalten sein.

24.11 Übung Wir untersuchen die zwei Kugeln $K_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 24$ und $K_2 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 12$. Wir müssen eine Beschreibung der Punkte (x, y, z) finden, die beide Gleichungen erfüllen. Wir bestimmen die Differenz der beiden Gleichungen – ein Standardverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen – und erhalten

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + y^2 + (z-2)^2) &= 24 - 12 \\ z^2 - (z^2 - 4z + 4) &= 12 \\ 4z &= 16 \\ z &= 4\end{aligned}$$

Diesen Wert können wir in eine der Kugelgleichungen einsetzen und erhalten

$$x^2 + y^2 = 24 - 4^2 = 8.$$

Der Mittelpunkt ist $M = (0, 0, 4)$. ◁

24.5.2 Kreiszylinder**

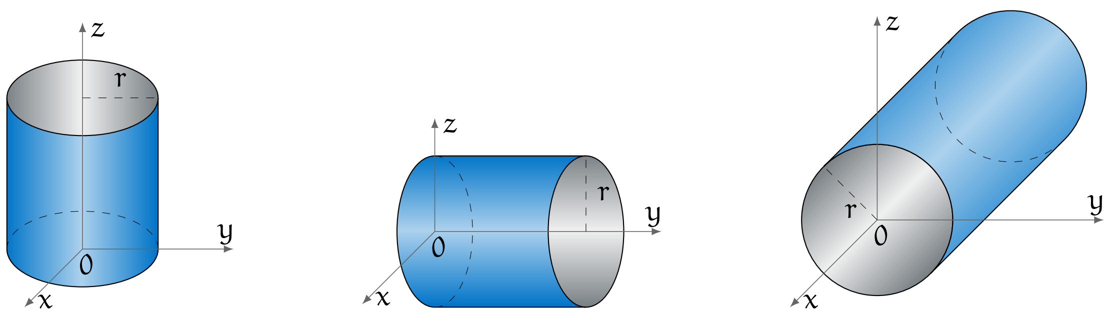
Eine logische Fortführung des Kreises ist der räumliche Körper genannt Kreiszylinder. Seine Grundfläche (oder Schnitt) ist ein Kreis. Beim geraden Zylinder ist die Normale der Kreise kollinear zur Zylinderachse. Wir betrachten hier nur den geraden Kreiszylinder.
Seine Beschreibung ergibt sich als Kreis in einer Koordinateneben und in einem Intervall der Koordinate der Achse. Nehmen wir also zuerst die $x-y$-Ebene und die Achse in z-Richtung, so stellt sich die Mantelfläche dar als

$$\mathsf{Z}: \qquad \vec{r} = \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ z \quad \text{beliebig} \end{cases}$$

In Parameterdarstellung

$$\mathsf{Z}: \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ z \end{pmatrix}$$

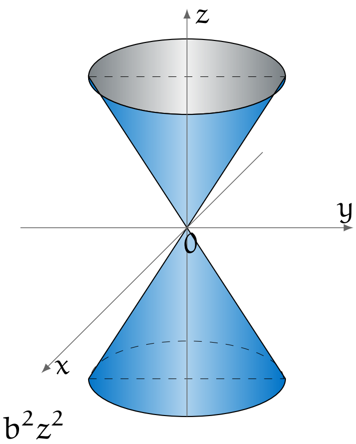
für $0 \leqslant t < 2\pi$.
Durch zyklisches Vertauschen erhält man die zwei anderen Zylinder in den $x-z$- und $y-z$-Ebenen (siehe Abbildung).
Schneidet man einen geraden Zylinder mit einer Ebene, so ergeben sich als Spur entweder Kreise (Ebene normal zu Achse), Ellipsen (Ebene nicht normal zur Achse) oder zwei Geraden (Ebene parallel zur Achse).



24.5.3 Kegel

Der gerade Kegel ist dem Zylinder sehr ähnlich, nur in einer Koordinate unterscheidet er sich. Wir nehmen die Paramterdarstellung des Zylinders und ändern den Wert des Radius, der nun eine lineare Funktion der Höhe s ist.

$$\mathsf{Ke}: \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + b\cdot s)\cos(t) \\ (a + b\cdot s)\sin(t) \\ s \end{pmatrix}$$



Die analytische Gleichung dazu ergibt sich durch eliminieren der Parameter s und t. In einem ersten Schritt ersetzt man s durch z. Dann quadriert man x- und y-Komponente und addiert die zwei Gleichungen. Daraus folgt

$$x^2 + y^2 = (a + bz)^2 \cos(t)^2 + (a + bz)^2 \sin(t)^2$$

Da $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ folgt

$$x^2 + y^2 = (a + bz)^2 = a^2 + 2abz + b^2z^2$$

Läge die Spitze des Kegels im Ursprung, so wäre $a = 0$. Für diese vereinfachte Situation folgt:

$$x^2 + y^2 - b^2z^2 = 0$$

Der Parameter b steuert den Öffnungswinkel des Kegels.

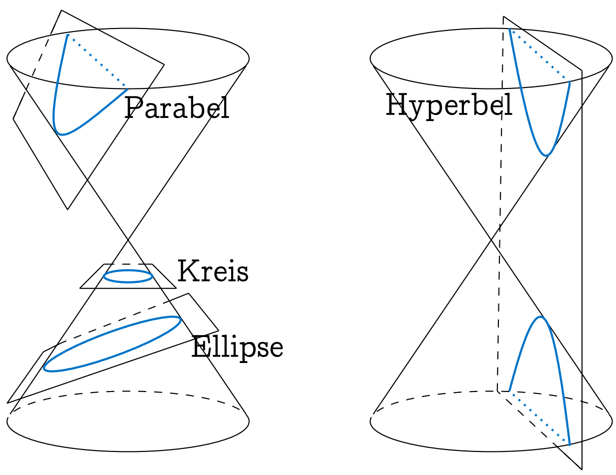
Anmerkung 24.1. Es sollte aufgefallen sein, dass wir verschieden Figuren beschrieben haben und dabei typischerweise quadratische Bestimmungsgleichungen aufgetaucht sind. Wir werden noch besser sehen, dass es eine ganze Familie von Kurven und Flächen gibt, die aus der allgemeinen quadratischen Bestimmungsgleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

hervorgehen. Dies sind Kurven und Flächen zweiter Ordnung. So benannt wegen des quadratischen Terms. In dieser Gleichung sind z.B. ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene, ein Kreis, eine Kugel, der Zylinder und der Kegel enthalten.

Der Kegel hat äusserst interessante eben Schnittkurven.

24.5.4 Kegelschnitte, Kurven zweiter Ordnung*

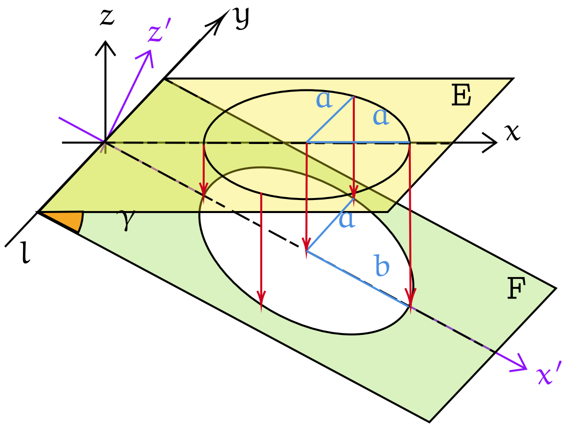


Zur Erzeugung von Kegelschnitten kann man sich eine kleine Lampe vorstellen, die eine Schablone mit einem Kreisausschnitt beleuchtet und dabei ein Bild auf eine Wand wirft. Die Schablone dreht man in einer senkrechten Achse zur Achse des Lichtkegels. Ist die Schablone senkrecht, ist das Bild ein Kreis. Dreht man die Schablone, erscheint eine Ellipse. Noch weiter erscheint keine geschlossene Kurve mehr sondern eine Parabel. Und noch weiter erscheint eine Hyperbel. Die Kegelschnitte weisen sogenannte:

- Brennpunkt- und
- Leitlinieneigeschaften

auf.

24.5.5 Die Ellipse



Wie man der Abbildung der Kegelschnitte entnehmen kann, geht die Ellipse aus der zentralen Projektion des Kreises hervor. Ebenso geht sie aus der Parallelprojektion auf eine schiefe Ebene hervor (Schnitt des Kreiszylinders). Die Abbildung ist eine sogenannten *senkrechte Affinität*. Für die Achse x, welche auf l senkrecht steht, wird auf eine Achse x' abgebildet, die auch auf l senkrecht steht. Ein Punkt (x, y) auf E geht über in (x', y) auf F. Es gilt hier

$$(x, y) \mapsto (x \cdot c, y)$$

Wenn man diese Abbildung auf den Kreis anwendet, folgt mit $x = x'/c$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \quad \mapsto \quad \frac{(x - x_M)^2}{c^2} + (y - y_M)^2 = r^2$$

Daraus leiten wir die Definition der Ellipse ab.

Definition 24. Eine *Ellipse* ist eine geschlossene Kurve, die sich als

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$$

darstellen lässt.

Anmerkung 24.1. Die Ellipse mit Mittelpunkt in $(0, 0)$ hat die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

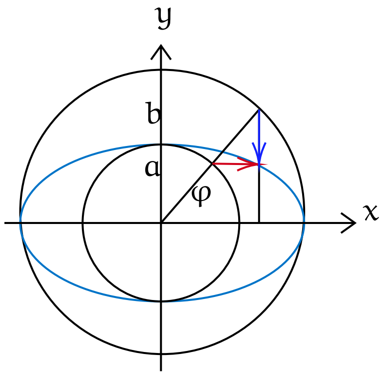
und wird "Mittelpunktgleichung" genannt.

Die Parameterdarstellung ist

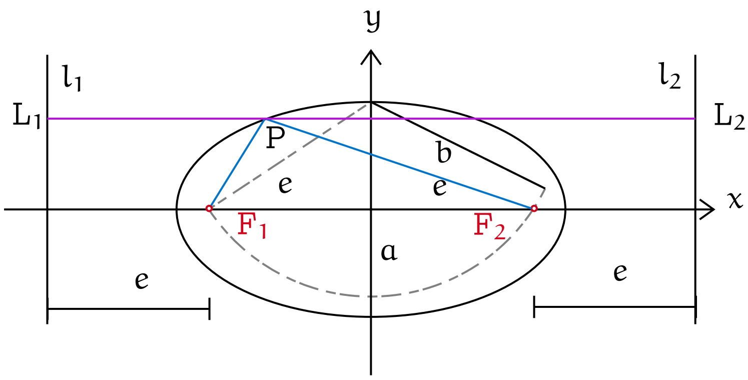
$$e: \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Beim Kreis ist $a = b = r$. Der Kreis ist ein Sonderfall der Ellipse.

Aus der Parametergleichung wird auch klar, wie man eine Ellipse konstruieren könnte. Man zeichnet zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b. Strahlen aus dem Mittelpunkt mit Winkel φ treffen zwei Punkte auf den Kreisen. Die Vertikale des äusseren werden mit der Horizontalen des inneren Punktes verbunden. Nun beschreiben wir ein paar Eigenschaften der Ellipse.



Eigenschaften



Die Ellipse besitzt zwei *Brennpunkte* F_1 und F_2 (F für Focus), die gemäss Abbildung den Abstand vom Mittelpunkt, hier *lineare Exzentrizität* e nach der Vorschrift

$$e^2 = a^2 - b^2$$

bilden.

Definition 25. Die *lineare Exzentrizität* einer Ellipse mit der grossen Hauptachsen a und der kleinen b ist $e^2 = a^2 - b^2$.

Das Verhältnis $\varepsilon = e/a$ nennt man *numerische Exzentrizität* oder Formfaktor der Ellipse.

Es gilt für jeden Punkt P auf einer Ellipse mit der grossen Halbachse a, dass $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

Satz 24.2. Für jeden Punkt P der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 gilt

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Die Herleitung ist ziemlich aufwendig und füllt schnell zwei drei Seiten. Für den ungläubigen Thomas hier die Skizze; die anderen können überspringen. Ausgangslage ist die Darstellung der zwei Strecken als

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$$

Wir skizzieren das Vorgehen, indem wir für die Wurzelterme einfach w_1 und w_2 setzen, und quadrieren. Das gibt $w_1^2 + w_2^2 + 2w_1w_2 = 4a^2$. Sodann stellen wir um und quadrieren nochmals:

$$4w_1^2w_2^2 = (4a^2 - w_1^2 - w_2^2)^2 \tag{24.7}$$

Wir setzen wieder ein und erhalten auf der linken Seite

$$\begin{aligned} 4\big[\big((x-e)^2+y^2\big)\big((x+e)^2+y^2\big)\big] &= 4\big[(x^2-e^2)^2 + y^2((x+e)^2+(x-e)^2)+y^4\big] \\ &= 4\big[(x^2-e^2)^2 + y^2(2(x^2+e^2))+y^4\big] \end{aligned}$$

Wir führen zwei temporäre Variablen ein, die man aus dem Ausdruck erkennnt, $F = x^2 - e^2$ und $E = x^2 + e^2$ und schreiben für die linke Seite L

$$L = 4\big[F^2 + 2y^2E + y^4\big]$$

Als Zwischenrechnung bestimmen wir $w_1^2 + w_2^2 = Q$

$$\begin{aligned} Q &= (x-e)^2 + y^2 + (x+e)^2 + y^2 \\ &= 2x^2 + 2e^2 + 2y^2 \\ &= 2(x^2 + e^2 + y^2) \\ &= 2(E + y^2) \end{aligned}$$

Wir setzen in die rechte Seite von Gl. 24.7 ein und rechnen das Quadrat aus

$$\begin{aligned} R &= (4a^2 - 2(E+y^2))^2 = 4(2a^2 - (E+y^2))^2 \\ &= 4\big[4a^4 - 4a^2(E+y^2) + (E+y^2)^2\big] \\ &= 4\big[4a^4 - 4a^2(E+y^2) + E^2 + 2Ey^2 + y^4)\big] \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir linke und rechte Seite wieder gleich und teilen noch durch 4

$$F^2 + 2y^2E + y^4 = 4a^4 - 4a^2(E+y^2) + E^2 + 2Ey^2 + y^4$$

Gewisse Terme kann man auf beiden Seiten streichen

$$F^2 = 4a^4 - 4a^2(E+y^2) + E^2$$

Wir setzen E und F ein. Der Ausdruck $F^2 - E^2$ wird zu $(x^2-e^2)^2 - (x^2+e^2)^2 = -4x^2e^2$

$$-4x^2e^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2+e^2) - 4a^2y^2$$

Jetzt setzen wir auch $e^2 = a^2 - b^2$ ein und kürzen mit 4

$$-x^2(a^2-b^2) = a^4 - a^2(x^2 + a^2 - b^2) - a^2y^2$$

Jetzt gruppieren wir neu und streichen Terme

$$\cancel{-x^2a^2} + x^2b^2 = \cancel{a^4} - \cancel{a^2x^2} - \cancel{a^4} - a^2b^2 - a^2y^2$$

Nun bringen wir alles auf eine Seite und dividiern durch a^2b^2 und erhalten

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

Das ist unsere Definition der Ellipse. Das war eine echte Kärnerarbeit. Die sogenannte "Gärtnerkonstruktion" setzt zwei Pfähle und bindet eine Schlinge an ihnen fest. Dann schreitet man an der gespannten Schlinge den Rasen ab und beschreibt eine Ellipse.

Definition 26. Die zwei Geraden, die orthogonal zur grossen Achse der Ellipse und zueinander symmetrisch bezüglich des Mittelpunkts der Ellipse im Abstand e/a angeordnet sind, werden *Leitlinien der Ellipse* genannt.

Für die in der Abbildung gezeichnete Leitline l_1 zum Brennpunkt F_1 kann man folgenden Zusammenhang zwischen Leitlinie und Brennpunkt konstruieren.

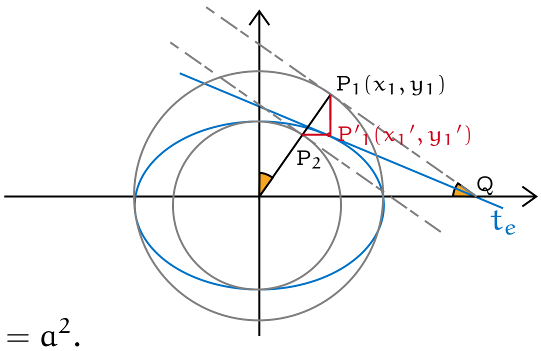
Satz 24.3. Für alle Punkte der Ellipse ist das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie konstant. Für $j=\{1,2\}$

$$\frac{\overline{PF_j}}{\overline{PL_j}}=\varepsilon=\frac{e}{a}.$$

Tangente an Ellipse

Jede Tangente an die Ellipse entspricht einer Tangente an den Haupt- bzw. Nebenkreis, aus der sie aus Stauchung bzw. Dehnung hervorgeht. Wir nehme die Gl. 24.5 von Seite 24-40 hervor.

Hier gilt für den Hauptkreis mit Hauptachse a



$$yy_1+xx_1=a^2.$$

Die Transformation der Koordinten ist

$$x=x' \quad \text{und} \quad y=y'\frac{a}{b}$$

und

$$x_1=x_1' \quad \text{und} \quad y_1=y_1'\frac{a}{b}$$

Setzt man diese transformierten Werte in die Tangentengleichung des Kreises ein, so folgt

$$y'y_1'+x'x_1'=a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1'x'+\frac{a^2}{b^2}y_1'y'=a^2$$

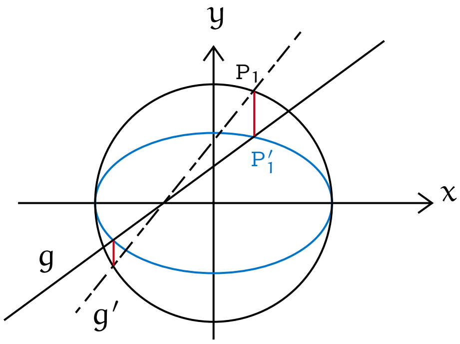
Wir bezeichnen nun die Koordinaten der Punkte der Ellipse mit (x, y). Damit

24.4 Formel Tangente an Ellipse

$$\frac{xx_P}{a^2}+\frac{yy_P}{b^2}=1.$$

Anmerkung 24.5. Die Transformation ist eine *affine Abbildung* der Kreistangente an der Hauptachse.

Schnitt Gerade mit Ellipse



Auch hier wenden wir die affine Abbildung auf Kreis und Gerade an. Wie in Gl. 24.6 auf Seite 24-40 setzen wir die Geradengleichung $mx+c$ ein. Wir wählen hier den Mittelpunkt von Ellipse und Kreis im Ursprung. Damit gilt für den Kreis im Ursprung mit dem Radius a, dem Hauptachsenabschnitt

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$

Anstatt x setzten wir $x = x'$ und anstatt $y = mx + c$ dann $y = (mx + c)\frac{a}{b}$. Damit ergibt sich

$$x^2 + \left((mx + c)\frac{a}{b}\right)^2 = a^2$$

$$x^2 + \left(m^2x^2 + 2mcx + c^2\right)\frac{a^2}{b^2} = a^2$$

Multiplizieren mit b^2 und umsortieren

$$x^2(b^2 + m^2a^2) + x(2mca^2) + c^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

Mit $\alpha = b^2 + m^2a^2$, $\beta = 2mca^2$ und $\gamma = c^2a^2 - a^2b^2$ wenden wir sodann die Mitternachtsformel an, d.h.

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Diese zwei (oder eine oder keine) Lösungen setzen wir dann in die Ellipsengleichung ein und erhalten die entsprechenden $y_{1,2}$-Werte. Da eine Gewinnumformung stattfindet, sind diese Werte an der Geraden zu verifizieren.

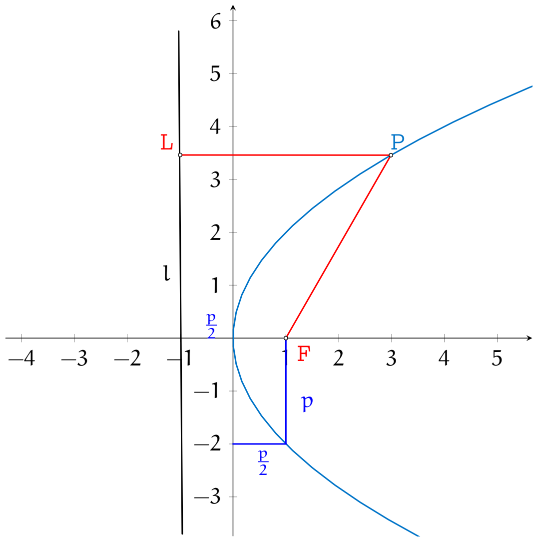
24.5.6 Die Parabel

Die Parabel ist uns schon als Kurve zur quadratische Funktion bekannt, die meist in der Normalform als

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

geschrieben wird. Wir kennen auch die Scheitelform etc. Hier interessieren vor allem die Punkte (x, y), die bestimme Eigenschaften aufweisen.

Die Parabel geht aus der Ellipse hervor, wenn man den Winkel der Schnittebene zur Achse so erhöht, dass die Ebene parallel zum Kegelmantel ist. Dabei bleibt die Eigenschaft von Satz 24.3 auf Seite 24-52 der Ellipse erhalten.



Auch für die Parabel gibt es einen Brennpunkt F und eine Leitlinie l. Legt man eine Gerade parallel zur x-Achse durch einen Punkt P, so schneidet diese die Leitlinie in L. Hier gilt die Beziehung gemäss folgendem Satz.

Satz 24.1. Für die Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l gilt für jeden Punkt P

$$\overline{PF} = \overline{PL}$$

In Analogie zur Ellipse

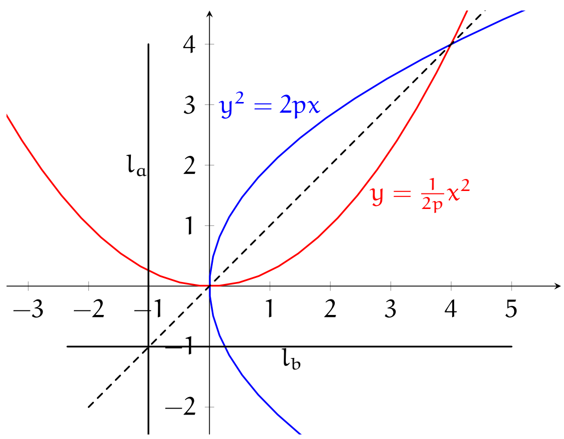
$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} = \varepsilon = 1.$$

Mit dem Abstand von Brennpunkt zu Leitlinie p gilt für jeden Punkt der Parabel

Definition 27. Die Parabelkurve ist gegeben durch

$$y^2 = 2px \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2p}y^2$$

Wir haben von Parabelkurve gesprochen, um die Kurve von der Parabelfunktion zu unterscheiden, die ja in Normalform als $y = ax^2 + bx + c$ geschrieben wird. Die Kurve ist die an der 45°-Achse gespiegelte Funktion. Sowohl Kurve als auch Funktion sind Parabeln. Die Normalform ist $y = ax^2$. Die gespiegelte geht aus der Vertauschung von $x \mapsto y$ et viceversa hervor, also $x = ay^2$.



24.2 Eigenschaften Für die Parabel gilt:

$$y^2 = 2px \quad \text{respektive} \quad x^2 = 2py$$

ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Nullpunkt liegt. Sie ist zur

$$x - \text{Achse} \quad \text{respektive} \quad y - \text{Achse}$$

symmetrisch, ihr Brennpunkt liegt bei

$$x = \tfrac{p}{2} \quad \text{respektive} \quad y = \tfrac{p}{2}$$

und ihre Leitlinie ist

$$x = -\tfrac{p}{2} \quad \text{respektive} \quad y = -\tfrac{p}{2}$$

Im weiteren gilt auch

Satz 24.3. Die durch

$$x = Ay^2 + By + C \quad \text{respektive} \quad y = Ax^2 + Bx + C$$

dargestellte Kurve ist eine Parabel mit dem Scheitel

$$\left(C - \tfrac{B^2}{4A}, \tfrac{B}{2A}\right) \quad \text{respektive} \quad \left(\tfrac{B}{2A}, C - \tfrac{B^2}{4A}\right)$$

deren Symmetrieachse zur

$$x - \text{Achse} \quad \text{respektive} \quad y - \text{Achse}$$

parallel ist.

Denn versucht man die rechte Seite von $x = Ay^2 + By + C$ mit quadratischer Ergänzung zu transformieren, so folgt

$$x = A\left(y + \frac{B}{2A}\right)^2 - A\left(\frac{B}{2A}\right)^2 + C$$

oder äquivalent

$$x - \left(C - \frac{B^2}{4A}\right) = A\left(y + \frac{B}{2A}\right)^2$$

Mit den Transformierten

$$x' = x - \left(C - \frac{B^2}{4A}\right) \quad \text{und} \quad y' = y + \frac{B}{2A}$$

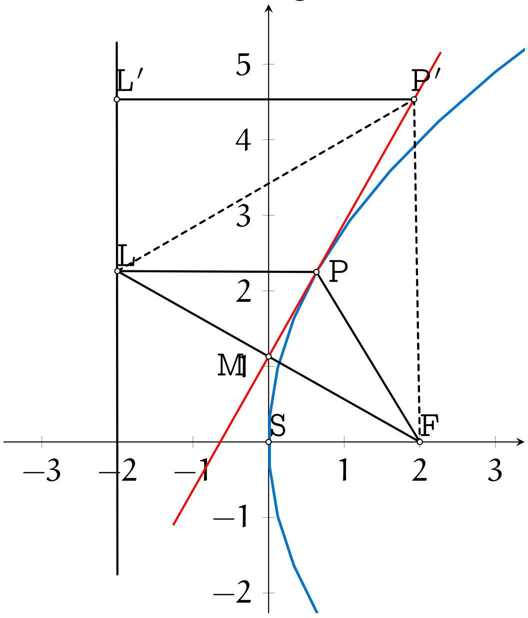
folgt

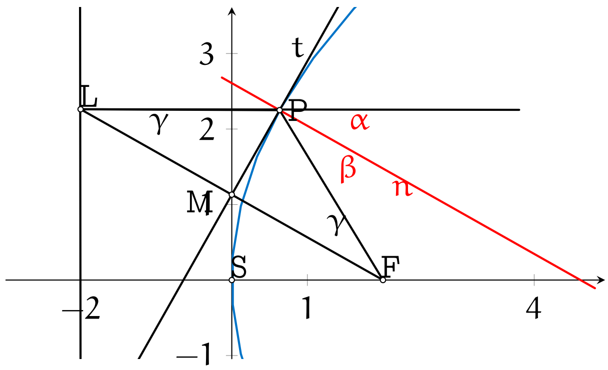
$$x' = A \cdot y'^2$$

Eine Parabel mit Scheitel $x'_s = 0$ und $y'_s = 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Tangente der Parabel

Die Tangente an die Parabel kennen wir natürlich als Ableitung der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ an der Stelle x. Geometrisch ist aber die Tangente auch interessant zu konstruieren. Aufgrund der Tatsache, dass $\overline{PF} = \overline{PL}$ ist (siehe Satz 24.1 auf Seite 24-54), ist $\triangle FPL$ ein gleichschenkliges. Deshalb sind die Winkel $\angle MFP = \angle MLP$. Für einen beliebigen Punkt P' auf der Mittelsenkrechten m gilt $\overline{P'L} = \overline{P'F}$. Denn es ist auch eine gleichschenkliges Dreieck. Nun gilt für alle Punkte P' auf m, dass $\overline{P'L'} < \overline{P'L'}$. Es muss also $\frac{\overline{P'F}}{\overline{P'L'}} > 1$ sein ausser für $P' = P$. Das heisst: alle Punkte auf der Geraden m mit Ausnahme von P liegen ausserhalb der Parabel. Die Gerade m muss also die Tangente sein.





Satz 24.4. Der Fusspunkt M des Lots vom Brennpunkt F auf die Tangente liegt auf der Scheiteltangente.

Nun berechnen wir die Tangentengleichung analytisch. Die Steigung im Punkt $M = (0, y_1/2)$ mit $P = (x_1, y_1)$ ist $m = \frac{y_1}{2x_1}$. Alternativ, mit $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$ dann $m = \frac{p}{y_1}$. Mit der Punkt-Richtungsgleichung folgt die Gerade:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

und

$$yy_1 = p(x - x_1) + y_1^2 = p(x - x_1) + 2px_1 = p(x + x_1)$$

24.5 Formel Tangente an Parabel Die Tangentengleichung an die Parabel lautet

$$t_p: \qquad yy_1 = p(x + x_1)$$

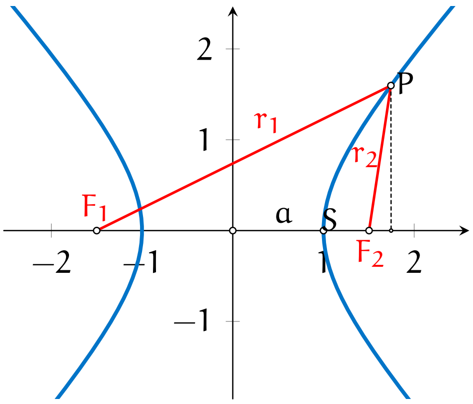
In der Abbildung rechts sehen wir die Normale n, die senkrecht auf der Tangente t steht. Man kann schliessen, dass $\alpha + \beta = 2\gamma$ ist ($\angle LPF = 180 - 2\gamma$) und weiters $\beta = \gamma$ ($\beta + \angle MPF = 90$ und $\angle MPF = 90 - \gamma$). Somit ist dann auch $\alpha = \gamma$ und

$\alpha = \beta$. Es ist also Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel. Physikalisch bedeutet dies, dass eine Lampe im Brennpunkt nach der Reflexion parallele Strahlen produziert. Für die Parabel gilt also

Satz 24.6. Brennstrahl und Parallele zur x-Achse bilden mit der Normalen gleiche Winkel.

Anmerkung 24.7. Durch diesen Satz findet die Bezeichnung Brennpunkt ihre Rechtfertigung.

24.5.7 Die Hyperbel



Die Hyperbel ist die letzte der vier Kegelschnitte. Wiederum handelt es sich um eine Kurve zweiter Ordnung mit $Ax^2 + By^2 + \ldots + J = 0$ und Brennpunkten und Exzentrizität. In der Abbildung kann man festhalten, dass die Strecke $\overline{OS} = a$, vom Ursprung zum Scheitel. Man nennt a die grosse Halbachse, wie gehabt. Die Exzentrizität e ist die Strecke $\overline{OF}$. Somit liegen die zwei Brennpunkte F_1 und F_2 um $2e$ auseinander. Im weiteren sieht man die Strecken r_1 und r_2, welche die Brennpunkte über einen Punkt auf einem Hyperbelast miteinander verbinden. Man nennt sie *Brennstrahle*.

Definition 28. Die Hyperbel ist die Kurve, welche der Gleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ gehorcht.

24.1 Formel Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

24.2 Formel Exzentrizität der Hyperbel

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Satz 24.3. Die Differenz der Brennstrahlen der Hyperbel ist gleich der Hauptachse

$$r_1 - r_2 = 2a$$

Wir behaupten, dass $r_1 - r_2 = 2a$ ist. Mit dem Satz des Pythagoras gilt $r_1^2 = y^2 + (e+x)^2$ und $r_2^2 = y^2 + (e-x)^2$. Die Differenz der Quadrate ist, wobei wir die Formel $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ anwenden,

$$r_1^2 - r_2^2 = (e+x)^2 - (e-x)^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 2a \cdot (r_1 + r_2)$$
$$\frac{4ex}{2a} = r_1 + r_2$$

Dieser Summe addieren wir die Behauptung

$$r_1 + r_2 + (r_1 - r_2) = \frac{4ex}{2a} + 2a = 2r_1$$

Daraus ergibt sich für r_1

$$r_1 = \frac{ex}{a} + a$$

Dieses Resultat setzen wir in die Gleichung der Länge $r_1^2 = y^2 + (e+x)^2$ ein und erhalten

$$(\frac{ex}{a} + a)^2 = y^2 + (e^2 + 2ex + x^2) = \frac{e^2x^2}{a^2} + 2ex + a^2$$

und damit, unter Verwendung von $b^2 = e^2 - a^2$

$$y^2 + b^2 + \cancel{x^2} = x^2\frac{\cancel{a^2} + b^2}{a^2} = \cancel{x^2} + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Nun dividieren wir durch b^2, vertauschen die Seiten und erhalten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^1} = 1$$

Das ist die Definitionsgleichung.

24.4 Übung Wie lautet die Gleichung der Hyperbel, für die $b = 2\sqrt{3}$ und $e = 4$ ist? Wir bestimmen a^2 aus $e^2 = a^2 + b^2$, also $a^2 = 16 - 12 = 4$. Damit lautet die Gleichung $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. ◁

24.5 Übung Es ist gegeben die Gleichung $4x^2 - 6y^2 = 96$. Wir suchen die Achsen a und b sowie die Exzentrizität e. Wir bringen die Gleichung auf die Form $\frac{4x^2}{96} - \frac{6y^2}{96} = 1$ und weiter $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{16} = 1$. Daraus lesen wir ab $a^2 = 24$ und $b^2 = 16$ oder $a = 2\sqrt{6}$ und $b = 4$. Daraus folgt $e^2 = 24 + 16 = 40$ oder $e = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. ◁

Asymptote, Grenzgleichung

Wir schreiben die Hyperbel-Gleichung in der Form, nach y aufgelöst, um zu

$$y = \pm\sqrt{b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1)}$$

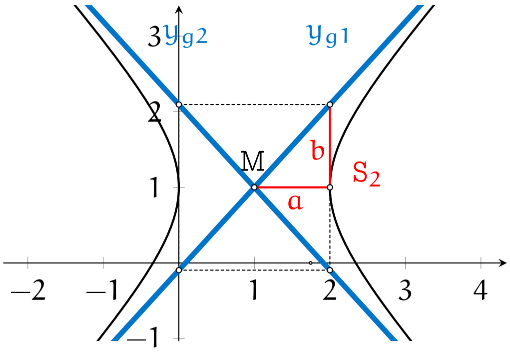
Im Grenzübergang $x \to \infty$ wird der Subtrahend 1 vernachlässigbar. Für y_g asymptotisch ist dann

$$y_g = \pm\sqrt{b^2\frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}x$$

Mit aus dem Ursprung heraus verschobenen Hyperbel gilt mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$

24.6 Formel Asymptoten der Hyperbel

$$y_g = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$



In der Mittelpunktgleichung wird die Asymptote einfach zu xb/a. In der Abbildung links wird zum ersten Mal der Parameter b sichtbar. Die Steigung der Grenzkurve ist b/a respektive $-b/a$. Die Asymptoten gehen durch den Mittelpunkt M. Man beachte, dass der Punkt $(a, 0)$ auf der Hyperbel liegt, aber b nur bei der Grenzkurve in Erscheinung tritt.

Tangente an Hyperbel

Wir machen uns die Sache einfach, indem wir die

24.7 Formel Tangente an Hyperbel

$$\frac{xx_P}{a^2} - \frac{yy_P}{b^2} = 1.$$

24.8 Übung Wir such die Schnittpunkte S der Hyperbel mit Hauptachsen a und b mit Mittelpunkt im Ursprung mit der Geraden $y = mx$. Wir schreiben

$$\frac{x_s^2}{a^2} - \frac{(mx_s)^2}{b^2} = 1 = x_s^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) = x_s^2\left(\frac{b^2 - m^2a^2}{a^2b^2}\right)$$

Damit folgt

$$x_s = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - m^2a^2}} \quad \text{und} \quad y_s = mx_s = \pm\frac{abm}{\sqrt{b^2 - m^2a^2}}$$

Da der Wurzelterm keine negativen Argumente zulässt, d.h. ein Schnitt überhaupt möglich ist, muss gelten $b^2 - m^2a^2 > 0$ oder $b^2 > m^2a^2$ oder $b^2/a^2 > m^2$. Nun sehen wir einen Zusammenhang mit der Steigung der Asymptoten b/a. Ist m nämlich grösser oder gleich der Asymptotensteigung, so kann die Gerade die Hyperbel nicht schneiden. ◁

24.9 Übung Eine Hyperbel wird von der Gerade $g : 3x + 5y = 125$ im Punkt $P = (x_P, 16)$ rechtwinklig geschnitten. Wir suchen die Gleichungen der Hyperbel und der Tangente t an die Hyperbel in P. Wir bestimmen x_P, indem wir in der Geradengleichung für $y_P = 16$ einsetzen $3x + 80 = 125$, daraus $x_P = 15$. Die Gerade g ist die Normale mit $\vec{n} = (3, 5)$, so dass sich die Steigung der Tangente den Richtungsvektor $\vec{v} = (-5, 3)$ besitzt. Wir schreiben $t : 5x - 3y = q$, setzen $(15, 16)$

ein und erhalten $q = 75 - 48 = 27$ also $t : 5x - 3y = 27$. Mit der Tangentengleichung und $(15, 16)$ folgt:

$$15xb^2 - 16ya^2 = a^2b^2 + p$$

Mit den Koeffizientevergleichen erhalten wir $15b^2 = 5$, $16a^2 = 3$, also $b^2 = 1/3$ und $a^2 = 3/16$. Und $p = 27 - \frac{1}{16}$.

b) g, t und die Nebenachse von hyp begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem zu zeigen ist, dass sein Umkreis durch die Hyperbelbrennpunkte verläuft! $\triangleleft$

24.5.8 Zusammenfassung Kegelschnitte

24.5.9 Flächen zweiter Ordnung**

Dieser Abschnitt dient nur dem Interesse, er enthält keinen prüfungsrelevanten Stoff. Die allgemeine Form von Flächen zweiter Ordnung ist

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Behandelte Beispiele sind die Kugel und der Zylinder. Hinzu kommen noch andere Flächen, wie z.B. Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide. Man beachte die Verwandtschaft mit den Kegelschnitten Ellipse, Hyperbel und Parabel. Es gibt aber auch gemischte Flächen, wie z.B. elliptische Kegel oder hyperbolische Paraboloide etc.

Ellipsoid

Die beschreibung eines Ellipsoids, einer geschlossenen Fläche, die in den zwei Hauptschnitten jeweils eine Ellipse aufweist.

Das Ellipsoid gehorcht der folgenden Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (24.8)$$

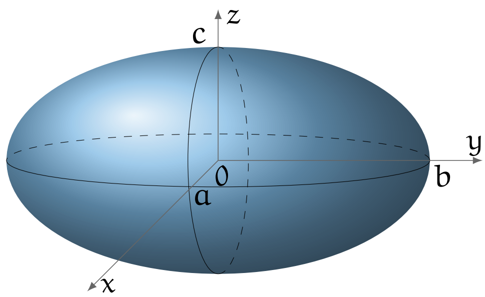


Abbildung 24.1: Ellipsoid

Man erkennt die drei Ellipsenhauptachsen a, b und c. Falls $a = b = c$ resultiert die Kugel. Damit ist das Ellipsoid eine Verallgemeinerungs der Kugel. Das Ellipsoid wird als verbessertes Modell für die Erde verwendet. So nimmt das Modell "WGS 1984" an, $a = c = 6356752\text{m}$ und $b = 6378137\text{m}$, ein Unterschied von rund 22km oder 0.035%.

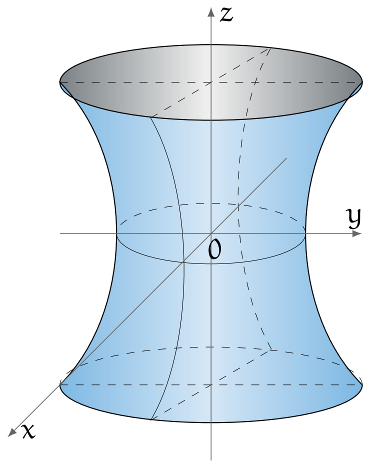
Hyperboloid

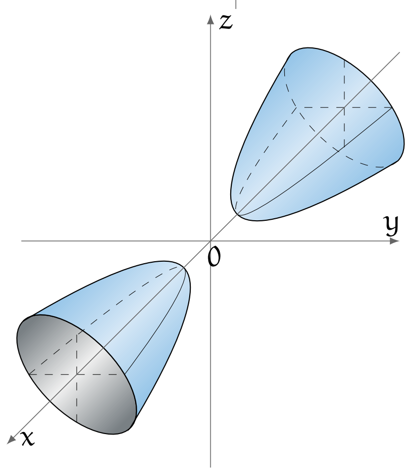
Das Hyperboloid kommt in zwei Ausprägungen daher, nämlich in der ein- und der zweischaligen Ausführung. Das einschalige Hyperboloid folgt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

das zweischalige:

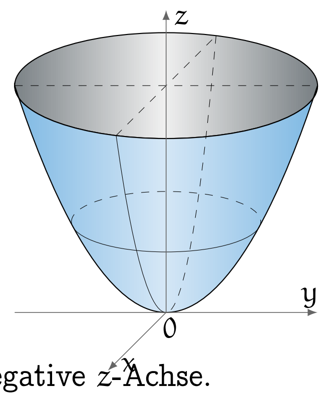
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$





Für einschalige Hyperboloide ist die Schnittkurve aller Ebenen, die zur xy-Ebene parallel sind, Ellipsen. Schnittkurven, die parallel zur xz- oder yz-Ebene sind, bilden Hyperbeln, mit Ausnahme der Flächen, für die $x = \pm a$ und $y = \pm b$ gilt. Hier sind es dann sich schneidende Geraden.
Die Schnittkurven des zweischalige Hyperbolid mit der xy- und xz-Ebene sind Hyperbeln.
In der yz-Ebene gibt es keinen Schnitt, aber in dazu parallelen Ebenen, für die $|x| > |a|$ ist, kommen Ellipsen hervor.

Paraboloid

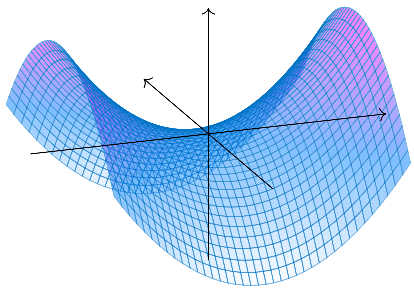


Das elliptische Paraboloid besitzt die Bestimmungsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

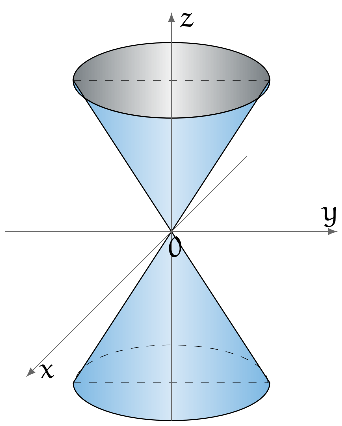
Wie der Name schon andeutet, sind Schnitte je nach Schnittebene Ellipsen, xy-Ebene, oder dann Parablen, Schnittebene parallel zu den xz- und yz-Ebenen. Die Abbildung zeigt ein Paraboloid, dessen Parameter c grösser als null ist. Für $c < 0$ liegt die Spitze ebenfalls bei $(0, 0, 0)$ folgt aber der negative z-Achse.
Im Spezialfall $a = b$ ist das Paraboloid rotationssymmetrisch, was früher für Leuchten am Fahrzeug verwendet wurde.
Das andere Paraboloid ist das hyperbolische (siehe Abbildung). Es weist die typische Sattelform auf und umschliesst nicht etwa Körperähnliches. Seine Bestimmungsgleichung lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$



In der Abbildung sind die Kurven sichtbar, die aus dem Schnitt mit xz- und yz-Ebenen erzeugt werden. In beiden Fällen sind es Scharen von Parabeln, die entweder noch oben oder nach unten offen sind. Die Schnitte allerdings in der xy-Ebene erzeugen Paare von Hyperbeln.

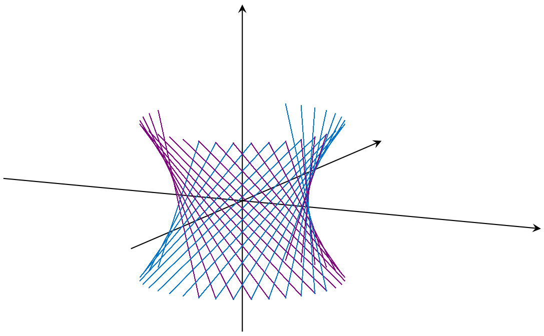
Elliptischer Kegel



Wir haben in Abschnitt 24.5.3 dem Kreiskegel schon besprochen. Nun erweitern wir den Kegel, so dass seine Schnittkurve mit zur Kegelachse senkrechten Ebenen als eine Ellipse erscheint, ausser in einem Punkt. Die Ellipse ist ja ein verallgemeinerter Kreis. Die Formel ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Im Ursprung ist die Schnittkurve zu einem Punkt geschrumpft.

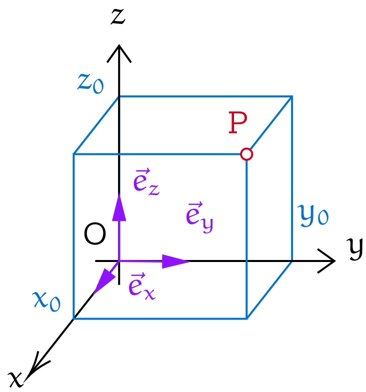


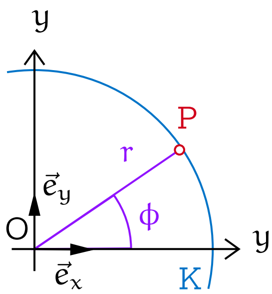
Der Kegel ist mit dem Zylinder sowie einschaligem Hyperboloid und hyperbolischem Paraboloide, nebst der Ebene, eine sogenannte *Regelfläche*. Eine Fläche heisst Regelfläche, wenn gilt: durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade, die ganz in der Fläche enthalten ist. Hier bedeutet Regel sovie wie Lineal. Bei den beiden letztgenannten gehen durch jeden Punkt sogar zwei Geraden. Diese sind aber nicht sofort einsichtig. In der Abbildung links sind die Geraden für den Hyperboloiden eingezeichnet. Es erinnert an altmodische Lampenschirme.

24.6 Krummlinige Koordinaten

24.6.1 Polarkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten in drei Dimensionen gehen von einem Ursprung $(0, 0, 0)$ aus. Auf drei zueinander senkrechten Geraden werden dann Abstände festgelegt, die Zusammen jeden Punkt des Raumes festlegen. Diese sind Mehrfache des Einheitsvektors in die betreffende Richtung: $(x_0, y_0, z_0) = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$. Der Punkt $(x_0, y_0, z; 0)$ und der Nullpunkt $(0, 0, 0)$ kann man sich als Eckpunkte eines Quaders vorstellen. Nun ist dies nicht die einzige Art, um jeden Punkt im Raum zu verorten.

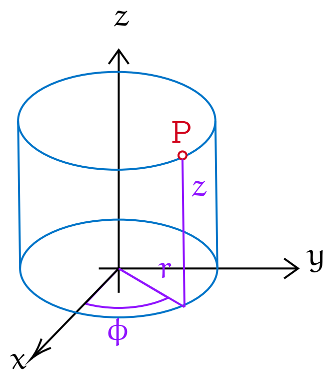




Alternative sind uns schon bekannt, denn die Parameter von Kurven, Ebenen und Körper kann man auch als Koordinaten verstehen. Wir erinnern und, dass ein Kreis in der Ebene als $K : \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$ dargestellt wurde. Das Koodinatensystem, das aus der Länge r und dem Winkel ϕ mit $0 \leqslant \phi < 2\pi$ bilden die *Polarkoordinaten*. Eine Punkt P wird also durch (r, ϕ) in der Ebene festgelegt. Nun könnte man annehmen, dieser Punkt sei die Projektion eines Punktes im Raum mit $(r, \phi, 0)$. Polarkoordinaten sind sinnvoll, wenn eine Figur symmetrisch in Bezug zum Ursprung ist.

24.6.2 Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten kann man sich als Polarkoordinaten plus die z-Koordinate des kartesischen Systems vorstellen. Ein Punkt $P = (x, y, z)$ im kartesischen System wird ersetzt durch (r, ϕ, z) Auf Seite 24-47 haben wir den Zylinder in Parameterform schon als:



$$Z: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

kennengelernt.
Für die Transformation zwischen Kartesisch und Zylinderkoordinaten gelten folgende Regel.

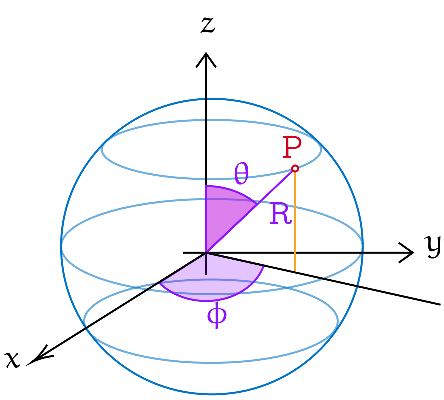
24.1 Eigenschaften Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi & \qquad r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= r\sin\phi & \qquad \phi &= \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \\ z &= z & \qquad z &= z \end{aligned}$$

where $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ if $y \geqslant 0$ and $\pi < \phi < 2\pi$ if $y < 0$

24.6.3 Kugelkoodinaten

Kugelkoordinaten sind aus der Geographie bestens bekannt, kann doch jeder Ort auf der Erdkugel mit Länge (östlich, westlich) und Breite (nördlich, südlich) mit zwei Winkelmassen angegeben werden. Z.B. Zürich 47.369° und 8.524°. In der Mathematik wird der Winkel der Breite allerdings vom Nordpol zur Aequatorialebene gemessen und nicht von der Aequatorialebene in Richtung Nordpol. Die Ortschaft Greenwich nahe London hat die Länge Null ($y = 0$), liegt auf dem Nullmeridian. Anstatt mit Vorzeichen wird mit Himmelsrichtungen operiert.



24.1 Eigenschaften Kugelkoordinaten (R, ϕ, θ):

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\,\cos\phi & R &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ y &= R\sin\theta\,\sin\phi & \phi &= \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \\ z &= R\cos\theta & \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{aligned}$$

where $0 \leqslant \phi \leqslant \pi \quad \text{if} \quad y \geqslant 0 \quad \text{and} \quad \pi < \phi < 2\pi \quad \text{if} \quad y < 0$

Both θ and ϕ are measured in radians.

Anmerkung 24.2. Die Koordinaten unterliegen folgenden Bedingungen: $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$, $\rho \geqslant 0$ and $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
Zudem ist ϕ unbestimmt, wenn $(x, y) = (0, 0)$. Zudem ist θ unbestimmt, wenn $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Der Ursprung kann nicht dargestellt werden.

24.3 Übung Wir transformieren den Punkt $P = (-2, -2, 1)$ von kartesischen zu Zylinder- und zu Kugelkoordinaten. Dazu verwenden wir die obigen Eigenschaften.
Es folgt für Zylinderkoordinaten: $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\phi = \arctan\left(\frac{-2}{-2}\right) = \arctan(1) = \frac{5\pi}{4}$, weil $y = -2 < 0$. Deshalb $(r, \theta, z) = \left(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, 1\right)$.
Für Kugelkoordinaten: $R = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$, $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1.23$.
Somit $(R, \phi, \theta) = \left(3, \frac{5\pi}{4}, 1.23\right)$. $\triangleleft$

Aufgaben

3.4 Gegeben sind die Punkte A(p/0/0), B(0/3p/0) und C(0/0/2p), p>0 konstant. Berechnen Sie den Winkel BAC. [50‰]

4 Wir bestimmen die zwei Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -p \\ 3p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -p \\ 0 \\ 2p \end{pmatrix}$$

Wir setzen $p = 1$, da für den Winkel nur die Richtung massgeblich ist. Wir rechnen das Skalarprodukt aus zu $(-1)(-1) = 2$. Die Längen sind $a = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ und $b = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Der Kosinus des Zwischenwinkels ist $\cos(\phi) = 2/\sqrt{10 \cdot 5}$. Daraus der $\arccos(2/\sqrt{10 \cdot 5}) = \arccos(0.2828) = 73.57°$.

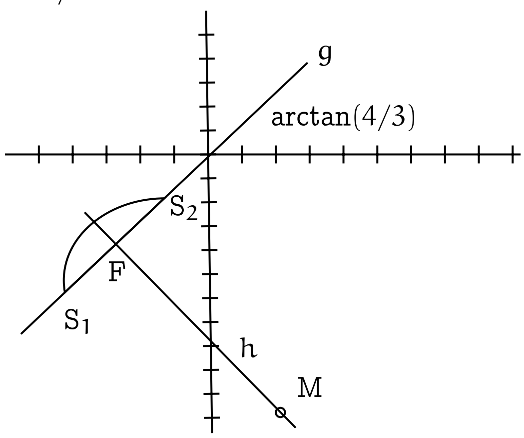
3.5 Gegeben sind die Punkte A(0/0) und C(8/6).

(a) Ein Kreis k um M(2/-11) schneidet aus der Geraden AC eine Sehne der Länge 4 heraus. Bestimmen Sie eine Gleichung für k. [67‰]

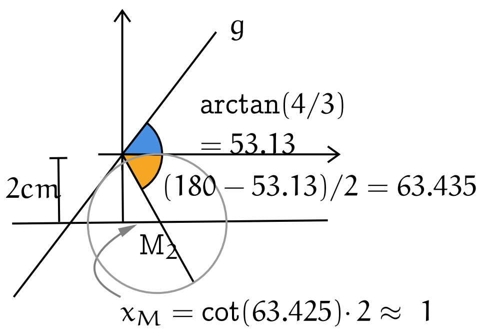
(b) Ein Kreis mit Radius 2 berührt die Gerade AC und die positive x-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten seines Mittelpunktes. [50‰]

5 **(a)** Nenne wir die Gerade durch die zwei Punkte g. Der Mittelpunkt des Kreises durch zwei Punkte liegt auf der Senkrechten der Geraden g. Diese ist $g : y = mx + b$ mit $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 8/6 = 4/3$ und $b = 0$ aus $y = 0 = m \cdot 0 + b$. Die zu dieser Geraden senkrechte h hat die Steigung $m_h = -1/m$ also $-3/4$.

Aus dem Punkt $M = (2, -11)$ folgt $y_h = -3/4x + c$ und $-11 = -3/4 \cdot 2 + c$, daraus $c = -9.5$. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist $-3/4x - 9.5 = 4/3x$. Daher $-9/12 - 16/9x = 9.5$ und $-25/12x = 9.5$ und $-9.5 \cdot 12/25 = -4.56 = x_F$ für den Fusspunkt. $y_F = 4/3x_F = -6.08$, also $F = (-4.56, -6.08)$. Gemäss Aufgaben ist $\overline{FS_1} = \overline{FS_2} = 2$. Daraus ergibt sich $\delta x = 3/2.5$ (weil die Seiten des Tangentendreiecks sich verhalten wie 5:4:3) oder mit den trigonometrischen Funktionen $\delta x = \cos(53.13) \cdot 2 = 1.2$ und $\delta y = 4/2.5 = 1.6 = \sin(53.13) \cdot 2$. Damit ergibt sich für die Schnittpunkte $S = (-4.56 \pm 1.2, -6.08 \pm 1.6)$ oder $S_1 = (-5.76, -7.68)$ und $S_2 = (-3.36, -4.48)$.



(b) Wir kennen die Winkel und wissen, dass der Kreismittelpunkt auf der Winkelhalbierenden von x-Achse und Gerade g liegt und, dass der y-Abstand gleich -2. Es ist $x = \text{ctg}(63.435°) = 1$. Also ist der Kreismittelpunkt bei $(1, -2)$.



3.6 Gegeben sei in einem dreidimensionalen Koordinatensystem die beiden Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, sowie h, welche durch die beiden Punkte A(6/4/1) und B(2/-4/4) geht.

(a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden h sowie den Punkt auf g, der in der yz-Ebene liegt. [74‰]

(b) Stellen Sie die beiden Geraden in einem Schrägbild dar und weisen Sie mittels Konstruktion nach, dass sich die beiden Geraden in S schneiden. [74‰]

(c) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden g und h und wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes S? [74‰]

6 **(a)** Für die Parametergleichung braucht es den Stützvektor, z.B. $\vec{p} = (6, 4, 1)$ plus einen Richtungvektor, z.B. aus der Differenz $(4, 8, -3)$. Damit schreiben wir $h : (6, 4, 1) + s \cdot (4, 8, -3)$. “In der Ebene yz liegen” heisst, hier ist $x = 0$ von g. Für dieses x gilt $x = 5 + t \cdot 1 = 0$. Damit $t = -5$. Diesen Wert für $\vec{r}$ bedeutet $D = (0, 3 - 25, 2) = (0, -22, 2)$

(b)

(c) Der Zwischenwinkel ergibt sich aus den Richtungsvektoren alleine; es gilt mit $\vec{u} = (1, 5, 0)$ und $vecv = (4, 8, -3)$, dass $\cos(\phi) = \vec{u} \bullet \vec{u}/uv$. Der Zähler wird zur $4 + 40 = 44$, $u = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$ und $v = \sqrt{16 + 64 + 9} = \sqrt{89}$. Damit $\cos(\phi) = \frac{44}{\sqrt{26}\sqrt{89}} = 0.91468$ und $\arccos(0.91468) = 23.84°$

Die Koordinaten ergeben sich aus den möglichen Gleichungssystemen. Mit der z-Komponenten, wo eine Komponenten null ist:

$$5 + t = 6 + 4s$$
$$2 = 1 - 3s$$

Daraus $s = -1/3$ und $t = 1 + 4s = 1 - 4/3 = -1/3$. Damit folgt für S. $S = (5 - 1/3, 3 - 5/3, 2) = (14/3, 4/3, 2)$.

3.7 Gegeben sind die zwei Punkte P(14/10) und Q(5/-2).

(a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade g mit der Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ durch die beiden Punkte verläuft. [27‰]

(b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden g, die doppelt so weit von Q entfernt liegen wie von P. [54‰]

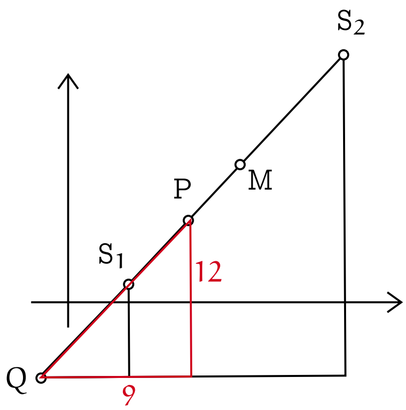
(c) Leiten Sie rechnerisch her, dass die Menge aller Punkte, die von Q doppelt so weit entfernt sind wie von P, den Umfang des Kreises k mit Mittelpunkt M(17/14) und Radius r = 10 bildet. [81‰]

(d) Wie viele Kreise gibt es, die beide Koordinatenachsen und den Kreis k aus Teilaufgabe c berühren? Erstellen Sie dazu eine Skizze. [27‰]

(e) Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius des kleinsten dieser Kreise. [54‰]

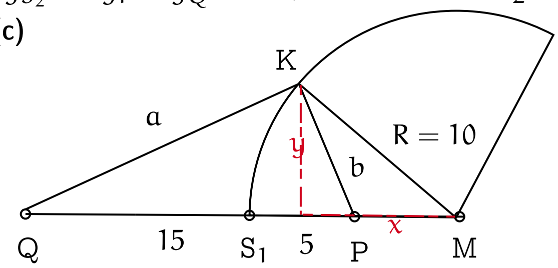
7 **(a)** Wir setzen zweimal ein und vergleichen die λ-Werte. Sind sie gleich, dann liegt der Punkt auf der Geraden. Also für P: $14 = 11 + \lambda 3$ daraus $\lambda = 1$. Für die y-Koordinate folgt $y = 6 + 1 \cdot 4 = 10$, stimmt! Und $5 = 11 + \lambda 3$, daraus $\lambda = -2$. Für y: $y = 6 - 2 \cdot 4 = -2$, stimmt auch!

(b) Es gibt zwei Punkte $S_{1,2}$, welche diese Bedingung erfüllen.



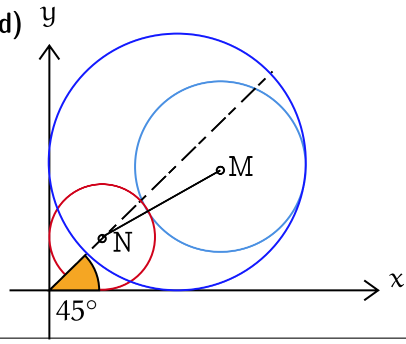
Ein Punkt ist zwischen P und Q, und zwar die Strecke im Verhältnis 2:1 teilend, und der zweite ist liegt jenseits von P auf der Geraden, sodass $2\overline{QS_2} = \overline{PS_2}$ In der Skizze sind die horizontalen und vertikalen Abstände von 9 und 12 eingezeichnet. Den Punkt S_1 erhält man aus Q, indem man 2/3 der Abstände addiert, also $S_1 = (5,-2) + (6,8) = (11,6)$ (Strahlensatz). Für x_{S_2} gilt: $2(x_{S_2} - x_P) = (x_{S_2} - x_Q)$, somit $2x_{S_2} - 2 \cdot 14 = x_{S_2} - 5$. Damit $x_{S_2} = 23$. Analog für $y_{S_2} = 2y_P - y_Q = 20 + 2 = 22$. Somit $S_2 = (23, 22)$.

(c)



Rechnen wir den Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_1S_2}$ als Mittelwert der Koordinaten, resultiert $(11 + 23)/2, (6 + 22)/2) = (17, 14)$. Das ist der Mittelpunkt des Kreises. Die Aussage stimmt für die zwei Punkte. Wir machen eine Skizze, wobei wir die Figur drehen und nur noch mit den Abständen arbeiten. Diese sind $\overline{QM} = 20$, $\overline{PM} = 5$. Der Vektor auf den Kreispunkt sei (x, y). Die Behauptung ist mit der Figur: $a = 2b$. Für $a^2 = y^2 + (20 - x)^2 = y^2 + x^2 + 400 - 40x$ und mit $x^2 + y^2 = 100$, der Kreisgleichung, folgt: $a^2 = -40x + 500$. Für $b^2 = y^2 + (x - 5)^2 = y^2 + x^2 - 10x + 25 = -10x + 125$. Nun ist hier $a^2 = 4b^2$ und damit $a = 2b$. Das ist eine schwierige Frage.

(d)



Es gibt 2 Kreise gemäss Skizze. Der kleiner habe den Radius f, dann sind die Koordinaten des Mittelpunkts $N = (f, f)$. Der Abstand zu M ist $f + 10$ und Gleichzeitig die Länge des Vektors $\overrightarrow{MN}$, also $(17 - f, 14 - f)$ und daraus $(17 - f)^2 + (14 - f)^2 = (f + 10)^2$. Rechnerisch $289 - 34f + f^2 + 196 - 28f + f^2 = f^2 + 20f + 100$ oder $f^2 + 82f - 585 = 0$ und weiter $(f - 41)^2 = 41^2 - 585 = 1096$ und $f = 41 \pm 33.1$. Der kleinere Radius ist 7.89.

3.8 Von welchen Punkten der z–Achse aus gesehen erscheinen die Punkte A (16/6/10) und B (–8/0/2) unter einem rechten Winkel? [40‰]

8 Der Punkt auf der z-Achse sei $C = (0, 0, z)$. Wir bilden die zwei Vektoren $\vec{u} = (16, 6, 10) - (0, 0, z) = (16, 6, 10 - z)$ und $\vec{v} = (-8, 0, 2) - (0, 0, z) = (-8, 0, 2 - z)$. Rechtwinklig heisst $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. Also $-16 \cdot 8 + ((10 - z)(2 - z) = 0$. Daraus $20 - 10z - 2z + z^2 = 128$ und $z^2 - 12z = 108$. Weiter entweder mit der Mitternachtsformel oder mit quadratischem Ergänzen. Letzteres ergibt $(z - 6)^2 - 36 = 108$ oder $(z - 6)^2 = 144$. Damit $z - 6 = \pm 12$ und $z_{1,2} = 6 \pm 12$ oder $z_{1,2} = \{18, -6\}$.

3.9 Die Gerade $g: \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\7\\13\end{pmatrix}$ durchstösst die Ebene $E: 2x+5y+14z=450$ in einem Punkt D.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten von D. [40‰]

(b) Welchen Winkel (auf Zehntel Grade gerundet) schliesst die Gerade g mit dem Normalenvektor n der Ebene E ein? [40‰]

(c) Wie gross ist der Abstand des Ursprungs O (0/0/0) von der Ebene E ? [40‰]

(d) Eine Kugel mit dem Mittelpunkt M (2/5/14) und dem Radius $a = 39$ schneidet die Ebene E in einem Kreis k. Wie gross ist dessen Radius r? [40‰]

(e) Eine zur z–Achse parallele Ebene V durch die Gerade g schneidet die x–y–Ebene in einer Geraden $h: y(x) = mx + q$. Berechnen Sie m und q. [40‰]

9 **(a)** Wir haben die Formel hergeleitet (Formelsammlumg):

$$\vec{q} = \vec{s}_g + \frac{\vec{n} \bullet (\vec{s}_E - \vec{s}_g)}{\vec{n} \bullet \vec{v}} \vec{v}.$$

Alle Grössen sind bekannt ausser ein Stützvektor $\vec{s}_E$ auf die Ebene. Wir brauchen nur einen Punkt zu bestimmen, der auf E liegt. Wir setzen an $\vec{s}_E = (0, y, 0)$ und finden $y = 450/5 = 90$. Wir berechnen das erste Skalarprodukt $(2, 5, 14) \bullet \big((0, 90, 0) - (-2, -2, 1)\big) = (2, 5, 14) \bullet (2, 92, -1) = 4 + 460 - 14 = 450$. Das andere $(2, 5, 14) \bullet (4, 7, 13) = 8 + 35 + 182 = 225$. Damit erhalten wir den Ortsvektor zum Durchstosspunkt:

$$\vec{q} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} + \frac{450}{225}\begin{pmatrix}4\\7\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+8\\-2+14\\1+26\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\12\\27\end{pmatrix}$$

(b) Wir suchen den Zwischenwinkel von $\vec{n}$ und dem Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\5\\14\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\7\\13\end{pmatrix}.$$

Wir wissen, dass $\cos(\phi) nv = \vec{n} \bullet \vec{v}$. Also $\vec{n} \bullet \vec{v} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 13 = 8 + 25 + (130 + 52) = 215$. Weiter $v = \sqrt{36 + 49 + 169} = \sqrt{254}$ und $n = \sqrt{4 + 25 + 196} = \sqrt{225} = 15$. Daraus $\cos(\phi) = 215/15/\sqrt{254} = 0.89935$. Daraus $\arccos(\phi) = 25.9°$.

(c) Aus der Formelsammlung wissen wir, dass gilt

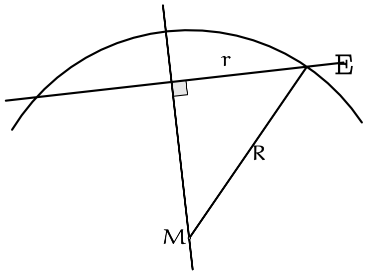
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Der Nullpunkt hat die Koordinaten $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)0$. Die Koeffizienten der Ebene sind $(a, b, c) = (2, 5, 14)$. Seine Länge ist $\sqrt{4 + 25 + 196} = \sqrt{225} = 15$. Also folgt

$$D = \frac{450}{15} = 30.$$

(d) Wir könnten die Kugel mit der Ebene schneiden und den Kreis bestimmen. Dies ist recht aufwendig. Es wird nach dem Radius gefragt. Deshalb könnte man den Abstand des

Kugelmittelpunkts von der Ebene ausrechnen.



Der Abstand, nennen wir ihn q, ist analog zu oben $q = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}-450|}{15}$. Rechnerisch $(2,5,14)\bullet(2,5,14) = 4+25+196 = 225$. Daraus $q = \frac{|225-450|}{15} = 15$. Mit der Skizze und dem Pythagoras folgt $r^2 = R^2 - 15^2 = 39^2 - 15^2 = 1521 - 225 = 1296$ und radiziert $r = 36$.

(e) Die Vorschrift, dass die Gerade parallel zur z-Achse sei, bedeutet, dass wenn man von der z-Achse auf die Ebene schaut, man nur die Projektion der Geraden g sieht. Deshalb kann man in der xy-Ebene einfach die x und y-Koordinaten von g betrachten. Damit wird h:

$$h: \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zwei Punkte aus $t = 0$ und $t = 1$ und erhalten $(-2,-2)$ und $(2,5)$. Die Gerade durch diese zwei Punkte hat die Steigung $m = 7/4$. Und einsetzten eines Punktes ergibt aus $y = (7/4)x + q$ dann $5 = (7/4)2 + q$ und somit $q = 5 - 7/2 = 1.5$. Das Resultat ust $h: y(x) = (7/4)x + 1.5$.

3.10 Gegeben sind die beiden Geraden : $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ und $h: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\\11\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ sowie die Punkte M(7/-3/11), A(5/-7/7) und Z(-5/-12/-10).

(a) Zeigen Sie, dass g und h rechtwinklig zu einander stehen. [12.5‰]

(b) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf h liegt und bestimmen Sie diejenige Gerade k, welche A enthält und senkrecht zu beiden Geraden g und h steht. [25‰]

(c) Zeigen Sie, dass die Gerade k die Gerade g schneidet und geben Sie den Schnittpunkt P an. [25‰]

(d) Es gibt 9 Würfel, welche je zwei Eckpunkte auf g und h besitzen. Beschreiben Sie die Lage dieser Würfel zu den Geraden g und h mithilfe von Skizzen und geben Sie ihre Kantenlängen an. (Beachten Sie, dass es auch Würfel gibt, bei denen die beiden Würfelpunkte auf g oder h keine Kante bilden.) [50‰]

(e) Wir betrachten nun die Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius $\sqrt{117}$. Zeigen Sie, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt (-1 / -1 / 4) berührt. [25‰]

(f) Die Gerade g wird nun von Z aus beleuchtet und wirft dabei einen Schatten auf die Kugel K, welcher Teil eines Kreises ist. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises. [62.5‰]

10 **(a)** Das Skalarprodukt der zwei Richtungsvektoren muss null sein: Kontrolle: $(2, 1. - 2) \bullet (1, 2, 2) = 2 + 2 - 4 = 0$

(b) Gibt es ein s, das für die drei Koordinaten des Punktes gilt? Aus $5 = 7 + s$, daraus $s = -2$. Für y eingesetzt: $y = -3 - 2 \cdot 2 = -7$, ok! $z = 11 - 2 \cdot 2 = 7$, ok! "Senkrecht zu beiden" $\Leftrightarrow \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{w} = (6, -6, 3)$$

Daraus $k : (5, -7, 7) + q(6, -6, 3)$.

(c) "Sich schneiden" $\Rightarrow$ Geradengleichung gleichsetzen. Die ersten zwei Komponenten:

$$5 + 6q = -1 + 2t$$
$$-7 - 6q = -1 + t$$

Addition der Gleichungen: $5 - 7 + 6q - 6q = -1 + 2t - 1 + t$ oder $-2 = -2 + 3t$, $t = 0$. Daraus $-7 - 6q = -1$ oder $-6 = 6q$ und $q = -1$. Testen an der z-Koordinate $4 = 7 - 3 = 4$, ok! Schnittpunkt $P = (-1, -1, 4)$

(d) Grundsätzlich gibt es drei konstelltionen von vier Punkten Würfel. Ist

(e) Die Gleichung der Kugel K lautet $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 + (z - 11)^2 = 117$. Wir setzten die Koordinaten von g in Parameterform ein, also $x = -1 + 2t$ etc. und erhalten

$$(-1 + 2t - 7)^2 + (-1 + t + 3)^2 + (4 - 2t - 11)^2 = 117$$

und nun berechnet

$$\begin{aligned} (2t - 8)^2 + (t + 2)^2 + (-2t - 7)^2 &= 117 \\ (4t^2 - 32t + 64) + (t^2 + 4t + 4) + (4t^2 + 28t + 49) &= 117 \\ 9t^2 - 4t + 117 &= 117 \\ t(9t - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Lösungen für diese Gleichung, entweder $t = 0$ oder $t = 4/9$. Für $t = 0$ ergibt g: $(-1, -1, 4)$. ok!

(f) Der Schattenwurf ist gleichbedeutend dem Schnitt der Kugel mit der Ebene, die von g und dem Punkt Z gebildet wird. Wenn wir den Abstand des Kugelmittelpunktes von dieser Ebene kennen, dann gilt der Pythagoras in der Form $r^2 = R^2 - a^2$ mit R Radius der Kugel, a Abstand und r Radius des gesuchten Kreises. Der Abstand eines Punktes von der Ebene ist 8Formelsammlung)

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Wir brauchen den Normalenvektor auf die Ebene. Dazu brauchen wir drei Punkte, Z und P sind schon vorhanden, ein dritter B ist mit $t = 1$ z.B. $(1, 0, 2)$. Zwei Vektoren in der Ebene sind $\overrightarrow{ZP} = (-5 + 1, -12 + 1, -10 - 4) = (-4, -11, -14)$ und $\overrightarrow{ZB} = (-5 - 1, -12, -6 - 2) = (-6, -12, -8)$, gestaucht $(-3, -6, -4)$

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -11 & -6 \\ -14 & -4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 64 - 44 \\ 42 - 16 \\ 33 - 24 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{w} = (20, 26, 9)$$

Die Ebene ist beschrieben durch Normale und eine Punkt, hier B, als $\vec{w}(x, y, z) = \vec{w}(1, 0, 2)$. Oder $d = -\vec{w}(1, 0, 2) = -(20, 26, 9) \bullet (1, 0, 2) = -20 - 18 = -38$.

3.11 Betrachten Sie die Gleichung des folgenden Kegelschnitts:

$$25x^2 + 19y^2 + 100x - 54y - 44 = 0$$

Bestimmen Sie im Fall einer Ellipse den Mittelpunkt, grosse und kleine Halbachse, die vier Endpunkte der Halbachsen und die Brennpunkte. Im Fall einer Hyperbel den Mittelpunkt, die Scheitelpunkte, die Brennpunkte und die Asymptoten. Im Fall einer Parabel den Scheitelpunkt, den Brennpunkt und die Leitlinie. Skizzieren Sie die Kurve in einem x-y Koordinatensystem. [62.5‰]

11 Wir müssen den Ausdruck in eine Normalform bringen, d.h. umformen mit quadratischem Ergänzen

$$\begin{aligned}
25x^2 + 9y^2 + 100x - 54y - 44 &= 0 \\
25(x^2 + 4) + 9(y^2 - 6) - 44 &= 0 \\
25[(x+2)^2 - 4] + 9[(y-3)^2 - 9] - 44 &= 0 \\
25(x+2)^2 + 9(y-3)^2 - 100 - 81 - 44 &= 0 \\
25(x+2)^2 + 9(y-3)^2 &= 225 \quad | : 25 : 9 \\
\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} &= 1
\end{aligned}$$

Das ist eine Ellipse mit Hauptachsen $a = 3$ und $b = 5$, Mittelpunkt $M = (-2, 3)$: Die Endpunkte $S_{1,2} = (-2 \pm 3, 3)$ und $S_{3,4} = (-2, 3 \pm 5)$. Die Brennpunkte sind mit $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16} = 4$, damit $F_{1,2} = (-2, 3 \pm 4)$

Index